

انتگرال معین

تعریف: لیمیت مجموعه ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ وقتی که n به بی نهایت تقرب کند و بزرگترین طول انتروال های فرعی Δx به صفر نزدیک گردد به نام انتگرال معین تابع $f(x)$ یاد می گردد.

یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال: قیمت انتگرال $\int_1^3 x^2 dx$ را دریافت نمائید.

حل:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{27}{3} = 9$$

مثال 2: مساحت محصور شده توسط $y = x - 1$ و محور x در انتروال $[0, 3]$ دریابید.

حل 2:

$$\int_0^3 (x - 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3 \right] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

خواص انتگرال معین

1. انتگرال عدد ثابت $\int_a^b C dx$ عبارت اند از.

$$\int_a^b C dx = C \int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b - a)$$

مثال: انتگرال $\int_3^4 dx$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2. اگر $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ انتگرال پذیر و k یک عدد حقیقی ثابت باشد در آن صورت عدد ثابت بیرون انتگرال در نظر گرفته می شود.

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

مثال: انتگرال $\int_{-2}^2 4 dx$ را محاسبه نمائید.

حل:

$$\int_{-2}^2 4 dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4(2 - (-2)) = 4 \cdot 4 = 16$$

3. اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، درین صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

مثال:

$$\int_2^5 4x dx = - \int_5^2 4x dx$$

4. اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، درین صورت داریم که.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

مثال:

$$\int_4^4 2x^2 dx = 0 \quad \int_{-2}^{-2} (3x - 9) dx = 0$$

5. انتگرال حاصل جمع و تفریق توابع برابر است با حاصل جمع و تفریق انتگرال های آنها: یعنی

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

مثال:

$$\int_0^1 (4 + 3x^2) dx = \int_0^1 4 dx + \int_0^1 3x^2 dx = [4x]_0^1 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5$$

$$\int_0^3 (x^2 - 1) dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 - [x]_0^3 = 9 - 3 = 6$$

6. اگر تابع $f(x)$ در انتروال که در آن a و b و c است، انتیگرال پذیر باشد، داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

مثال: اگر انتیگرال $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ و $\int_0^8 f(x) dx = 12$ باشد قیمت $\int_8^{10} f(x) dx$ را دریابید.
حل:

$$\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx$$

$$17 = 12 + \int_8^{10} f(x) dx \Rightarrow \int_8^{10} f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7. اگر توابع $f(x) \leq g(x)$ در انتروال $[a, b]$ انتیگرال پذیر باشند در آن صوت داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

مثال:

$$2x - 4 \leq 4x^2 + 8 \Rightarrow \int_0^4 (2x - 4) dx \leq \int_0^4 (4x^2 + 8) dx$$

8. اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و m و M به ترتیب قیمت اصغری مطلق و اعظمی مطلق درین انتروال باشند، درین صورت داریم که.

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

مثال: انتیگرال $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ را دریابید.

حل: چون تابع $f(x) = e^{-x^2}$ در انتروال $[0, 1]$ متمادی است، و $M = f(0) = 1$ و $m = f(1) = \frac{1}{e}$ پس داریم که.

$$\frac{1}{e}(1 - 0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1 - 0)$$

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,3679$$

9. اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی باشد درین صورت یک عدد حقیقی c طوریکه $a < c < b$ وجود دارد:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

مثال: در انتیگرال $\int_1^4 x^2 dx$ مقدار c را دریافت نمائید.

حل:

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

$$\int_1^4 x^2 dx = f(c)(4 - 1) \Rightarrow \int_1^4 x^2 dx = c^2(4 - 1)$$

$$\Rightarrow 21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow \boxed{c = \pm\sqrt{7}}$$

10. قضایای اساسی مشتق و انتیگرال: مشتق و انتیگرال دو قضیه اساسی دارند.

❖ **قضیه اول اساسی مشتق و انتیگرال:**

اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و x درین انتروال شامل باشد، داریم که

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{چون تابعه } f(x) \text{ در انتروال } [a, b] \text{ مشتق پذیر است پس برای هر } x \in [a, b]$$

$$F'(x) = f(x),$$

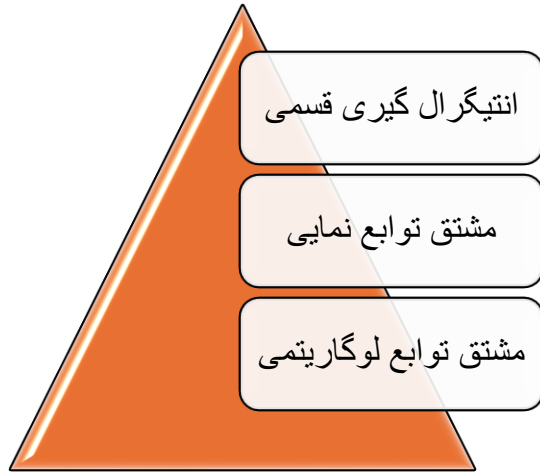
مثال: مشتق $\int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2+1} dt$ را دریابید.

حل:

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} 2x$$

قرار است موضوعات ذیل را درین بخش بیاموزیم



اهداف آموزشی: شاگردان درین درین بخش باید:

- قادر به دانستن فورمول های انتیگرال گیری قسمی گردد.
- قادر به حل مثال های انتیگرال گیری به روش قسمی گردد.
- مشتق توابع نمایی را دریافت بتوانند.
- مشتق توابع لوگاریتمی را دریافت بتوانند.

انتیگرال گیری به طریقه قسمی

تعریف:

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند، و رابطه $\int f(x)g(x)dx$ موجود باشد، با استفاده از روش قسمی می توان این نوع انتیگرال ها را حل نمود. اگر $f(x) = u$ و $g(x) = v$ تعویض نمائیم داریم که:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v$$

$$\int v' \cdot u dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

برای انتیگرال های معین نیز داریم که:

$$\int_a^b u dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v du$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

❖ قضیه دوم اساسی مشتق و انتیگرال:

اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی باشد درین صورت داریم که

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال: حاصل انتیگرال $\int_0^1 x^2 dx$ را دریابید.

حل:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

11. انتیگرال گیری به طریقه تعویضی:

برای بدست آوردن انتیگرال یک تابع که قابل تعویض به یک تابع کوچکتر باشد از روش تعویضی استفاده می نمائیم.

مثال: انتیگرال $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ را محاسبه نمائید.

حل:

$$u = 3 - 5x \Rightarrow du = -5dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{5} du$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{5} \left[-\frac{1}{u} \right]_{-2}^{-7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{7} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{14}$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}}$$

مثال 2: مشتق توابع $f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ را دریافت نمایید.

حل 2:

$$f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} (\log_a x^2 + 1 - \log_a x^2 - 1)$$

$$f'(x) = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} \right)' = \left(\frac{1}{2} (\log_a x^2 + 1 - \log_a x^2 - 1) \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \log_a e - \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} \log_a e \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{x^2 + 1} \log_a e - \frac{2x}{x^2 - 1} \log_a e \right]$$

$$= \frac{1}{2} 2x \log_a e \left[\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 - 1} \right] = \frac{-x}{x^4 - 1} \log_a e$$

تمرین: مشتق تابع $g(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ را دریافت نمایید.

مثال 3: مشتق تابع $y = e^{(x^2+1)}$ را دریافت نمایید.

حل 3: از تعویض $u = x^2 + 1$ استفاده می کنیم.

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)' \cdot e^u = 2x \cdot e^{(x^2+1)}$$

مثال 4: مشتق تابع $y = \sqrt[3]{2}$ را دریافت نمایید.

حل 4:

$$y = \sqrt[3]{2} \Rightarrow y = 2^{\frac{1}{3}}$$

مثال 1: انتیگرال نامعین $\int x \sin x dx$ را دریافت نمایید.

حل 1:

$$\begin{cases} u = x & , & du = dx \\ dv = \sin x & , & v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

مثال 2: انتیگرال $\int_0^1 -x e^x dx$ را حساب کنید.

حل 2:

$$\begin{cases} u = -x & , & du = -dx \Rightarrow -du = dx \\ dv = e^x dx & , & v = e^x \end{cases}$$

$$\int_a^b u dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_0^1 -x e^x dx = [-x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -1$$

مشتق توابع نمایی و لوگاریتمی

بصورت عموم اگر $f(x) = \ln x$ و $g(x) = a^x$ باشد، پس $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $g'(x) = a^x \ln a$ است.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = a^x \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a$$

قضیه:

1. اگر تابع $f(x) = \log_a x$ باشد درین صورت مشتق آن عبارت اند از.

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

2. اگر تابع $f(x) = \log_a g(x)$ باشد، مشتق آن عبارت اند از.

$$f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ را دریابید.

حل 1: $g(x) = x^2 + 1$ وضع می کنیم.

$$y' = \left(2^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 = \frac{-1}{x^2} 2^{\frac{1}{x}} \ln 2$$

مثال 5: مشتق تابع $y = \log_3(\log_2 x)$ را دریافت نمائید.

حل 5:

$$\begin{aligned} y = \log_3(\log_2 x) \Rightarrow y' &= \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \cdot \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2}}{\ln 3 \cdot \log_2 x} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \log_2 x} \\ &= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3 \cdot x \cdot \ln x} \end{aligned}$$

فعالیت ها

➤ مشتق توابع ذیل را دریافت نمائید.

- I. $f(x) = \ln \sqrt{3x^2 + 7}$
- II. $f(x) = \log_{10} 3x^2$
- III. $y = \frac{(x+2)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3 e^x}$
- IV. $y = x^x$
- V. $f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 5)$
- VI. $f(x) = \ln \sin 3x$

➤ مشتق توابع نمایی را تعریف نمائید.

➤ آیا توابع نمایی و لوگاریتمی معکوس یک دیگر اند؟

➤ فورمول های انتیگرال گیری قسمی را بنویسید.

➤ انتیگرال $\int x^5 \cos x^3 dx$ را دریافت نمائید.

➤ انتیگرال $\int x \cos 2x dx$ را دریافت نمائید.