

راهنمایی آموزشی ریاضی تسریعی ب - دوره دهم

❖ هدف کلی درس:

در این دوره شما با مفاهیم قانون سین ، کوساین ، تانجان و مطابقت های مثلثاتی آشنا خواهید شد. این مفاهیم به شما کمک می کند که اجزای نامعلوم مثلث را دریابید و همچنان شما را قادر می سازد که در مسایل نجومی و مسیریابی (Navigation) و مکانیک، برای تجزیه یا ترکیب قوه ها با زاویه بین آنها آشنا سازد.

❖ قانون سین:

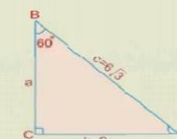
تعریف:

رابطه ای در مثلثات است که در هر مثلث (نه تنها قائم الزاویه) نسبت طول هر ضلع بر سین زاویه مقابل آن ضلع برابر است.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

جهت وضاحت بیشتر مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال 1: در مثلث قائم الزاویه زیر قیمت یک ضلع و دو زاویه آن را دریافت کنید. در صورتیکه قیمت یک زاویه و دو ضلع آن قرار زیر داده شده باشند.



$$\begin{aligned} B &= 60^\circ \\ b &= 9 \text{ cm} \\ c &= 6\sqrt{3} \text{ cm} \end{aligned}$$

حل: با در نظر داشت قانون سین می توان رابطه زیر را چنین نوشت:

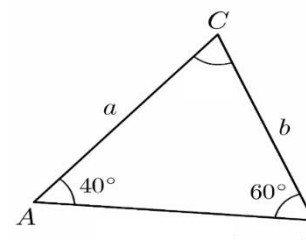
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{\sin C} = \frac{9}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3 \cdot 3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

چون: $\sin 90^\circ = 1$ است؛ پس: $C = 90^\circ$ است.

✚ فعالیت: در شکل زیر قیمت ضلع c و زاویه C را دریابید.



❖ شرایط استفاده:

- قابل استفاده در هر مثلث به ویژه در حالت زیر.
- دو زاویه و یک ضلع آن معلوم باشد (ASA)
- دو ضلع و یک زاویه آن معلوم باشد (SAS)

❖ کاربردها:

- پیدا کردن ضلع و زاویه نا معلوم
- حل مثلث های غیر قائمه
- محاسبه فاصله یا ارتفاع در مسایل عملی (نجوم ، فیزیک و نقشه برداری)

مثال

❖ قانون کوساین:

تعریف:

رابطه در مثلثات است که بین اضلاع و زاویه های یک مثلث دلخواه (نه تنها قائم الزاویه) برقرار است این قانون به ما کمک می کند که طول یک ضلع یا اندازه یک زاویه را به دست آوریم.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

مثال 1: در مثلث ABC اندازه سه ضلع آن قرار زیر داده شده است. اندازه زاویه A را تعیین کنید.



$$a = \sqrt{28}, \quad b = 4, \quad c = 6, \quad \hat{A} = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$(\sqrt{28})^2 = (4)^2 + (6)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos A$$

$$28 = 16 + 36 - 48 \cos A$$

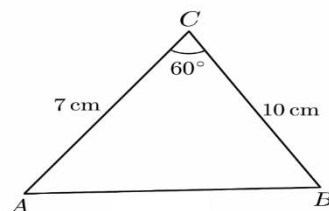
$$28 = 52 - 48 \cos A$$

$$48 \cos A = 52 - 28 \Rightarrow 48 \cos A = 24$$

$$\cos A = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{A} = 60^\circ$$

✚ فعالیت: در شکل زیر قیمت ضلع C را دریابید.



حل معادلات شکل $(a \sin x \cdot \cos x = C)$

1) $4 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin 60 \Rightarrow x = 60^\circ$$

2) $2 \sin 2x \frac{1}{2 \sec 2x} = 0$

$$\Rightarrow \sin 2x \cdot \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin^2 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

❖ حل معادلات که شکل $(a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d)$ را دارند: برای❖ حل نمودن این نوع معادلات اگر $a = d$ باشد تمام حدود معادله را تقسیم $\sin^2 x$ و اگر❖ $b = d$ باشد تمام حدود معادله تقسیم $\cos^2 x$ و اگر $a, b \neq d$ باشد اطراف معادله را❖ تقسیم $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ می نماییم.

❖ سیستم معادلات دو مجهوله مثلثاتی:

❖ حل معادلات درجه دوم که شکل $(a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d)$ را دارنددر معادله بالا a, b, c ضرایب مجهول ها و d عدد ثابت می باشد و برای حل نمودن این نوع معادلات اگر $a = d$ باشد تمام حدود معادله را تقسیم $\sin^2 x$ و اگر $b = d$ باشد تمام حدود معادله را تقسیم $\cos^2 x$ و اگر $a, b \neq d$ باشد اطراف معادله را تقسیم $\sin^2 x$ و $\cos^2 x$ می نماییم.

❖ مثال: معادله ذیل را حل کنید.

1) $3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 3$

$$\Rightarrow 3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 3 / \div \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{3 \sin^2 x}{\sin^2 x} + \frac{4 \cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sqrt{3} \sin x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{3}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow 3 + 4 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 3(\csc x) \Rightarrow 3 + 4 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 3(1 + \cot^2 x)$$

$$\Rightarrow 3 + 4 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 3 + 3 \cot^2 x \Rightarrow 4 \cot^2 x - 3 \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 0$$

$$\Rightarrow \cot^2 x - \sqrt{3} \cot x = 0 \Rightarrow \cot x (\cot x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\begin{cases} \Rightarrow \cot x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \cot x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \cot x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

❖ نوع اول: $\begin{cases} \sin x \mp \sin y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$ ، $\begin{cases} \cos x \mp \cos y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$

❖ شرط حل: $a^2 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \geq 0$

❖ برای حل نمودن این معادلات از فورمول های تبدیل جمع و تفاضل به ضرب استفاده می نماییم.

❖ نوع دوم: $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$ ، $\begin{cases} \cos x \cdot \cos y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$ ، $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$

❖ شرط حل: $-\cos^2 \frac{\theta}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\theta}{2}$

❖ برای حل نمودن این معادلات از فورمول های تبدیل ضرب به مجموع و تفاضل استفاده گردد.

❖ نوع سوم: $\begin{cases} \frac{\sin x}{\cos y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$ ، $\begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$ ، $\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$

❖ برای حل این نوع معادلات ابتداء از خواص تناسب و سپس از فورمول جمع و تفاضل به ضرب استفاده گردد.

❖ نوع چهارم: $\begin{cases} \tan x \mp \tan y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$

❖ شرط حل: $a^2 - 4 + 4a \cot \theta \geq 0$

❖ برای حل این نوع معادلات از رابطه $\tan(x \mp y)$ استفاده گردد.

❖ نوع پنجم: $\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$

❖ شرط حل: $-1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cos \theta \leq 1$

❖ برای حل این معادلات از فورمول تبدیل ضرب به مجموع و تفاضل استفاده گردد.

❖ نوع ششم: $\begin{cases} \frac{\tan x}{\tan y} = a \\ x \mp y = \theta \end{cases}$

❖ شرط حل: $-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \theta \leq 1$

❖ برای حل این نوع معادلات از خواص تناسب استفاده نموده سپس معادله را ساده می نماییم.

مثال : معادله ذیل را حل نمایید

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = 1 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = 1 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{-(\cos(x+y) - \cos 30)}{\cos(x+y) + \cos 30} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 30 - \cos(x+y)}{\cos 30 + \cos(x+y)} = 1 \Rightarrow \cos 30 - \cos(x+y) = \cos 30 + \cos(x+y)$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) + \cos(x+y) = 0 \Rightarrow 2\cos(x+y) = 0 \Rightarrow \cos(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos 90^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 30 \dots\dots (1) \\ x + y = 90 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$2x = 120 \Rightarrow x = 60 = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x + y = 90 \dots\dots (2)$$

$$\Rightarrow 60 + y = 90 \Rightarrow y = 30 = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$$

❖ مثال: معادله ذیل را حل نمائید.

$$1) \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} = \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow \tan\left(\frac{x-y}{2}\right) = \tan 75^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 75 \Rightarrow x-y = 150 \dots\dots (2)$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \dots\dots (1) \\ x - y = 150 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \dots\dots (1) \\ x - y = 150 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$2x = 240 \Rightarrow x = 120^\circ = 2n\pi + 120^\circ$$

$$x + y = 90 \dots\dots (1)$$

$$\Rightarrow 120 + y = 90 \Rightarrow y = -30^\circ = 2n\pi - 30^\circ$$

$$\begin{cases} \tan x = \frac{1}{3} \\ \tan y = 3 \\ x + y = 90 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{1-3}{1+3} \Rightarrow \frac{\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}}{\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}} = \frac{1-3}{1+3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = \frac{1-3}{1+3} \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin 90} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin(x-y) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x-y) = \sin 210 \Rightarrow x-y = 210 \dots\dots (2)$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \dots\dots (1) \\ x - y = 210 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \dots\dots (1) \\ x - y = 210 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$2x = 300 \Rightarrow x = 150$$

$$x - y = 90 \dots\dots (1)$$

$$\Rightarrow 150 - y = 90 \Rightarrow -y = -60 \Rightarrow y = 60$$

$$\begin{cases} \tan x + \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan(x+y) \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{1 - \tan x \tan y} \Rightarrow 1 - \tan x \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \frac{1}{\tan \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow 1 - \tan x \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 1 - \tan x \tan y = 0 \Rightarrow -\tan x \tan y = -1$$

$$\Rightarrow \tan x \tan y = 1 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\tan y}$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1}{\tan y} + \tan y = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{1 + \tan^2 y}{\tan y} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 3 + 3 \tan^2 y = 4\sqrt{3} \tan y \Rightarrow 3 \tan^2 y - 4\sqrt{3} \tan y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3 \tan y - \sqrt{3})(\tan y - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 30^\circ, y_2 = 60^\circ \\ x_1 = 60^\circ, x_2 = 30^\circ \end{cases}$$



❖ مثال: معادله ذیل را حل نمایند.

$$1) \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(x-y) \right] = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} [0 - \cos(x-y)] = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos(x-y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(x-y) = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{6} \dots \dots \dots (2)$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (1) \\ x - y = \frac{\pi}{6} \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6} + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$$

❖ مثال: معادله ذیل را حل نمایند.

$$1) \begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow 2 \sin \frac{\frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{(x-y)}{2} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (2)$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (1)$$

$$x - y = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (2)$$

$$2x = 2 \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} = 90^\circ = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$x + y = \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\pi}{2} + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0 = 2n\pi + 0$$