

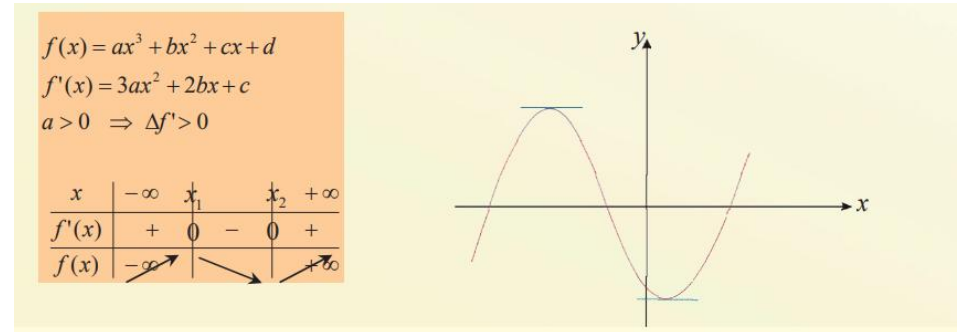
عنوان: گراف تابع یک مجهوله درجه سوم

اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان:

- گراف توابع درجه سوم را ترسیم کرده بتوانند.
- تحولات تابع درجه سوم را بررسی کرده بتوانند.
- قادر گردد تا سوالات مرتبط به موضوع را حل کند.
- قضیه رول را درست درک و مطابق آن مثال کار بتوانند.
- قضیه لاگرانژ را درک و با در نظر داشت آن مثال تطبیق بتوانند.
- قاعده هوبیتال را درست درک نموده و مطابق آن مثال کار کند.
- نقاط بحرانی توابع را تطبیق کرده بتوانند.

توابع درجه اول سه مجهوله عبارت از توابع اند که شکل $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را دارد. برای ترسیم گراف آن حالات ذیل را در نظر می گیریم.

1. اگر در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عدد $a > 0$ باشد، با گرفتن مشتق اول این تابع به یک تابع درجه دوم تبدیل می گردد، اگر در آن $\Delta f' > 0$ باشد، مشتق تابع دارای دو حل است. که از راست به چپ اول اعظمی و بعد اصغری دارد.



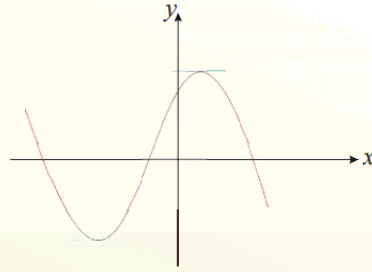
2. اگر در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عدد $a < 0$ باشد، با گرفتن مشتق اول، این تابع به یک تابع درجه دوم تبدیل می گردد، اگر $\Delta f' > 0$ باشد، معادله مشتق دارای دو حل است، که از راست به چپ یک اصغری و یک اعظمی دارد.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$a < 0 \Rightarrow \Delta f' > 0$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$



3. اگر منحنی تابع درجه سوم مختصات نسبی داشته باشد، مختصات نقطه انعطاف آن عبارت اند از

$$I(x_c, y_c) = \left(\frac{x_{max} + x_{min}}{2}, \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \right)$$

4. نقطه تناظر تابع درجه سوم عبارت اند از $x = -\frac{b}{3a}$.

مثال: تحولات تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2$ را تحقیق و گراف آنرا ترسیم کنید.

حل: ابتداء مشتق اول تابع را دریافت نموده نقاط اعظمی و اصغری تابع را تعیین می کنیم.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \text{اصغری}(0,0) \\ x = 2 & \rightarrow \text{اعظمی}(2,4) \end{cases}$$

برای دریافت نقاط انعطاف مشتق دوم را دریافت نموده مساوی به صفر قرار میدهم.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x \rightarrow f''(x) = -6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0 \Rightarrow -6x = -6 \Rightarrow x = 1 \rightarrow \text{انعطاف}(1,2)$$

اکنون با در نظر داشت موارد فوق و با در نظر گرفتن جدول تعیین اشاره گراف آنرا ترسیم می کنیم.

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0$$

$$48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$48 - 6x = 0$$

$$-6x = -48$$

$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$V'(0) = 0$$

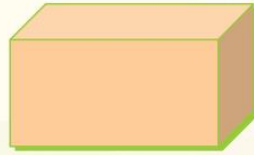
$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$$

$$= 1536 - 1024 = 512$$

$$V(8) = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$

$$V(12) = 0$$



بنابر آن بزرگترین حجم مکعب مستطیل 512 cm^3 است.

فعالیت ها

- قضیه رول را در تابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ در انتروال $(-2, 2)$ بررسی کنید.
- اگر مجموع دو عدد 200 شود آنرا طوری تعیین کنید که مجموع مربعات شان اصغری شود.
- نسبت متوسط بین حجم و مساحت کره را دریافت کنید.
- با استفاده از قاعده هوییتال لیمیت $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ را دریافت کنید.
- در مورد استفاده از بررسی نقاط بحرانی توابع در زندگی روزمره بنویسید.

مجموع ریمان

محاسبه سطوح نا منظم هندسی با استفاده از لیمیت را مجموعه ریمان می نامند، اگر بخواهیم مساحت سطح محصور شده توسط یک منحنی و چند قطعه خط را دریافت کنیم با استفاده از مجموع ریمان می توان به مساحت تقریبی آن رسید.

در مجموع ریمان مساحت تحت منحنی به چندین مستطیل کوچک تقسیم می شود و مساحت مذکور از مجموع مساحت های مستطیل های ذکر شده بدست می آید. به شکل ذیل توجه کنید.

حل 1: با وضع عامل تقرب بجای متحول دیده می شود که تابع شکل مبهم $\frac{0}{0}$ می گیرد، برای دریافت لیمیت و رفع شکل ابهام از صورت و مخرج همزمان مشتق می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin x \cos x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

مثال 2: لیمیت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1}$ را دریابید.

حل 2: با استفاده از قاعده هوییتال داریم که.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

تطبیق نقاط بحرانی

برای تطبیق نقاط بحرانی توابع مثال های ذیل را در نظر میگیریم.

مثال 1: دو عددی را دریابید که حاصل جمع شان 20 و حاصل ضرب شان بزرگترین قیمت ممکنه را داشته باشد.

حل 1: اگر عدد اولی x باشد پس عدد دومی $20 - x$ است، و حاصل ضرب آنها را به شکل تابع این طوری نویسیم $f(x) = x(20 - x)$ چون عدد x در انتروال $[0, 20]$ تحول می کند، بنا برین نقطه اعظمی مطلق تابع را در انتروال $[0, 20]$ بررسی می کنیم.

$$f(x) = x(20 - x)$$

$$f'(x) = 20 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$

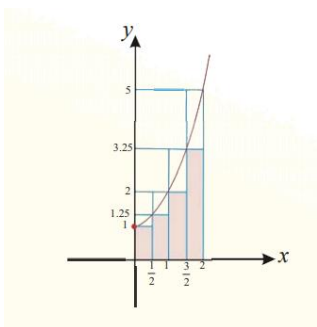
$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$

پس عدد 100 بزرگترین قیمت ممکنه است، و این اعداد عبارت از $x_1 = 10$ و $x_2 = 10$ می باشد.

مثال 2: یک مکعب مستطیل را قاعده آن مربع است در نظر بگیرید، اگر مجموعه سه بعدی آن 24 باشد، بزرگترین حجم مکعب مستطیل را دریافت کنید.

حل: اگر ضلع مکعب مستطیل x و ارتفاع آنرا y در نظر بگیریم. داریم که

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$



مجموع مساحت های مستطیل های پائینی مساوی است به:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} = 3,75$$

مجموع مساحت های مستطیل بالایی مساوی است به:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{2} = 5,75$$

در نتیجه مساحت سطح محصور شده فوق بین دو قیمت بالا قرار دارد. یعنی

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x < A < \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \Rightarrow \boxed{3,75 < A < 5,75}$$

مفهوم انتیگرال

انتیگرال عبارت از تابع است که مشتق آن معلوم باشد، یا به عبارت دیگر لیمیت مجموع ریمان را انتیگرال می نامند. یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \int f(x)dx \rightarrow \text{منغییر انتیگرال گیری}$$

تابع تحت انتیگرال علامه انتیگرال

انتیگرال ها به صورت عموم دو نوع اند (انتیگرال معین و انتیگرال غیرمعین)

• انتیگرال غیر معین

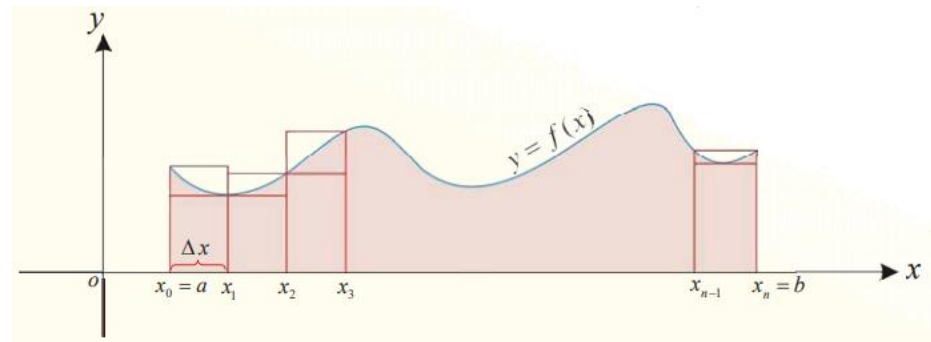
هرگاه تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ و $F(x)$ یک تابع اولیه از $f(x)$ باشد، ست توابع $F(x) + C$ را در حالیکه C یک عدد ثابت باشد بنام انتیگرال غیر معین $f(x)$ می نامند. یعنی

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

مثال 1: انتیگرال $\int x dx$ را محاسبه کنید.

حل 1:

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$$



نظر به شکل فوق، $\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$ را مجموع ریمان و اگر از آن لیمیت گرفته شود،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x \text{ را بنام لیمیت مجموع ریمان می نامند.}$$

مثال: با تقسیم نمودن انتروال $[0, 2]$ به چهار قسمت مساوی، مساحت بین منحنی $y = x^2 + 1$ و محور x را دریافت نمائید.

حل: در قدم اول عرض مستطیل ها را دریافت می کنیم

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

اکنون طول هر انتروال را محاسبه می کنیم.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2$$

قیمت ها را دریافت می کنیم، و با دریافت قیمت ها مساحت مستطیل های بالای و پائینی دریافت می شود، که مساحت تقریبی تحت تابع فوق و محور x بزرگتر از مجموع مساحت مستطیل های پائینی و کوچکتر از مجموع مساحت های مستطیل های بالای اند.

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(0) = 1 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.25$$

$$f(1) = 2 \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = 3.25$$

$$f(2) = 5$$

5. اگر یک ترادف از توابع تحت انتیگرال باشد، مانند فوق انتیگرال های آنها جدا جدا محاسبه می گردد.

$$\int (f_1 \pm f_2 \pm f_3 \pm \dots \pm f_n) dx = \int f_1 dx \pm \int f_2 dx \pm \int f_3 dx \pm \dots \pm \int f_n dx$$

6. انتیگرال حاصل ضرب دو تابع با حاصل ضرب انتیگرال های آنها برابر نیست.

$$\int (f(x) \cdot g(x)) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

7. انتیگرال حاصل تقسیم دو تابع با حاصل تقسیم انتیگرال های آنها برابر نیست.

$$\int \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) dx \neq \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}$$

فعالیت ها

- انتیگرال را تعریف کنید.
- مجموع چیست؟
- انتیگرال $\int 3x^3 dx$ را دریافت کنید.
- انتیگرال $\int (x^3 + 3x^2 - 4) dx$ را دریافت کنید.
- انتیگرال $\int x(x + 3) dx$ را دریافت نمایید.

مثال 2: انتیگرال $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$ را دریافت نمایید.

حل 2:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4} x^{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4} \sqrt[7]{x^4} + C$$

خواص انتیگرال غیر معین

1. انتیگرال یک عدد ثابت عبارت اند از.

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int 4 dx = 4x + C, \quad \int 8 dx = 8x + C$$

2. انتیگرال تابع توان دار اگر $n \neq -1$ باشد، پس داریم که

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C, \quad \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

3. اگر یک عدد ثابت به تابع تحت انتیگرال ضرب شود، آنرا می توان از انتیگرال بیرون در نظر گرفت.

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int 4f(x) dx = 4 \int f(x) dx$$

4. انتیگرال حاصل جمع و تفریق تو تابع برابر است با حاصل جمع و تفریق انتیگرال های آنها

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int (4x^2 - 7x) dx = \int 4x^2 dx - \int 7x dx = 4 \frac{x^3}{3} + C_1 - 7 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$= \frac{4}{3} x^3 - \frac{7}{2} x^2 + C$$