

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}} \log_e a = y \log_e a = a^x \ln a$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

A. مشتق تابع sin:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

B. مشتق معکوس تابع cos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

C. مشتق معکوس تانجانت:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

D. مشتق معکوس کوتانجانت:

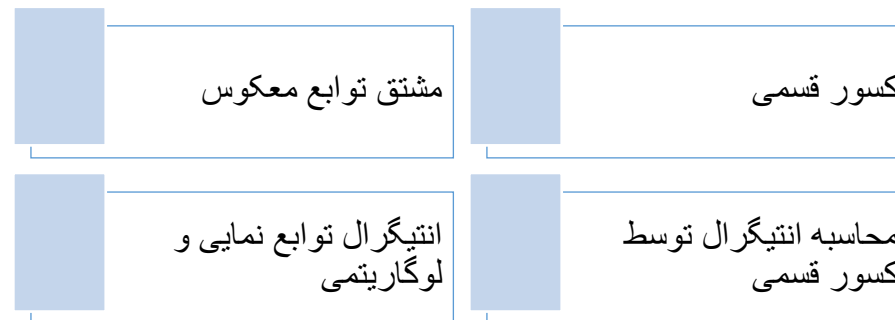
$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cotan y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}} = -\cos^2 y$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

مثال 1: مشتق تابع $y = (\arctan x)^5$ را بدست آرید.

راهنمایی آموزشی ریاضی صنف دوازدهم - دوره یازدهم

آنچه درین بخش فرا خواهیم گرفت



اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان قادر گردد تا: a:

- مشتق توابع معکوس را بدانند و تعریف کرده بتوانند
- انتیگرال توابع نمایی و لوگاریتمی را دانسته و آنها را تعریف کرده بتوانند.
- کسور قسمی را بدانند و تعریف کرده بتوانند.
- انتیگرال ها را توسط کسور قسمی محاسبه کرده بتوانند.
- مثال های مربوط به موضوعات آتی را حل کرده بتوانند.

مشتق توابع معکوس

تعریف: هرگاه f و g دو تابع معکوس همدیگر باشند، یعنی $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$

درین صورت $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ یا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ است، که تابع و خواص مشتق توابع

ضمنی میتوانیم بنویسیم، که:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = g(y) \end{cases} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: مشتق تابع $y = a^x$ را با استفاده از مشتق تابع معکوس آن بدست آرید.

حل:

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$

مثال: کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ را به کسور قسمی آن تجزیه نمائید.

حل: پولینوم مخرج را به عوامل ضربی آنها تجزیه می کنیم.

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 1)(x + 2)$$

یعنی

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

در رابطه فوق مخرج ها باهم برابر اند، پس صورت ها نیز باهم برابر اند. و داریم که.

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ A - 3B - 6C = -1 \\ -2A - 10B + 5C = -39 \end{cases}$$

رابطه فوق یک معادله سه مجهوله درجه یک است، بعد از حل آن داریم که

$$A = 2, \quad B = 3, \quad C = -1$$

حالت دوم

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک که بعضی از آنها تکرار گردیده باشد، یعنی عامل $(x - x_0)$ ، n - دفعه تکرار گردیده باشد.

حل:1

$$y = (\arctan x)^5$$

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

مثال:2: مشتق تابع $y = \log_5(\arctan x)$ را بدست آرید.

حل:2

$$y = \log_5(\arctan x)$$

$$y' = [y = \log_5(\arctan x)]' = \frac{(\arctan x)'}{(\arctan x) \ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x) \ln 5}$$

مثال:3: مشتق تابع $y = \arctan e^x$ را بدست آرید.

حل:3

$$y' = [\arctan e^x]' = (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y' = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

کسور قسمی

تعریف: کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته شده باشد، طوری که اگر آنها باهم جمع گردد کسر داده شده واقعی بدست آید کسور قسمی نامیده می شود.

برای تجزیه سک واقعی حالات ذیل وجود دارد.

حالت اول

هرگاه $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ پولینوم مخرج از عوامل ضربی تکرار نشده تشکیل گردیده باشد قرار ذیل تجزیه می گردد.



$$\begin{cases} A + C = 5 \\ A + B + 2C = 8 \\ B + 4C = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \\ C = 2 \end{cases}$$

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

انتیگرال های توابع نمایی (اکسپوننشیال)

برای تابع نمایی $f(x) = e^x$ داریم که

$$f(x) = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$$

و برای تابع نمایی $f(x) = a^x$ داریم که:

$$f(x) = a^x \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad : \quad (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$$

مثال 1: انتیگرال $f(x) = 2^{x-3}$ را دریابید.

حل:

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{2^x}{2^3} dx = \int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

مثال 2: انتیگرال نمایی $\int 3^{x+1} dx$ را دریابید.

حل 2:

$$\int 3^{x+1} dx = \int 3 \cdot 3^x dx = 3 \int 3^x dx = 3 \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

انتیگرال توابع لوگاریتمی

میدانیم که لوگاریتم ها دو نوع اند، پس انتیگرال این توابع عبارت اند از.

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_0} + \frac{B}{(x - x_0)^2} + \frac{C}{(x - x_0)^3} + \dots + \frac{N}{(x - x_0)^n}$$

مثال: کسر واقعی $\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$ را به کسر های قسمی آن تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2} \\ &= \frac{(A + B)x^2 + (-2A - 3B + C)x + (A + 2B - 2C)}{(x - 2)(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -2A - 3B + C = -6 \\ A + 2B - 2C = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

حالت سوم

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده باشد،

پس یک جز پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ است که شکل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ را دارد.

مثال: کسر $\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$ را به کسر های قسمی آن تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} &= \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1} \\ &= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} \\ &= \frac{(A + C)x^2 + (A + B + 2C)x + (B + 4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3,627$$

محاسبه انتیگرال توسط کسور قسمی

بعضی انتیگرال های وجود دارند که تابع تحت انتیگرال آنها یک کسر واقعی اند، پس برای محاسبه انتیگرال آنها از کسور قسمی استفاده می نمائیم.

مثال 1: انتیگرال $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ را دریافت نمائید.

حل 1: ابتداء تابع تحت انتیگرال را به کسور قسمی آن تجزیه می کنیم (روش تجزیه رادر بخش تجزیه به کسور قسمی خواندیم).

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx \\ &= -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx \\ &= -\ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 \\ &= \ln\left(\frac{(x-4)^8}{x-2}\right) + C \end{aligned}$$

فعالیت ها

انتیگرال $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx$ را محاسبه کنید. 🚩

انتیگرال $\int 3 \log \frac{1}{x} dx$ را محاسبه کنید. 🚩

انتیگرال $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$ محاسبه کنید. 🚩

کسور قسمی چیست؟ با ذکر یک مثال بیان کنید. 🚩

انتیگرال توابع نمایی را تشریح کنید. 🚩

انتیگرال توابع لوگاریتمی را تشریح کنید. 🚩

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال 1: انتیگرال $\int \ln 3x dx$ را بدست آورید.

حل 1:

$$\begin{aligned} \int \ln 3x dx &= \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx \\ &= x \ln 3 + x \ln x - x + C = x(\ln 3x - 1) + C \end{aligned}$$

مثال 2: انتیگرال $\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx$ را بدست آورید.

حل 2:

$$-2x - 3 = u \Rightarrow -2 = \frac{du}{dx}, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx &= \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C \\ &\Rightarrow -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C \end{aligned}$$

مثال 3: انتیگرال $\int \frac{2x}{x+2} dx$ را دریابید.

حل 3:

$$\int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

مثال 4: انتیگرال $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$ را دریابید.

حل 4:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{cases} x = -1, u = 2x \Rightarrow u = 2(-1) = -2 \\ x = 1, u = 2x \Rightarrow u = 2(1) = 2 \end{cases}$$