

راهنمایی آموزشی ریاضی تسریعی الف - دوره دوازدهم

اهداف آموزشی

در پایان این دوره، شاگردان باید قادر باشند:

1. مفهوم تناظر و انواع آن (محوری و مرکزی) را تعریف و تصویر یک نقطه یا شکل را رسم نمایند.
2. خواص و ویژگی‌های مثلث متساوی الساقین را بیان و برای یافتن زاویه یا ضلع مجهول استفاده کنند.
3. قضیه فیثاغورس و معکوس آن را تشخیص، اثبات و در حل مسائل هندسی و عددی به کار ببرند.
4. روابط خاص در مثلث‌های قائم‌الزاویه با زوایای 30° و 60° را بشناسند و در محاسبه اضلاع استفاده کنند.
5. مفهوم ناصف زاویه را درک کرده و از آن برای تحلیل و تقسیم متناسب ضلع مقابل استفاده نمایند.

راهنمای آموزش مفاهیم هندسی

موضوعات شامل: تناظر، تناظر محوری، تناظر مرکزی، مثلث متساوی الساقین، قضیه فیثاغورس، معکوس قضیه فیثاغورس، مثلث قائم‌الزاویه (ویژه زوایای 30° و 60°)، ناصف زاویه

۱. تناظر (Correspondence)

تعریف مفهومی:

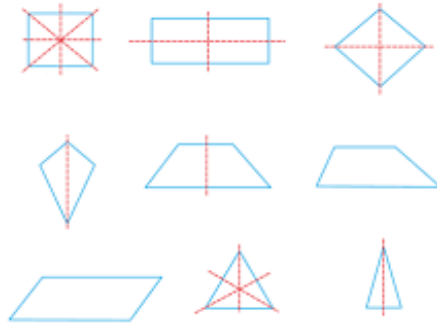
تناظر به معنی ارتباط منظم و مشخص میان نقاط دو شکل است، طوری که هر نقطه در شکل اول با یک نقطه در شکل دوم مطابق باشد.

الف. تناظر محوری (Axial Symmetry)

تعریف:

در تناظر محوری، تصویر یک نقطه نسبت به یک خط (محور) به گونه‌ای ساخته می‌شود که فاصله دو نقطه از خط برابر و این خط عمود بر خط وصل‌کننده آن‌ها باشد.

فرمول:



اگر نقطه $A(x, y)$ باشد و محور تقارن خط عمودی $x = a$ ، تصویر نقطه:

$$A'(2a - x, y)$$

اگر محور افقی باشد: $y = b$

$$A'(x, 2b - y)$$

تمرین:

1. تصویر نقطه $(3, 5)$ نسبت به محور $x = 4$ را پیدا کنید.
2. تصویر مثلثی با رأس‌های مشخص را نسبت به محور افقی رسم کنید.

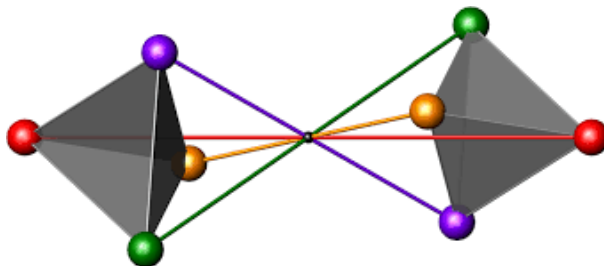
فعالیت:

رسم شکل و تصویر آن با آینه‌ی کوچک یا کاغذ شفاف. مقایسه‌ی زاویه‌ها و فاصله‌ها.

ب. تناظر مرکزی (Central Symmetry)

تعریف:

در تناظر مرکزی، تصویر هر نقطه نسبت به یک نقطه معین (مرکز تقارن) ساخته می‌شود، طوری که مرکز در وسط دو نقطه باشد.



فرمول:

اگر نقطه $A(x, y)$ و مرکز تقارن $O(a, b)$ باشد:

$$A'(2a - x, 2b - y)$$

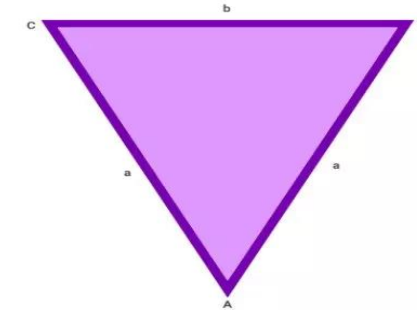
تمرین:

1. تصویر نقطه $(2, 3)$ نسبت به نقطه‌ی مرکز تقارن $(4, 5)$ را محاسبه کنید.
2. تصویر یک چندضلعی نسبت به مرکز رسم شود.

۲. مثلث متساوی الساقین (Isosceles Triangle)

تعریف مفهومی:

مثلثی است که در آن دو ضلع با هم مساوی باشند. این مساوات باعث می‌شود زوایای مقابل این دو ضلع نیز مساوی باشند.



روابط مهم:

اگر $AB = AC$ ، آنگاه:

$$\angle B = \angle C$$

و برعکس، اگر $\angle B = \angle C$ ، آنگاه:

$$AB = AC$$

تمرین:

1. رسم مثلث با دو ضلع مساوی و محاسبه زوایای آن.

2. اگر دو زاویه مساوی داده شود، آیا مثلث متساوی الساقین است؟

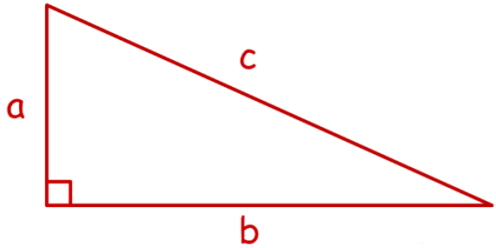
فعالیت:

با تا کردن کاغذ یک مثلث متساوی الساقین بسازید و ناصف، ارتفاع و میانه را مقایسه کنید.

۳. قضیه فیثاغورس (Pythagorean Theorem)

تعریف مفهومی:

در یک مثلث قائم الزاویه، مربع طول وتر مساوی با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر است.



فرمول:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

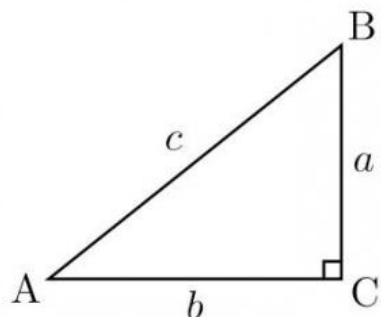
که در آن c وتر) ضلع روبه‌روی زاویه قائمه (و a, b اضلاع دیگر اند.

تمرین:

1. اگر $a = 6$ و $b = 8$ ، مقدار c را پیدا کنید.
2. آیا اضلاع 7, 24, 25 می‌توانند مثلث قائم الزاویه بسازند؟

فعالیت:

با استفاده از گچ یا نوار در حویلی سه ضلعی‌های مختلف ساخته و فیثاغورس را بررسی کنید.



روابط:

- ضلع مقابل زاویه 30° برابر با نصف وتر است.

$$a = \frac{1}{2}c$$

- ضلع مقابل زاویه 60° برابر است با:

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

تمرین:

اگر وتر $c = 10$ ، ضلع مقابل زاویه 30° و 60° را پیدا کنید.

فعالیت:

با استفاده از پرگار و نقاله مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ درجه رسم کرده و طول اضلاع را اندازه بگیرید و روابط را بررسی کنید.

۶. ناصف زاویه (Angle Bisector)

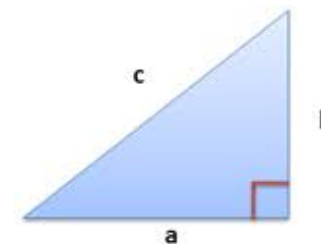
تعریف مفهومی:

ناصف زاویه پاره‌خطی است که یک زاویه را به دو زاویه مساوی تقسیم می‌کند و از رأس آن به ضلع مقابل کشیده می‌شود.

۴. معکوس قضیه فیثاغورس

تعریف مفهومی:

اگر در یک مثلث، مربع بزرگ‌ترین ضلع برابر مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.



فرمول:

اگر $c^2 = a^2 + b^2$ مثلث قائم‌الزاویه است.

تمرین:

بررسی کنید که آیا مثلث‌هایی با اضلاع ۵، ۱۲ و ۱۳ یا ۹، ۴۰، ۴۱ قائم هستند.

فعالیت:

نوشتن ۵ مجموعه از اعداد که بتوان با آن‌ها مثلث قائم ساخت.

۵. مثلث قائم با زوایای 30° و 60° درجه

تعریف مفهومی:

در مثلث قائم که یک زاویه اش 30° درجه و دیگری 60° درجه باشد، روابط خاصی میان اضلاع وجود دارد.

موضوع	فرمول یا رابطه مهم	تعریف مفهومی کوتاه
فیثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2$	در مثلث قائم: وتر مربع = جمع مربع‌های اضلاع
معکوس فیثاغورس	$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow$ قائم	اگر این تساوی برقرار باشد \rightarrow مثلث قائم است
مثلث ۹۰-۶۰-۳۰	$b = \frac{\sqrt{3}}{2}ca = \frac{1}{2}c$	روابط خاص بین اضلاع
ناصف زاویه	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$	تقسیم‌کننده زاویه به دو بخش مساوی

پیشنهاد ساختاری برای آموزش:

جلسه	موضوع	تمرین خانگی پیشنهادی	فعالیت در صنف
۱	تناظر مرکزی و محوری	تصویر نقاط و اشکال رسم شود	رسم با آینه یا شفاف کاغذ
۲	مثلث متساوی‌الساقین	حل چند مسئله از کتاب درسی	تا کردن کاغذ و اندازه‌گیری
۳	قضیه فیثاغورس	یافتن طول وتر در چند مثلث	مثال واقعی با متر یا خط‌کش
۴	معکوس فیثاغورس	تعیین نوع مثلث با استفاده از اضلاع	بررسی عددی چند سه‌تایی
۵	مثلث ۶۰ و ۳۰ درجه	محاسبه ضلع مجهول با داشتن وتر	رسم دقیق با نقاله
۶	ناصف زاویه	تحلیل تقسیم ضلع با نسبت	رسم دقیق با پرگار

مثال‌های آموزشی:

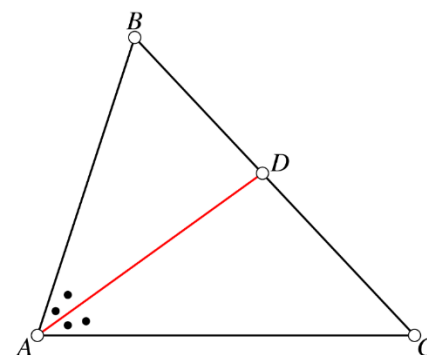
۱. تناظر محوری

مثال ۱

نقطه‌ای به مختصات $A(5,2)$ داریم. تصویر آن را نسبت به محور $x = 3$ پیدا کنید.

حل: فرمول:

$$A'(2a - x, y) = A'(2 \times 3 - 5, 2) = A'(1, 2)$$



رابطه نسبت:

اگر ناصف زاویه A ضلع مقابل BC را در نقطه D قطع کند:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

تمرین:

در مثلثی با $AB = 6$ ، $AC = 4$ ، اگر ناصف زاویه A ضلع BC را در نقطه D قطع کند، نسبت BD به DC را بیابید.

فعالیت:

ناصف زاویه را با پرگار رسم کرده و بررسی کنید آیا زاویه به دو بخش مساوی تقسیم شده است یا نه.

جدول خلاصه فرمول‌ها و مفاهیم

موضوع	فرمول یا رابطه مهم	تعریف مفهومی کوتاه
تناظر محوری	$A'(2a - x, y)$ یا $A'(x, 2b - y)$	قرینه‌ی شکل نسبت به یک خط
تناظر مرکزی	$A'(2a - x, 2b - y)$	قرینه‌ی شکل نسبت به یک نقطه
مثلث متساوی‌الساقین	$AB = AC \angle B = \angle C$	دو ضلع مساوی \rightarrow دو زاویه مساوی

مثال ۲: ✓

نقطه $B(4,6)$ را نسبت به محور افقی $y = 2$ قرینه کنید.

حل:

$$B'(x, 2b - y) = B'(4, 2 \times 2 - 6) = B'(4, -2)$$

۲. تناظر مرکزی

مثال ۱: ✓

مرکز تقارن $O(2,3)$ و نقطه $A(5,1)$ است. تصویر آن را بیابید.

حل:

$$A'(2 \times 2 - 5, 2 \times 3 - 1) = A'(-1, 5)$$

مثال ۲: ✓

مرکز تقارن $O(0,0)$ و نقطه $B(-3,7)$ باشد.

$$B'(2 \times 0 - (-3), 2 \times 0 - 7) = B'(3, -7)$$

۳. مثلث متساوی الساقین

مثال ۱: ✓

در مثلثی $AB = AC$ و $\angle B = 40^\circ$ اندازه $\angle C$ و $\angle A$ را بیابید.

حل:

$$\angle C = 40^\circ \Rightarrow \angle A = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$$

مثال ۲: ✓

در مثلثی $\angle B = \angle C = 65^\circ$ آیا مثلث متساوی الساقین است؟بله. چون دو زاویه مساوی اند، پس ضلع‌های مقابل آن‌ها نیز برابرند $AB = AC$:

۴. قضیه فیثاغورس

مثال ۱: ✓

در مثلثی $a = 9$ ، $b = 12$ طول وتر c را بیابید.

$$c = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$$

مثال ۲: ✓

مثلثی با $b = 7$ ، $c = 25$ ، a را بیابید:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576} = 24$$

۵. معکوس قضیه فیثاغورس

مثال ۱: ✓

آیا اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ می‌توانند یک مثلث قائم باشند؟

بررسی:

$$10^2 = 100, \quad 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow \text{است قائم}$$

مثال ۲: ✓

آیا اضلاع ۹، ۱۰، ۱۲ می‌توانند مثلث قائم باشند؟

بررسی:

$$12^2 = 144, \quad 9^2 + 10^2 = 81 + 100 = 181 \neq 144 \Rightarrow \text{نیست قائم}$$

۶. مثلث با زوایای ۳۰ و ۶۰ درجه

مثال ۱: ✓

وتر مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ برابر ۱۲ است. اضلاع دیگر را بیابید.

$$a = \frac{1}{2} \times 12 = 6, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$$

مثال ۲: ✓

در مثلث ۳۰-۶۰-۹۰ ضلع مقابل زاویه ۶۰ درجه برابر $8\sqrt{3}$ است. وتر را بیابید.

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} c \Rightarrow c = \frac{2b}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times 8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 16$$

۷. ناصف زاویه ✓

مثال ۱: ✓

در مثلثی $AB = 6$ ، $AC = 3$ ، ناصف زاویه A ضلع BC را در D قطع کرده. نسبت $BD:DC$ چیست؟

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow BD = 2 \times DC$$

مثال ۲: ✓

در مثلثی $AB = 5$ ، $AC = 10$ ، اگر ناصف زاویه A ضلع مقابل را به دو بخش تقسیم کند، نسبت آن‌ها چیست؟

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$