

راهنمایی آموزشی ریاضی صنف یازدهم – دوره یازدهم

آنچه قرار است درین بخش بیاموزیم

دیترمنانت

- محاسبه دیترمنانت 2 در 2
- محاسبه دیترمنانت 3 در 3
- خواص دیترمنانت
- مترکس الحاقی یک متریکس

حل معادلات

- سیستم حل معادلات خطی با استفاده از معکوس متریکس
- حل سیستم معادلات خطی به طریق کرامر
- حل سیستم معادلات خطی به طریق حذفی

اهداف آموزشی: در ختم این بخش شاگردان قادر گردند تا:

- ❖ دیترمنانت را تعریف بتوانند.
- ❖ دیترمنانت متریکس های 2×2 را دریافت کرده بتوانند.
- ❖ دیترمنانت متریکس های 3×3 را دریافت کرده بتوانند.
- ❖ خواص دیترمنانت را بدانند.
- ❖ مترکس متوصله یک مترکس را تعریف و دریافت بتوانند.
- ❖ معادلات خطی را به روش های مختلف حل بتوانند.
- ❖ مثال های مربوط به درس را واضح تشریح و بیان بتوانند.

دیترمنانت

اگر یک متریکس به یک عدد حقیقی نسبت داده شود بنام دیترمنانت یاد می شود.

دیترمنانت مترکس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را به یکی از اشکال $|A|$ ، $DetA$ ، یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نشان داده می شود.

نکته: تنها متریکس های مربعی دارای دیترمنانت اند نه تمام مترکس ها

محاسبه دیترمنانت مترکس های 2×2 دیترمنانت مترکس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ قرار ذیل تعریف می گردد.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow DetA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: دیترمنانت مترکس $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ را دریافت نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - (-16) = 28 + 16 = 44$$

محاسبه دیترمنانت مترکس های 3×3 برای محاسبه دیترمنانت مترکس های 3×3 دو روش وجود دارد (روش ساروس و روش ماینور-کوفکتور)

الف) روش ساروس: درین روش دو سطر متریکس را در قسمت پائین کاپی می کنیم یا دو ستون متریکس را در قسمت راست کاپی می کنیم.

مثال: دیترمنانت متریکس $B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ را دریافت کنید.

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow (14 + 48 + 15) - (-12 - 4 + 210) = -117$$

$$\Rightarrow |B| = -117$$

ب) روش ماینور – کوفکتور: درین روش یک عنصر یک سطر یا ستون را ماینور میگیریم و از عناصر خارج از سطر و ستون عنصر گرفته شده یک مترکس 2×2 تشکیل داده و از آن دیترمنانت می گیریم و داریم که.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

- هرگاه در یک دیترمنانت جای دو سطر یا ستون متوالی و غیر متوالی را با یکدیگر تبدیل کنیم علامت دیترمنانت تغییر می کند.

مثال:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Rightarrow |A| = -|B|$$

معکوس ضربی متریکیس های 2×2

تعریف: متریکیس مربعی $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را در نظر گرفته، اگر متریکیس مربعی B وجود داشته باشد؛ طوری که $AB = BA = I$ گردد، درین صورت B را معکوس ضربی متریکیس A گویند و آنرا به شکل A^{-1} نشان م دهد.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

نکته 1:

متریکیس منفرد (*singular*): اگر دیترمنانت متریکیس صفر گردد متریکیس را منفرد می نامند.

متریکیس منظم/غیر منفرد (*non - singular*): عبارت از متریکیس است که دیترمنانت آن خلاف صفر باشد.

نکته 2:

یک متریکیس زمانی معکوس پذیر اند که:

✓ مربعی باشد

✓ دیترمنانت آن خلاف صفر باشد (متریکیس غیر منفرد باشد)

مثال: نشان دهید که $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ معکوس یک دیگر اند.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{pmatrix}$$

$$(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$\text{مثال: دیترمنانت متریکیس } B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \text{ را به روش ماینور کوفکتور دریافت کنید.}$$

کنید.

حل:

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (12 + 3)4 - (4 + 15)(-1) + (2 - 30)7$$

$$= 15 \cdot 4 + 19 + (-28) \cdot 7 = 60 + 19 - 196$$

$$= -17$$

$$\Rightarrow |B| = -117$$

خواص دیترمنانت

- هرگاه تمام عناصر یک سطر یا ستون یک متریکیس صفرها باشند، دیترمنانت آن برابر با صفر است.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 8 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow |A| = 0$$

- هرگاه دو سطر یا دو ستون متریکیس یکسان یا متناسب باشند، دیترمنانت آن متریکیس برابر با صفر است.

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow |B| = 0$$

- اگر عناصر یک متریکیس مضرب یک سطر یا ستون متریکیس دیگر باشند، دیترمنانت آن برابر با صفر است.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \beta a & \beta b & \beta c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow |A| = 0$$

- دیترمنانت $|A|$ و $|A^T|$ باهم مساوی اند.

$$|A| = |A^T|$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} + \frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل سیستم معادلات خطی

▪ حل سیستم معادلات خطی با استفاده از معکوس متریكس

سیستم معادلات خطی $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ را در نظر می گیریم و سه متریكس را از آن قرار ذیل جدا می کنیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

درین صورت متریكس معکوس متریكس های فوق قرار ذیل دریافت می گردد.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = IX = X$$

مثال: سیستم معادلات دو مجهوله $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ را با استفاده از معکوس متریكس حل نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از معکوس متریكس داریم که

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 14 \\ -5 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

متریكس الحاقی (متوصله) یک متریكس:

برای دریافت متریكس الحاقی متریكس های 2×2 مرتبه و جاهای سطر و ستون قطر اصلی را تغییر داده و عناصر قطر فرعی را تغییر علامه می دهیم.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

نکته:

برای دریافت معکوس متریكس یکی بر دیترمنانت همان متریكس را با متریكس الحاقی آن ضرب می کنیم.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA \quad : \quad |A| \neq 0$$

مثال: معکوس ضربی متریكس $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ را دریافت نمائید.

حل:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 10 = -8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = 87$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{87}{-29} = -3$$

▪ حل سیستم معادلات خطی به روش حذفی

درین روش با استفاده از تغییرات در سطرها و ستون های متریक्स ضرایب و ثابت ها تحت عملیه های اساسی چهار گانه، می توانیم قیمت مجهول را دریافت نماییم.

درین روش ضریب یک یا دو مجهول را به صفر می رسانیم تا قیمت یک مجهول پیدا شود، و بعدا با استفاده از آن سایر مجهول ها دریافت می شود.

مثال 1: سیستم معادلات خطی $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ را توسط طریقه حذفی حل نمائید.

حل 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 1 & 3 & : & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{نویسی}]{R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 0 & -1 & : & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2(-1) \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 0 & 1 & : & 2 \end{pmatrix} = > y = 2$$

$$x + 2y = 5 \Rightarrow x + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow x = 1$$

مثال 2: سیستم معادلات خطی $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$ را به روش حذفی حل نمائید.

حل 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 3 & 1 & 2 & : & 11 \\ 4 & -2 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_1 + 2R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 0 & -7 & 7 & : & 7 \\ 4 & -2 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

▪ حل سیستم معادلات خطی به روش کرامر

درین روش یک متریक्स از ضرایب مجهول ها می سازیم و نام آن را A می گذاریم، یک متریक्स نظر به متحول x یک متریक्स نظر به متحول y و یک متریक्स نظر به متحول z می سازیم، در نهایت قیمت مجهول ها را دریافت می نمائیم.

مثلاً اگر $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$ یک سیستم معادلات خطی سه مجهوله درجه اول باشد، به روش کرامر آنرا می توان قرار ذیل حل نمود.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : |A| \neq 0$$

مقادیر x ، y و z قرار ذیل دریافت می شود.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

مثال: سیستم معادلات خطی $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases}$ را به روش کرامر حل نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -58$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -58$$

$$\xrightarrow{-2R_1+R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 0 & -7 & 7 & : & 7 \\ 0 & -8 & 3 & : & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-8R_2+7R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 0 & -7 & 7 & : & 7 \\ 0 & 0 & -35 & : & -105 \end{pmatrix}$$

$$-35z = -105 \Rightarrow z = \frac{105}{35} \Rightarrow z = 3$$

$$-7y + 7z = 7 \Rightarrow -7y + 7(3) = 7$$

$$-7y = -14 \Rightarrow y = \frac{14}{7} \Rightarrow y = 2$$

$$x = 1$$

فعالیت ها:

✚ دیترمنانت را تعریف نمائید.

✚ انواع دیترمنانت را شماره وار بنویسید.

✚ سیستم معادلات خطی به چند روش حل می شود.

$$\text{✚ سیستم معادلات } \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 5x + 4y + z = 0 \\ 2x - 3y - 7z = 5 \end{cases} \text{ را به روش های حذفی و کرامر حل}$$

نمائید.

✚ متریکس الحاقی چیست؟ و چه نقشی در تعیین متریکس معکوس یک متریکس دارد؟