

حل 2:

$$\cos 180 = 4 \cos^3 60 - 3 \cos 60 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{8} - \frac{3}{2} = -1$$

مثال 3: قیمت $\tan 135$ را از جنس $\tan 45$ دریافت نمائید.

حل 3:

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan 45 - \tan^3 45}{1 - 3 \tan^2 45} = \frac{3 \cdot 1 - (1)^3}{1 - 3(1)^2} = \frac{3 - 1}{1 - 3 \cdot 1} = -1$$

فعالیت ها:

- تانجانت 90 را از جنس تانجانت 30 درجه دریافت نمائید.
- ساین 135 درجه را از جنس ساین 45 درجه دریافت نمائید.
- کوساین 270 درجه را از جنس کوساین 90 درجه دریافت نمائید.

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی زوایا به شکل حاصل ضرب

با استفاده از نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه فورمول های تحویل ضربی در مثلثات قرار ذیل دریافت می شود.

مجموع و تفاضل ساین های دو زاویه عبارت اند از:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

مجموع و تفاضل کوساین های دو زاویه عبارت اند از:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

مجموع و تفاضل تانجنت های دو زاویه قرار ذیل دریافت می گردد.

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

مثال: نشان دهید که $\frac{\sin 70 + \sin 30}{\cos 70 + \cos 30} = \tan 50$ است.

نسبت های مثلثاتی 2α از جنس α :

در بعضی موارد نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه از جنس همان زاویه ما را در حل مسایل مثلثاتی کمک می کند. بنا فورمول های آن را قرار ذیل مطالعه می نمائیم.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه 120 درجه را از جنس 60 درجه تعیین کنید.

حل:

$$\sin 120 = \sin 2 \cdot 60 = 2 \sin 60 \cos 60 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120 = \cos^2 60 - \sin^2 60 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120 = \tan 2 \cdot 60 = \frac{2 \tan 60}{1 - \tan^2 60} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$$

نسبت های مثلثاتی 3α از جنس نسبت های مثلثاتی α

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

مثال 1: $\sin 180$ را از جنس $\sin 60$ دریابید.

حل 1:

$$\sin 180 = 3 \sin 60 - 4 \sin^3 60 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$\sin 180 = 0$$

مثال 2: $\cos 180$ را از جنس $\cos 60$ دریافت نمائید.

حل:

$$\frac{\sin 70 + \sin 30}{\cos 70 + \cos 30} = \frac{2 \sin \frac{70+30}{2} \cos \frac{70-30}{2}}{2 \cos \frac{70+30}{2} \cos \frac{70-30}{2}} = \frac{2 \sin 50 \cos 20}{2 \cos 50 \cos 20} = \tan 50$$

تبدیل حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایا به مجموع و تفاضل

تبدیل حاصل ضرب به جمع و تفاضل را نیز می توان از رابطه عمومی نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه دریافت نمود. این روابط عبارت اند از.

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

مثال 1: نشان دهید که $\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$ است.

حل 1: با استفاده از فرمول های تحویل ضربی داریم که:

$$\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \frac{2 \sin \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \sin 5x}{2 \cos \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \cos 5x}$$

$$= \frac{2 \sin 5x \cos 3x + \sin 5x}{2 \cos 5x \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2 \cos 3x + 1)}{\cos 5x(2 \cos 3x + 1)} = \tan 5x$$

مثال 2:

$$\cos 75 - \cos 15 = -2 \sin \frac{75+15}{2} \sin \frac{75-15}{2} = -2 \sin 45 \sin 30 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

طول قوس

صفحه: 249

اگر اندازه یک قوس θ^0 و شعاع دایره R و طول قوس مقابل زاویه θ برابر با L و محیط دایره برابر با C باشد، پس داریم که.

$$\frac{L}{\theta^0} = \frac{C}{360} \Rightarrow \frac{L}{\theta^0} = \frac{2\pi R}{360} \Rightarrow \boxed{L = \pi R \frac{\theta^0}{180}}$$

مثال: طول قوس زاویه را که در مقابل زاویه مرکزی 45 درجه قرار دارد دریابید اگر شعاع دایره $14cm$ باشد.

حل: با استفاده از فرمول بالا قیمت ها را وضع می کنیم طول قوس دریافت می گردد.

$$L = \pi R \frac{\theta^0}{180} = \pi \cdot 14cm \frac{45}{180} = \frac{14}{4} \pi cm \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7} cm = 11cm$$

$$\boxed{L = 11cm}$$

قطاع دایره:

قسمت سطح دایره که توسط دو شعاع و یک قوس احاطه شده باشد را بنام قطاع دایره یاد می کند.

مساحت قطاع دایره از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

مثال: اگر شعاع یک دایره $10cm$ باشد مساحت قطاع دایره را دریابید در صورتی که $\theta = 90$ درجه باشد.

حل:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} (10cm)^2 \cdot 90 = 4500cm^2$$

یا از جنس رادیان داریم که

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} (10cm)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 25\pi cm^2$$

قطعه دایره:

قسمت از دایره که توسط یک وتر و یک قوس جدا گردد، بنام قطعه دایره یاد می گردد. و مساحت قطعه دایره از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

مثال: مساحت قطعه دایره را دریابید که $R = 12cm$ و اندازه قوس آن $\widehat{AB} = 60^0$ باشد.

حل:

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} (12cm)^2 (60 - \sin 60) = \frac{144cm^2}{2} (60 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$S_{\text{قطعه}} = 72(60 - \frac{\sqrt{3}}{2})cm^2$$