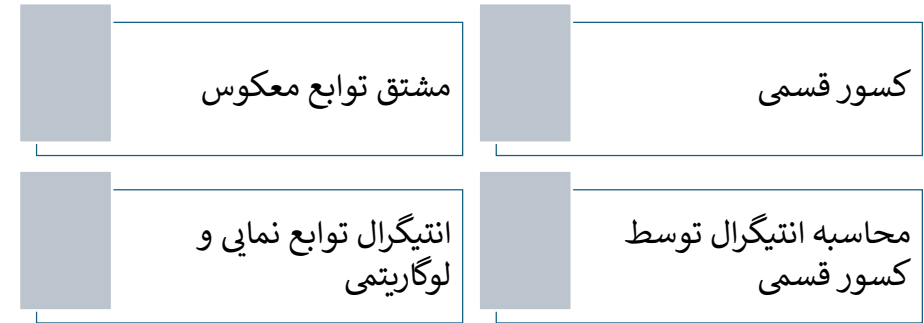


آنچه درین بخش فرا خواهیم گرفت



اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان قادر گردد تا: a

- مشتق توابع معکوس را بدانند و تعریف کرده بتوانند
- انتیگرال توابع نمایی و لوگاریتمی را دانسته و آنها را تعریف کرده بتوانند.
- کسور قسمی را بدانند و تعریف کرده بتوانند.
- انتیگرال ها را توسط کسور قسمی محاسبه کرده بتوانند.
- مثال های مربوط به موضوعات آتی را حل کرده بتوانند.

مشتق توابع معکوس

تعریف: هرگاه f و g دو تابع معکوس همدیگر باشند، یعنی $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ که تابع و خواص مشتق توابع ضمنی میتوانیم بنویسیم، که:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ x = g(y) \end{array} \right. \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: مشتق تابع $y = a^x$ را با استفاده از مشتق تابع معکوس آن بدست آرید.

حل:

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}} \log_e a = y \log_e a = a^x \ln a$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

A. مشتق تابع sin:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

B. مشتق معکوس تابع cos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

C. مشتق معکوس تانجانت:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

D. مشتق معکوس کوتانجانت:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{\sin^2 y}} = -\cos^2 y$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

مثال 1: مشتق تابع $y = (\arctan x)^5$ را بدست آرید.

حل 1:

$$y = (\arctan x)^5$$

$$y' = 5(\arctan x)^4 (\arctan x)' = 5(\arctan x)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

در رابطه فوق مخرج ها باهم برابر اند، پس صورت ها نیز باهم برابر اند. و داریم که.

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ A - 3B - 6C = -1 \\ -2A - 10B + 5C = -39 \end{cases}$$

رابطه فوق یک معادله سه مجهوله درجه یک است، بعد از حل آن داریم که

$$A = 2, \quad B = 3, \quad C = -1$$

حالت دوم

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک که بعضی از آنها تکرار گردیده باشد، یعنی عامل $(x - x_0)$ ، n - دفعه تکرار گردیده باشد.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$$

مثال: کسر واقعی $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ را به کسرهای قسمی آن تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \end{aligned}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = \log_5(\arctan x)$ را بدست آرید.

حل 2:

$$y = \log_5(\arctan x)$$

$$y' = [y = \log_5(\arctan x)]' = \frac{(\arctan x)'}{(\arctan x) \ln 5} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{(1+x^2)(\arctan x) \ln 5}$$

مثال 3: مشتق تابع $y = \arctan e^x$ را بدست آرید.

حل 3:

$$y' = [\arctan e^x]' = (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$y' = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

کسور قسمی

تعریف: کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته شده باشد، طوری که اگر آنها باهم جمع گردد کسر داده شده واقعی بدست آید کسور قسمی نامیده می شود.

برای تجزیه سک واقعی حالات ذیل وجود دارد.

حالت اول

هرگاه $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ پولینوم مخرج از عوامل ضربی تکرار نشده تشکیل گردیده باشد قرار ذیل تجزیه می گردد.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$

مثال: کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ را به کسور قسمی آن تجزیه نمائید.

حل: پولینوم مخرج را به عوامل ضربی آنها تجزیه می کنیم.

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$$

یعنی

$$f(x) = a^x \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad : \quad (a \in \mathbb{R}^+ , a \neq 1)$$

مثال 1: انتیگرال $f(x) = 2^{x-3}$ را دریابید.

حل:

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{2^x}{2^3} dx = \int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

مثال 2: انتیگرال نمایی $\int 3^{x+1} dx$ را دریابید.

حل 2:

$$\int 3^{x+1} dx = \int 3 \cdot 3^x dx = 3 \int 3^x dx = 3 \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

انتیگرال توابع لوگاریتمی

میدانیم که لوگاریتم ها دو نوع اند، پس انتیگرال این توابع عبارت اند از.

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال 1: انتیگرال $\int \ln 3x dx$ را بدست آورید.

حل 1:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx$$

$$= x \ln 3 + x \ln x - x + C = x(\ln 3x - 1) + C$$

مثال 2: انتیگرال $\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx$ را بدست آورید.

حل 2:

$$-2x - 3 = u \Rightarrow -2 = \frac{du}{dx} , dx = -\frac{1}{2} du$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-3B+C)x + (A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-3B+C=-6 \\ A+2B-2C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

حالت سوم

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده باشد، پس یک جز پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ است که شکل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ را دارد.

مثال: کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ را به کسرهای قسمی آن تجزیه نمائید.

حل:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x + 1) + C(x^2 + 2x + 4)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

$$= \frac{(A+C)x^2 + (A+B+2C)x + (B+4C)}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4}$$

$$\begin{cases} A+C=5 \\ A+B+2C=8 \\ B+4C=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

انتیگرال های توابع نمایی (اکسپوننشیال)

برای تابع نمایی $f(x) = e^x$ داریم که

$$f(x) = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$$

و برای تابع نمایی $f(x) = a^x$ داریم که:

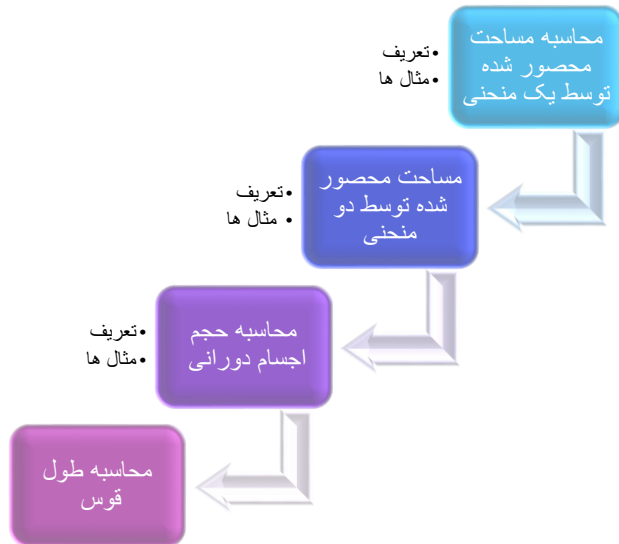
$$= -\ln|x-2| + 8\ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8$$

$$= \ln\left(\frac{(x-4)^8}{x-2}\right) + C$$

فعالیت ها

- انتیگرال $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx$ را محاسبه کنید.
- انتیگرال $\int 3 \log \frac{1}{x} dx$ را محاسبه کنید.
- انتیگرال $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$ محاسبه کنید.
- کسور قسمی چیست؟ با ذکر یک مثال بیان کنید.
- انتیگرال توابع نمایی را تشریح کنید.
- انتیگرال توابع لوگاریتمی را تشریح کنید.

آنچه قرار است درین بخش بخوانیم



اهداف آموزشی: در پایان این بخش شاگردان باید به نتایج ذیل دست یابند.

- ✓ محاسبه سطوح محصور شده توسط گراف منحنی ها را بدانند.
- ✓ مساحت محصور شده بین دو منحنی توابع را دریافت کرده بتوانند.
- ✓ حجم اجسام دورانی را با استفاده از انتیگرال معین دریافت کرده بتوانند.

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C$$

مثال 3: انتیگرال $\int \frac{2x}{x+2} dx$ را دریابید.

حل 3:

$$\int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

مثال 4: انتیگرال $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$ را دریابید.

حل 4:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{cases} x = -1, u = 2x \Rightarrow u = 2(-1) - 2 \\ x = 1, u = 2x \Rightarrow u = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3,627$$

محاسبه انتیگرال توسط کسور قسمی

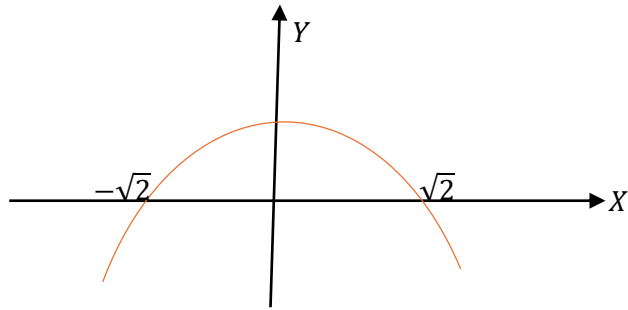
بعضی انتیگرال های وجود دارند که تابع تحت انتیگرال آنها یک کسر واقعی اند، پس برای محاسبه انتیگرال آنها از کسور قسمی استفاده می نمائیم.

مثال 1: انتیگرال $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ را دریافت نمائید.

حل 1: ابتداء تابع تحت انتیگرال را به کسور قسمی آن تجزیه می کنیم (روش تجزیه را در بخش تجزیه به کسور قسمی خواندیم).

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx = \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx$$

$$= -\int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx$$



مثال 2: گراف منحنی تابع $y = x^2 - 3x$ را رسم و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی مذکور و محور x در انتروال $[-1, 4]$ محاسبه کنید.

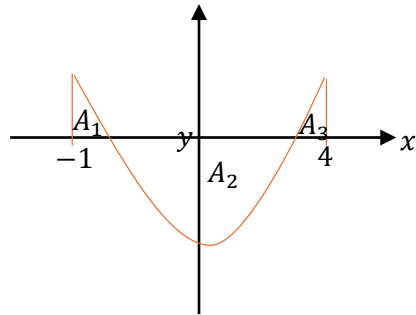
حل 2:

$$y = x^2 - 3x \Rightarrow y' = 2x - 3$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \quad \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right) \text{ نقطه بحرانی}$$



$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_3^4$$

بعد از وضع اندکس های بالای و پائین بجای متحول ها داریم که

- ✓ طول قوس را محاسبه کرده بتوانند.
- ✓ مثال های مربوط به درس را کار کرده بتوانند.

محاسبه مساحت محصور شده توسط یک منحنی

انتیگرال $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ مساحت سطحی را نشان می دهد که توسط منحنی تابع $y = f(x)$ و محور x در انتروال $[a, b]$ محصور شده است.

اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی و مثبت باشد، یعنی $y = f(x) \geq 0$ گردد درین حالت گراف تابع $f(x)$ همیشه در قسمت بالای محور x قرار دارد و مثبت و اگر $f(x) \leq 0$ باشد درین صورت گراف تابع همیشه در قسمت پائین x قرار دارد و منفی است.

مثال 1: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ و محور x را محاسبه نمائید.

حل 1: برای تعیین نمودن سطح محصور شده ابتداء نقطه بحرانی و تقاطع با محور x را به دست می آوریم.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ نقطه بحرانی}$$

$$y = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} = \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

نقاط تقاطع با محورات $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \left(\left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} \right)$$

$$A = 2 \left(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0 \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

نقاط تقاطع هر دو منحنی عبارت اند از $(1,1)$ و $(0,0)$ ، حالا مساحت محصور شده را میتوان قرار ذیل دریافت نمود.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2] dx = \int_0^1 [2x - x^2] dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}$$

مثال 2: مساحت محصور شده بین منحنی $f(x) = x^2 - 6x + 2$ و خط $g(x) = 2 - x$ را حساب کنید.

حل 2: اول نقاط تقاطع خط و منحنی را دریافت می کنیم.

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

$$g(x) = 2 - x$$

$$f(x) = g(x)$$

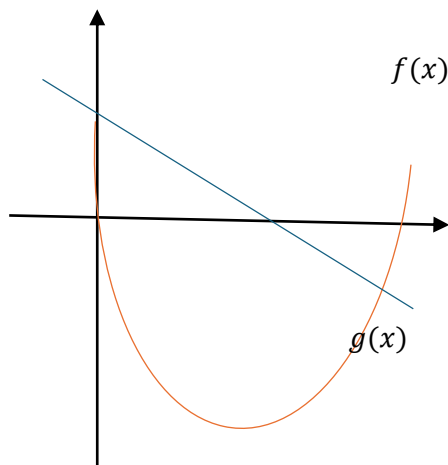
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 2 - x$$

$$x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0$$

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

نقاط تقاطع $(0,2)$ ، $(5,-3)$



از شکل معلوم می شود که گراف $g(x)$ بالای گراف $f(x)$ قرار دارد، پس داریم که:

از شکل معلوم می شود که گراف $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار دارد به این معنی که:

$$g(x) > f(x)$$

$$A = - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} 27 - \frac{3}{2} 9 \right) + \left(\frac{1}{3} 64 - \frac{3}{2} 16 \right) - \left(\frac{1}{3} 27 - \frac{3}{2} 9 \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{49}{6}}$$

محاسبه مساحت محصور شده توسط دو منحنی

برای محاسبه سطح محصور شده توسط دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ در صورتیکه $f(x) > g(x)$ باشد، یعنی گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار داشته باشد، پس ابتداء نقطه تقاطع هر دو منحنی را یافته بعداً مساحت بین منحنی با محور x را در انتروال $[a, b]$ محاسبه می کنیم.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

اگر $f(x) < g(x)$ باشد، یعنی گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار داشته باشد داریم که:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

مثال 1: مساحت سطح محصور شده بین منحنی های $f(x) = 2x - x^2$ و $g(x) = x^2$ را حساب کنید.

حل 1: در قدم نخست نقاط تقاطع هر دو منحنی را دریافت می کنیم، برای این کار معادلات هر دو منحنی را باهم برابر قرار میدهم.

$$f(x) = 2x - x^2, \quad g(x) = x^2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2$$

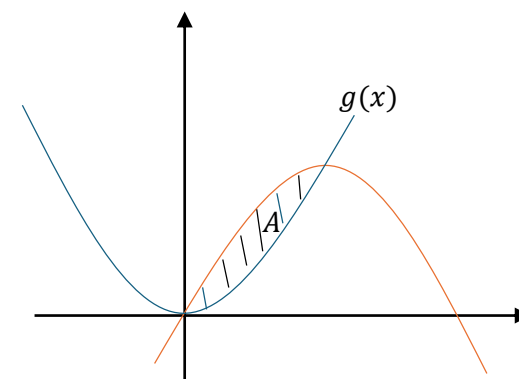
$$2x - x^2 - x^2 = 0$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1 - x) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$



$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{4}{3} \pi r^3}$$

2. حجم مخروط را توسط انتگرال دریافت نمائید.

چون سطح مخروطی از دوران خط $y = mx$ حول محور x بدست می آید، بنا برین:

$$V = \int_0^h \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi h}{3} (mh)^2 \xrightarrow{mh=r} \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{حجم مخروط}}$$

3. حجم بیضوی را با استفاده از انتگرال دریافت نمائید.

میدانیم که معادله نورمال بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ است و رابطه $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ نیز درست است و داریم که.

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx = 2\pi \int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx$$

$$= 2\pi \left[b^2 x - \frac{b^2 x^3}{a^2 \cdot 3} \right]_0^a = 2\pi \left[\left(b^2 a - \frac{b^2 a^3}{a^2 \cdot 3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left[b^2 a - \frac{b^2 a}{3} \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{2b^2 a}{3} \right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{4}{3} \pi a^2 b \quad \text{حجم بیضوی}}$$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx$$

$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + 5 \frac{25}{2} \right) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}$$

$$\boxed{A = \frac{125}{6}}$$

محاسبه احجام دورانی

در صنوف پائین تر ما حجم اجسام را با استفاده از فورمول های که بدون ثبوت آنها را قبول کرده بودیم حل می کردیم، اما در اینجا فورمول های حجم اجسام را با استفاده از انتگرال معین ثبوت می کنیم.

- هرگاه مساحت منحنی تابع متمادی $y = f(x)$ توسط خطوط $x = a$ و $x = b$ محصور شده باشد. پس حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی تابع فوق حول محور x به وجود می آید تقریباً استوانه بی شکل است که از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

- اگر مساحت منحنی $x = f(y)$ توسط خطوط $y = c$ و $y = d$ محصور شده باشد. مساحت مقطع چنین استوانه نظر به محور y ، πr^2 بوده، ارتفاع آن $\Delta y = d - c$ و شعاع آن $x = r$ است. حجم که از دوران این مساحت به دست می آید طور ذیل است.

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi x^2 dx = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

1. حجم کره را با استفاده از انتگرال محاسبه کنید.

ثبوت:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$$

$$V = \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^2} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3 - 1} \right] = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1)$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

❖ اگر معادله منحنی $x = f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ داده شده باشد با توجه به پارامترهای مانند y طول قوس منحنی را چنین محاسبه می‌کنیم.

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(x) + 1} dy$$

مثال: طول قوس منحنی $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $1 \leq x \leq 4$ محاسبه کنید.

حل:

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(x) + 1} dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} dy$$

مثال 1: حجم جسم را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y = x^2$ و خط $y = 1$ حول محور y به دست می‌آید حساب کنید.

حل:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \left[\frac{1}{2} \pi y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi \Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

مثال 2: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = x$ حول محور x به وجود می‌آید.

حل 2:

$$\begin{cases} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{cases} \Rightarrow y_2 > y_1$$

$$= \int_a^b [\pi(y_2^2 - y_1^2)] dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{2\pi}{15} \Rightarrow V = \frac{2\pi}{15}$$

محاسبه طول قوس

❖ اگر منحنی $y = f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ داده شده باشد با توجه به پارامتر مانند x طول قوس منحنی از رابطه ذیل دریافت می‌گردد.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

مثال: طول قوس منحنی $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0 \leq x \leq 4$ حساب کنید.

حل:

$$= \int_1^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^3} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{10^3} - \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 1\right)^3} \right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$

فعالیت ها

- مساحت محصور شده بین منحنی $y = \sin x$ و محور x در انتروال $[0, 2\pi]$ محصور شده دریافت کنید.
- مساحت محصور شده بین منحنی $y = x^2 + 3$ در انتروال $[-2, 4]$ را دریافت کنید.
- طول قوس منحنی $x = t^2$ و $y = t^3$ را در انتروال $1 \leq x \leq 2$ دریافت کنید.
- محیط دایره $x^2 + y^2 = r^2$ را دریافت نمایید.
- مساحت محصور شده بین منحنی ها $y = x^2$ و $y = -x^2 + 4x$ را دریابید.