د دوولسم ټولګی د ریاضی تعلیمی لارښود – دریمه دوره
مشتقات، د یو تابع مشتق، د مشتق هندسي تعبیر، د مشتق قوانین

د درس عمومي هدف
دلته د مشتقونو اړوند د ریاضیاتو اصلي مفاهیم په بشپړه او لنډه توګه تشریح شوي دي. مشتق اخیستل د یو تابع د بدلون د نرخ د څېړنې او تحلیل لپاره کارول کیږي. په بل عبارت، مشتق موږ ته وایی چې یو تابع څنګه او په کوم سرعت سره بدلیږي.

مشتقات

- په فزیک کې د سرعت او تېزېدو محاسبه
- د اقتصاد په برخه کې د روندونو تحلیل
- د مسائلونو اعظمي/اقل کولو لپاره (مثلاً تابع کمینه یا زیاته کول)
- په انجینري او طبي علومو کې د لحظه‌ای بدلونونو ماډل جوړونه

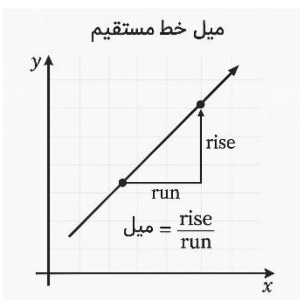
❖ **د یوې منحنی میل :**

تعریف: میل د زاویې تانجانت دی چې د یو تابع ګراف له مثبت x محور سره جوړوي.

که د تابع ګراف یوه مستقیمه کرښه وي، نو د هغې میل لاندې ځانګړتیاوې لري:

- میل یې په ټولو نقاطو کې ثابت وي
- که وغواړو د مستقیمې کرښې میل پیدا کړو، له لاندې اړیکې څخه استفاده کوو:

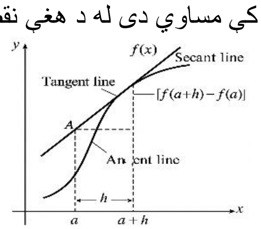
$$m = tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



که تابع د یوې درجې څخه لوړه درجه ولري، نو د هغې ګراف به د یوې منحني کرښې شکل ولري او میل یې په هر نقطه کې د منحني د لارې د بدلون له امله تغیر کوي. له همدې امله، میل یې په هر نقطه کې باید مطالعه شي.

د دې لپاره چې په هر نقطه کې میل ترلاسه کړو، په هماغه نقطه کې د منحني یوه لمس کرښه (مماس) رسمو. په حقیقت کې، د منحني میل په یوه نقطه کې مساوي دی له د هغې نقطې د لمس کرښې میل سره.

$$: f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

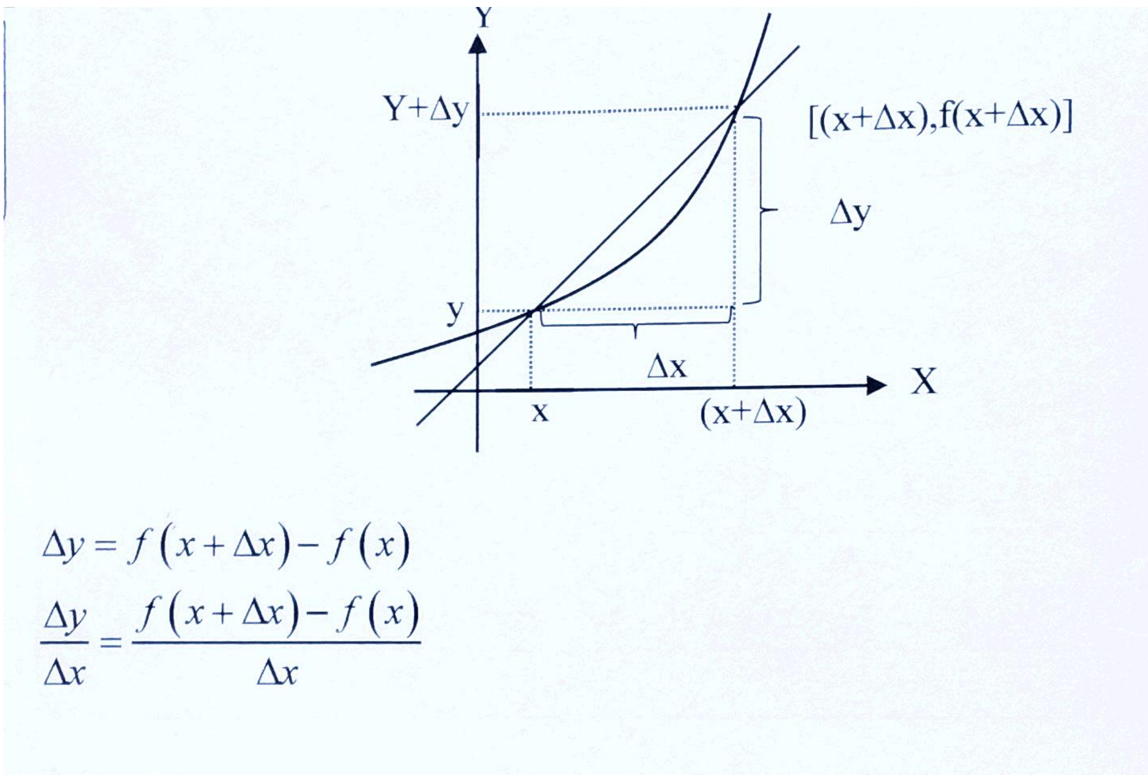


د وضاحت لپاره لاندې مثال په نظر کې ونیسو:

مثال1: د $y = x^2$ له منحني سره د مماس میل د $x = 3$ په ټکی کې پیدا کړی

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x+0$$
$$= 2x \Rightarrow f'(3) = 2\cdot 3 = 6$$

❖ **د تابع منځنی بدلونونه:** کله چې د تابع بدلونونه په هر واحد د متغیر بدلون په اساس محاسبه کړو، نو منځنی بدلون د تابع ترلاسه کیږي. په بل عبارت، د تابع بدلون په هر واحد د متغیر بدلون کې، منځنی بدلون تابع بلل کیږي



❖ **د یوې تابع مشتق:**

د یو تابع د مشتق لپاره دوه ډوله تعریفونه وړاندې کوو:

الجبري تعریف د مشتق:
د تابع لحظه‌ای زیاتوالی مشتق بلل کیږي، یا مشتق د تابع د بدلونونو نسبت او د متغیر د بدلونونو لیمت (limit) دی، کله چې د متغیر بدلون صفر ته نژدې

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

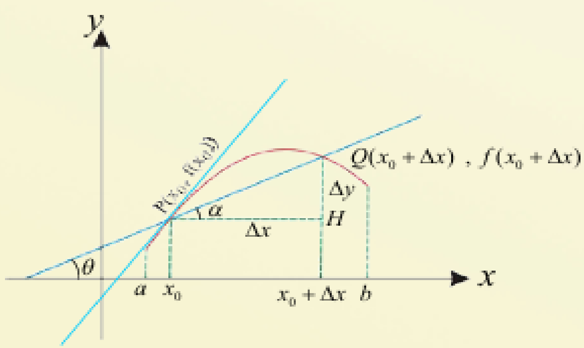
د وضاحت لپاره لاندې مثال په نظر کې ونیسو:

مثال:مشتق تابع $=f(x)$ پیدا وکړی

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}=\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

دمشتق هندسي تعبير : د مماس د منحني د تماس په ټکی کې د تابع له مشتق څخه بې هغه ټکي کې عبارت دی ، یا پّ بل عبارت د هغې زاوویې له ټانجینټ څخه عبارت دی چې د Δ مستقیم خې یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي

- د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د C منحني یا د $f(x)$ تابع داسې چې د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي ګراف یې رسم او د $P(x_0,f(x_0))$ او $Q(x_0+\Delta x\ ,\ f(x_0+\Delta x))$ ټکي د منحني پرمخ وټاکئ.
- د Δ مستقیم خط داسې رسم کړئ چې د منحني د P او Q له ټکو څخه تېر شي.
- آیا ویلای شئ چې د Δ مستقیم خط د x د محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- ووایئ چې د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ یا $\frac{HQ}{HP}$ نسبت د څه په نامه یادېږي؟
- که د Q ټکی د P ټکي ته ډېر نژدې شي $(\Delta x\to 0)$، نو د Δ مستقیم خط په څه ډول کرښه بدلېږي په شکل کې یې وښیئ.
- د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لیمیټ کله چې $\Delta x\to 0$ وکړي، په $P(x_0,f(x_0))$ ټکي کې وځیرئ.



د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

د $f(x)$ منحني د تابع مشتق، د $P(x_0,f(x_0))$ په ټکي کې د مماس له میل سره برابر دی، یعنې:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'=\tan\alpha=\tan\theta=m_\Delta$$

د مشتق قوانین :

تابع	مشتق	مثال
1) $y = a$	$\acute{y} = 0$	$y = 3 \Rightarrow \acute{y} = 0$
2) $y = ax$	$\acute{y} = a$	$y = 7x \Rightarrow \acute{y} = 7$
3) $y = ax^n$	$\acute{y} = a \cdot nx^{n-1}$	$y = 2x^3 \Rightarrow \acute{y} = 6x^2$
4) $y = u + v + \cdots$	$\acute{y} = u' + \acute{v}$	$y = 3x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \acute{y} = 6x - 5$
5) $y = u \times v$	$\acute{y} = \acute{u} \cdot v + \acute{v} \cdot u$	$y = (2x^2)(4x) \Rightarrow \acute{y} = 4x \cdot 4x + 4 \cdot 2x^2 = 16x^2 + 8x^2$
6) $y = au$	$\acute{y} = a \cdot \acute{u}$	$y = m \cdot 4x \Rightarrow \acute{y} = 4m$
7) $y = \frac{u}{v}$	$\acute{y} = \frac{\acute{u} \cdot v - v' u}{v^2}$	$y = \frac{3x^2}{4x} \Rightarrow \acute{y} = \frac{6x \cdot 4x - 4 \cdot 3x^2}{16x^2} = \frac{12x^2}{16x^2}$
8) $y = \frac{u}{a}$	$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{a}$	$y = \frac{2x^2}{8} \Rightarrow \acute{y} = \frac{4x}{8}$
9) $y = \frac{a}{u}$	$\acute{y} = \frac{-a\acute{u}}{u^2}$	$y = \frac{3}{5x} \Rightarrow \acute{y} = \frac{-15}{25x^2}$
10) $y = au^m$	$\acute{y} = m \cdot a \cdot \acute{u} \cdot u^{m-1}$	$y = 3 \cdot 2x^2 \Rightarrow \acute{y} = 2 \cdot 3 \cdot 4x \cdot 2x = 48x^2$
11) $y = \sqrt{u}$	$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{2x} \Rightarrow \acute{y} = \frac{2}{2\sqrt{2x}}$
12) $y = \sqrt[m]{u^n}$	$\acute{y} = \frac{n \cdot \acute{u}}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y = \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow \acute{y} = \frac{3 \cdot 3x^2}{5\sqrt[5]{x^{5-3}}} = \frac{9x^2}{5\sqrt[5]{x^2}}$