

آنچه درین بخش قرار است بیاموزیم

توزیع تابع احتمال
آزمایش برنولی و توزیع دو جمله ای
توزیع احتمال پواسن
توزیع نورمال

اهداف آموزشی

در پایان درس شاگردان باید قادر گردد

- توزیع تابع احتمال را بدانند و تعریف کرده بتوانند.
- آزمایش برنولی را انجام داده بتوانند.
- توزیع احتمال پواسن را تعریف کرده بتوانند.
- توزیع نورمال را بدانند.
- مثال های مربوط به موضوعات فوق را حل کرده بتوانند.

توزیع تابع احتمال

توزیع تابع احتمال که در احصائیه و احتمالات مورد بحث قرار می گیرد عبارت از تابع است که ناحیه اعریف آن فضای نمونه و ناحیه قیمت های آن اعداد حقیقی است.

- اگر $P(X = x_i) = f(x_i)$ داشته باشیم در این صورت جوهره های مرتب $[x_1, f(x_1)][x_2, f(x_2)][x_3, f(x_3)] \dots [x_n, f(x_n)]$ تابع احتمال مجزا یا گسسته می گویند.
- تابع احتمال پیوسته و تجمی را می توان به شکل $F(x) = P(X \leq x)$ ارائه نمود.

○ اگر $f(x)$ تابع احتمال و x متحول تصادفی باشد، درین صورت احتمال اینکه x بین k_1 و k_2 قرار گیرد برابر است با

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

○ اگر x متحول تصادفی پیوسته و $k_1 < k_2$ باشد درین صورت:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

○ اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت اوسط یک متحول تصادفی x که به $E(x)$ نشان داده می شود برابر است به:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ اوسط x نامیده می شود که آنرا به \bar{x} نشان می دهیم و همچنان اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت وریانس x که به شکل S^2 نشان داده می شود مساوی است به

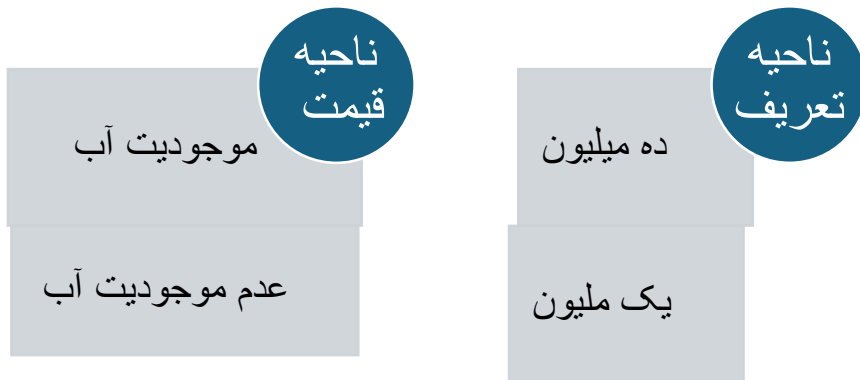
$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: یک شرکت شخصی می خواهد یک چاه آب را بالای یک تپه حفر نماید، مصرف چاه آب یک میلیون افغانی تمام می شود. اگر چاه حفر شده آب بدهد، صاحب شرکت ده میلیون افغانی مزد میگیرد در غیر این صورت یک میلیون افغانی ضرر می کند.

الف) این موضوع را به صورت یک تابع ارائه کنید.

ب) اگر احتمال اینکه چاه حفر شده آب بدهد 0,2 و احتمال عدم آب 0,8 باشد، درین صورت تابع احتمال، اوسط، وریانس و انحراف معیاری متحول تصادفی x را دریافت کنید.

حل الف) توزیع تابع احتمال



حل ب) سایر جزئیات را در جدول زیر قرار ذیل می نویسیم.

متحول تصادفی	تابع احتمال	اوسط	انحراف مربعات متحول	وریانس	انحراف معیاری
--------------	-------------	------	---------------------	--------	---------------

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859 \Rightarrow \boxed{P = 0.1859}$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i \cdot (0.6)^{15-i}$$

$$= 3^{15} \cdot (0.4)^3 \cdot (0.6)^{15-3} + 4^{15} \cdot (0.4)^4 \cdot (0.6)^{15-4}$$

$$= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512)$$

$$= \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} = 0.063365 + 0.012650$$

$$\boxed{P(3 \leq m \leq 4) = 0.076015}$$

توزیع احتمال پواسن

فورمول پواسن برای محاسبه تقریبی احتمال m اشکال در n آزمایش عبارت اند از.

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

که در آن $\lambda = np$ و $e = 2.71828$

در توزیع پواسن اوسط برابر با واریانس و مساوی به λ است.

مثال: به تعداد 200 نفر مسافر تکت طیاره را گرفته اند. اگر احتمال نیامدن مسافری که تکت گرفته طبق تجارب 0.01 باشد، احتمال اینکه 3 نفر مسافر نیاید چقدر است؟

حل: در این مسئله (نیامدن) کامیابی است و همچنان مشاهده می شود که $n = 200$ به اندازه کافی بزرگ بوده و $P = 0.01$ یعنی احتمال کامیابی به اندازه کافی کوچک است. بنابراین داریم:

$$\lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71829)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{7.3890461584} \cdot 8 = \frac{0.13533 \cdot 8}{6}$$

$$\Rightarrow P = 0.1804$$

در نتیجه احتمال نیامدن 3 مسافر 0.1804 است.

توزیع نورمال

منحنی های توزیع نورمال می توانند به چهار طریق با یک دیگر تفاوت داشته باشد. شکل ریاضی معادله توزیع نورمال که نشان دهنده تابع توزیع احتمال آن $f(x)$ اند، به صورت زیر نوشته می شود.

			تصادفی از اوسط خود		
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2 = 19.360$	

آزمایش برنولی و توزیع احتمال دو جمله ای

توزیع برنولی را می توان به صورت

$$P(X = m) = p^m (1 - p)^{1-m} = p^m \cdot q^{1-m}$$

نشان داد. در حالیکه P احتمال کامیابی و $q = 1 - p$ احتمال عدم کامیابی می باشد، هرگاه یک آزمایش را n بار تکرار کنیم یک ترادف بدست می آید طوریکه اگر احتمال کامیابی هر آزمایش P و احتمال ناکامی آن q باشد درین صورت احتمال m کامیابی در این n آزمایش عبارت اند از.

$$P(X \leq m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n$$

با درنظر داشت فورمول فوق می توان اوسط توزیع دو جمله ای را به صورت $\bar{x} = np$ و انحراف معیاری این توزیع را به صورت $S = \sqrt{npq}$ ائه نمود.

مثال: احتمال شفایافتن یک مریض از مرض شکر 0.4 است در صورتیکه 15 نفر به این مرض مصاب باشند، چقدر احتمال دارد که صرف 5 نفر شفا یابد و همچنان دریابید که از 3 الی 4 نفر آن شفا یابد.

حل:

$$n = 15 \quad m = 5 \quad p = 0.4 \quad q = 1 - p = 0.6$$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10}$$

$$= \frac{15!}{5!(15-5)!} \cdot 0.01024 \cdot 0.00604661 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

- ❖ توزیع بواسن چیست؟ فورمول آنرا ارائه کنید.
- ❖ توزیع نورمال چیست؟ گراف آن را ترسیم کنید.

آنچه درین بخش خواهیم آموخت

مساحت منحنی توزیع نورمال و استتدرد کردن آن
نمونه گیری
توزیع اوسط نمونه
قضیه لیمیت مرکزی
توزیع نمونه نسبت

اهداف آموزشی

شاگردان در ختم این بخش باید قادر گردند تا

- مساحت منحنی توزیع نورمال را دریافت کردن بتوانند.
- نمونه گیری را بدانند و مثال های مربوط به نمونه گیری را حل کرده بتوانند.
- توزیع اوسط نمونه را بدانند.
- قضیه لیمیت مرکزی را درک کنند و مثال های مربوطه را کار نمایند.
- توضیح نمونه نسبت.

مساحت منحنی توزیع نورمال و استتدرد کردن آن

برای محاسبه احتمال اینکه متحول تصادفی پیوسته x کمیت بین x_1 و x_2 را اختیار کند قاعدتاً باید تابع توزیع احتمال x انتیگرال گرفت و سطح زیر منحنی را در فاصله x_1 تا x_2 به صورت زیر محاسبه کرد.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$

گراف آن قرار ذیل ترسیم می گردد.

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

یا

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

درحالیکه

عدد ثابت $e = 2.718281828653 \dots$

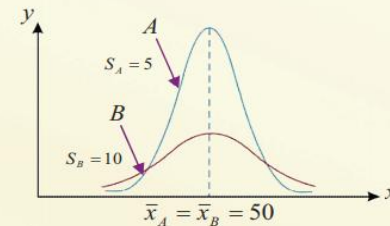
عدد ثابت $\pi = 3.141568 \dots$

\bar{x} = اوسط

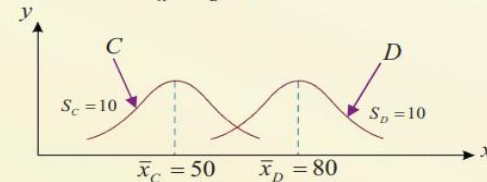
s = انحراف معیاری

و x مقادیر متحول تصادفی پیوسته و $f(x)$ ارتفاع منحنی را نشان می دهد.

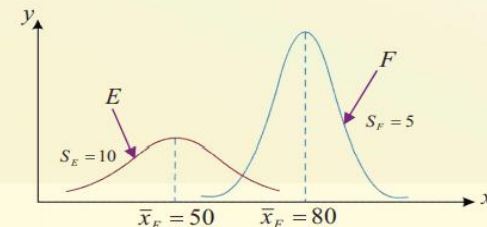
چند توزیع نورمال با اوسط و انحراف معیار مختلف مانند اشکال زیر داده شده است:



شکل الف



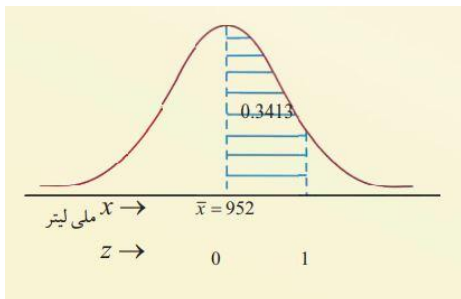
شکل ب



شکل ج

فعالیت ها

- ❖ توزیع تابع احتمال چیست؟ تعریف کنید.
- ❖ آزمایش برنولی و توزیع احتمال دو جمله بی را تعریف کنید.



$$= P(1) - P(0) = 0.3413 - 0$$

$$P(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$$

نمونه گیری

برای نمونه گیری روش های مختلف وجود دارد که در ذیل آن ها را می نویسیم.

- نمونه گیری تصادفی: عناصر جامعه همه برای انتخاب شدن هم چانس باشند.
- نمونه گیری سیستماتیک: عناصر جامعه به صورت منظم شماره گذاری شده باشند.
- نمونه گیری طبقه ای: جامعه به گروه های متجانس تقسیم شده باشند.
- نمونه گیری خوشه ای: جامعه خیلی بزرگ باشد، آنرا به خوشه های مختلف تقسیم و از هر خوشه نمونه ای را انتخاب می کنند.
- هر ویژگی عددی یک جامعه (اوسط و انحراف معیاری) را پارامتر جامعه می گویند.
- هر ویژگی عددی یک نمونه (اوسط و انحراف معیاری) را آمار می گویند.

مثال: فرض کنید قوطی دارای 5 گلوله سفید و 7 گلوله سیاه است. از داخل قوطی 5 گلوله را یک، یک و با جاگزینی (انتخاب دوباره یک عنصر مجاز باشد) انتخاب می کنیم. متحول تصادفی انتخاب شده را به زبان متحول تصادفی بیان کنید و توزیع مربوطه آن ها را بیابید.

حل:

سه متحول تصادفی x_1 ، x_2 و x_3 را در نظر بگیرید. متحول تصادفی x_1 عدد صفر را برای انتخاب گلوله

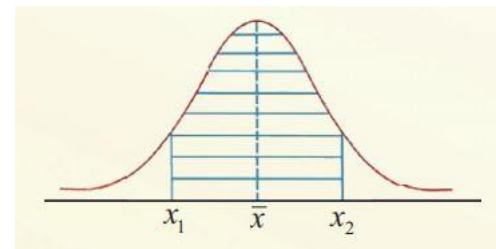
سیاه در مرحله اول و عدد یک را برای انتخاب گلوله سفید در مرحله اول، اختیار می کند، متحول x_2 نیز عدد صفر را برای انتخاب گلوله سیاه در مرحله دوم و عدد یک را برای انتخاب گلوله سفید در مرحله دوم اختیار می کند. همچنین متحول تصادفی x_3 نیز قرار فوق انتخاب می شود. درین صورت هر یک از متحول های تصادفی x_1 ، x_2 و x_3 یک متحول تصادفی برنولی است.

پارامتر $p = \frac{5}{12}$ را برای مقادیر $i = 1, 2, 3$ داریم $x_i = 0, 1$

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

چون نمونه گیری تصادفی است پس متحول تصادفی x_1 ، x_2 و x_3 مستقل از یک دیگر اند بنابراین تابع مربوطه عبارت اند از.

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_3)$$



متاسفانه محاسبه توزیع احتمال نورمال کار ساده نیست و برای محاسبه سطح زیر منحنی توزیع های نورمال ضرورت به جدول طولانی است که عملاً این کار مشکل است. و خوشبختانه می توان شکل تهیه جدول را به وسیله معیاری ساختن داتای احصائویی حل کرد.

بدین معنا که می توان قیمت های مربوط به متحول تصادفی x را که دارای توزیع نورمال است توسط رابطه زیر معیاری نمود.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

درینجا z بنام متحول معیاری نورمال و منحنی را بنام منحنی نورمال معیاری شده یا منحنی احتمال نورمال می نامند.

مثال: دستگاه پرکننده بوتل های نوشابه طوری تنظیم شده است که 952 میلی لیتر نوشابه را به داخل بوتل می ریزد. این میزان نوشابه دارای توزیع نورمال با اوسط 952 میلی لیتر و انحراف معیاری 4 لیتر است. احتمال اینکه بوتل بین 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه داشته باشد چقدر است؟

حل: ابتداء z را از جنس x دریافت می کنیم.

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ناحیه تعریف x از 952 تا 956 به ناحیه تعریف z از 0 تا 1 تبدیل می شود.

با استفاده از جدول (2) داریم که

$$P(0 \leq z \leq 1) = P(z_2) - P(z_1)$$

احتمال این است که بوتل حاوی 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه باشد یا به عبارت دیگر 34.13 فیصد بوتل های پر شده دارای 952 تا 956 میلی لیتر نوشابه باشد.

$$P(0 \leq z \leq 1) = P(z_2) - P(z_1)$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

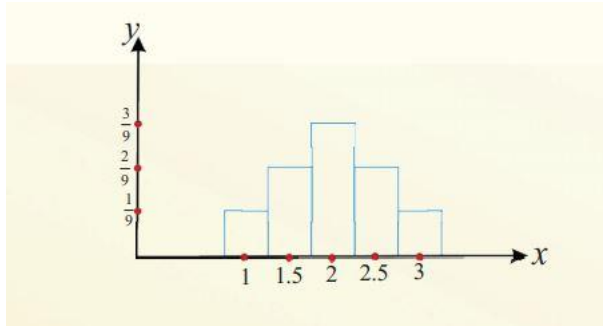
ج: جدول زیر تمام نمونه های دوتایی ممکن با جاگزینی و اوسط هر یک را نشان می دهد.

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,1)	(3,3)
\bar{x}	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

جدول توزیع کثرت \bar{x} به شکل زیر ارائه می شود.

\bar{x}	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

گراف مستطیلی \bar{x} قرار ذیل ترسیم می گردد.



$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x}f(\bar{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^2}{n} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

طوریکه دیده می شود:

قضیه لیمیت مرکزی

توزیع اوسط نمونه

اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه تابع احتمال $f(x)$ باشد در این صورت، توزیع احتمال نمونه تصادفی عبارت اند از.

x	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	\dots	$\frac{1}{n}$

اوسط متحول $\bar{x}_n = \mu$ ، $E(\bar{x}_n) = \mu$

وریانس متحول $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \delta^2$ ، $V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta^2$

وریانس نمونه $S_n^2 = \delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

اوسط وریانس نمونه $E(S^2) = \delta^2$

مثال: از جامعه زیر، تمام نمونه های تصادفی دو تایی ممکنه را با جای گزینی انتخاب می کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x = 1, 2, 3$$

الف: توزیع احتمال x را بنویسید.

ب: اوسط و وریانس جامعه را حساب کنید.

ج: جدول توزیع \bar{x} را تشکیل و گراف مستطیلی آن را رسم کنید.

د: $E(\bar{x})$ و $V(\bar{x})$ را حساب کنید.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^3 xf(x) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^3 x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$$

$$f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} p^{n\hat{P}} (1-p)^{n(1-\hat{P})} \quad \hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$$

اوسط و وریانس متحول تصادفی \hat{P} به این صورت است:

$$\mu_P = E(\hat{P}) = P \quad \text{اوسط}$$

$$\delta^2 \hat{P} = V(\hat{P}) = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

توزیع های نورمال معیاری عبارت اند از:

$$z = \frac{x - np}{n} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

مثال: احتمال مرغوب بودن کالای $P = 0,3$ است. یک نمونه تصادفی ساده $n = 6$ تایی را انتخاب می کنیم. اگر x نشان دهنده تعداد کالاهای ناقص باشد، توزیع احتمال x و \hat{P} را بنویسید.

حل:

متحول های تصادفی x دارای توزیع دو جمله بی با پارامترهای $n = 6$ و $P = 0.3$ می باشد.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \quad x = 0, 1, \dots, 6$$

با استفاده از جدول توزیع دو جمله بی احتمال های فوق را محاسبه و جدول توزیع احتمال را می نویسیم.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,1176	0,3025	0,3241	0,0595	0,0102	0,0007

متحول تصادفی \hat{P} قیمت های $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ و 1 را اختیار می کند.

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P\left(\hat{P} = \frac{1}{6}\right) = P(X = 1) = 0.3025$$

$$P\left(\hat{P} = \frac{x}{n}\right) = P(X = x)$$

و توزیع احتمال \hat{P} عبارت اند از:

اگر از یک جامعه بزرگ N با اوسط متناهی μ و وریانس متناهی δ^2 یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب کنیم در این صورت اوسط نمونه یعنی \bar{x} دارای توزیع تقریباً نورمال با اوسط $\mu_x = \mu$ و وریانس

$$\delta_x^2 = \frac{\delta^2}{n} \quad \text{و متحول تصادفی } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} \text{ دارای توزیع نورمال معیاری است. در حالیکه ضریب}$$

$$\frac{N - n}{N - 1}$$

برای قیمت های بزرگ N به عدد 1 نزدیک شود در حقیقت لیمیت وقتی که $n \rightarrow \infty$ مساوی به یک است.

مثال: نمرات مضمون شاگردان در یک صنف بزرگ دارای توزیع نورمال با اوسط 71 و انحراف معیاری 9 است. یک نمونه 9 تایی انتخاب می کنیم. احتمال این را که اوسط نمرات این نمونه بیشتر از 80 باشد حساب کنید. همچنان اگر یک شاگرد را به طور تصادفی انتخاب کنیم، درین صورت احتمال آن را که نمره او بیشتر از 80 باشد محاسبه کنید.

حل:

چون \bar{x} دارای توزیع نورمال با اوسط μ و انحراف معیاری می باشد داریم:

$$P(\bar{x} > 80) = P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9}\right) = P(z > 3)$$

$$= 1 - P(z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

$$P(\bar{x} > 80) = P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9}\right) = P(z > 1)$$

$$= 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

توزیع نمونه نسبت

اگر x متحول تصادفی، n مجموعه آزمایش های برنولی و P احتمال موفقیت هر آزمایش باشد در این صورت $\hat{P} = \frac{x}{n}$ آماره نسبت نمونه، $E(x) = np$ اوسط و $V(x) = npq$ وریانس متحول تصادفی x می باشند.

با توجه به توزیع دو جمله ای می توان توزیع \hat{P} را توسط فورمول:

\hat{P}	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

$$P(\hat{P} \leq 0.6) = P(x \leq 3.6) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^3 B(x, 6, 0.3) = 0.9294 \quad \text{در مثال بالا:}$$

$$P(\hat{P} \leq 0.27) = P(x \leq 1.62) = P(x \leq 1) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201 \quad \text{و یا}$$

فعالیت ها

- + مساحت منحنی توزیع نورمال چیست؟ و چگونه دریافت می گردد.
- + استاندارد سازی توزیع نورمال را تشریح کنید.
- + نمونه گیری چیست؟
- + توزیع اوسط نمونه چیست؟
- + قضیه لیمیت مرکزی را تشریح کنید.
- + توزیع نمونه نسبت چیست؟
- + مثال های مربوط به هریخش را کار کنید.