

آنچه قرار است درین بخش بیاموزیم

ترتیب

ترکیب ها

تبدیل ها

قضیه بینوم

احتمال دو جمله بی

اهداف آموزشی

در ختم این بخش شاگردان قادر خواهد شد تا

- ✓ ترتیب ها را بدانند.
- ✓ ترکیب چیست؟ و فورمول ترکیب ها چگونه اند؟
- ✓ تبدیل ها را بدانند و فورمول تبدیل ها را بیاموزد.
- ✓ بینوم و قضیه بینوم را درک کند.
- ✓ احتمال را بدانند و احتمال دو جمله بی را درک کند.
- ✓ مثال های مربوط به درس را بیاموزد.

ترتیب

تعریف فکتوریل: حاصل ضرب یک عدد به مرتبه های کوچکتر آن را بنام فکتوریل یاد می کند و به (!) نشان می دهد و مثلاً

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

تعریف ترتیب: تعداد ترتیب n عنصر تحت یک شرط که بنام پرموتیشن n عنصر نیز یاد می گردد و به P_n (در صورت که تکرار مجاز یا ممکن نباشد) نشان داده می شود.

$$P_n = n!$$

در صورتیکه در ترتیب تکرار مجاز و یا مطلوب باشد، درین صورت تعداد ترتیب های با تکرار را به $P_n^{(k)}$ نشان می دهد. و چنین معنی میدهد که یک عنصر k مرتبه در n ترتیب تکرار گردیده است که با دقت به حالات بدون تکرار تعداد مجموعی عبارت اند از.

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \quad k \leq n$$

مثال: در یک سالون امتحان 16 شاگرد ممتاز صنوف مختلط بخاطر اخذ امتحان سوپه گرد هم جمع گردیده است، به چند شکل می توانند روی 16 میز باهم بنشینید، در صورتی که تغییر محل هر شاگرد به حیث یک حالت در نظر گرفته شود.

حل:

هرگاه 16 شاگرد مذکور با بکس های مکتبی خود جاهای خود را بگیرند و به تعداد 4 تن از آنها بکس ها یکسان داشته باشد عبارت اند از.

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16 - 4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

مثال ۲: با استفاده از ارقام 8، 7، 2 و 5 چند عدد سه رقمی (بدون تکرار) می توان نوشت؟

حل 2:

با توجه به این که عدد سه رقمی است، سه محل خالی داریم که به صورت زیر امکان پر شدن آن است

محل رقم سوم	محل رقم دوم	محب رقم اول	محل ها
2	3	4	تعداد امکانات

با در نظر داشت محلات ارقام و امکانات قرار گیری ارقام در موقعیت های موجوده و با در نظر داشت فورمول داریم که.

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4 - 3)!} = 24$$

ترکیب ها

طرز نوشتن نوشته $\binom{n}{k}$ که بشکل n بالای k خوانده می شود و در حقیقت ضرایب بینوم بوده که عدد k در آن توان بینوم را مشخص نموده عبارت اند از.

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26!} = 657520$$

قضیه بینوم

طرز نوشتن $B(n, p, k)$ طرز ارایه بینوم یا احتمال پرابلم برنولی یاد می‌گردد که عبارت اند از.

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

انکشاف دو جمله بی $(a+b)^n$ عبارت اند از.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

در تکرار n تجربه تصادفی دو جمله بی که هر حالت دارای احتمال P و $q = 1-p$ بوده و احتمال k بار پیروزی یعنی p از n بار بقیه حالت ها که ناکامی یعنی $q = 1-p$ بوده داریم.

$$0 \leq k \leq n \quad \text{و} \quad \text{احتمال } k \text{ بار پیروزی و انجام } n \text{ بار تجربه} = \binom{n}{k} p^k (1-q)^{n-k}$$

مثال: از n نفر به تعداد k نفر به صورت اتفاقی انتخاب م‌گردند. مطلوب است احتمال انتخاب تحت k شخص که انتخاب گردیده به تعداد 2 تن شان در یک روز تولد شده باشد.

حل:

ما فرض می‌کنیم که هر سال دارای عین احتمال $\frac{1}{365}$ بحیث روز تولد برای فردی شخصی مورد سوال بوده نه سال تولد بودن اینکه در نظر گرفته شود، مورد نظر نیست.

بنا برین فضای نمونه Ω از تمام امکان k حادثه اتفاقی در 365 روز است داریم.

$$|\Omega| = (365)k$$

حادثه A : حد اقل یک روز تولد یافته اند، طوری که ساده تر قابل محاسبه است که در برابر آن حادثه \bar{A} را در نظر می‌گیریم. بنابراین \bar{A} عبارت اند از k نفر که در روزهای مختلف سالگره دارند.

و یا تولد گردیده اند. بنابراین \bar{A} عبارت از k پرموتیشن با ترتیب از 365 بوده داریم.

$$P(\bar{A}) = \frac{(365)_k}{(365-k)!} = \frac{365!}{(365-k)!}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(365)_k}{(365-k)!} = 1 - \frac{365!}{(365-k)!} \cdot \frac{1}{(365)^k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad k, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

خواص ترکیب ها

برای هر عدد طبیعی n و $0 \leq k \leq n$ بوده داریم که.

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

تعداد ترکیب های r یک ست n عضوی عبارت اند از ترکیب r شی از n بوده که C_r^n نشان داده می‌شود.

مثال: در یک مکتب به تعداد 7 صنف دهم وجود دارد، اداره مکتب می‌خواهد از جمله هفت نفر اول نمره های صنف دهم را به تعداد 4 نفر انتخاب نماید. به چند شکل این انتخاب صورت می‌گیرد؟

حل:

دیده می‌شود که در انتخاب 4 نفر از 7 نفر هیچگونه برتری و ترتیبی وجود ندارد، یعنی مهم نیست که اول نمره کدام صنف است، پس مسئله ترکیب 4 نفر از 7 نفر است. یعنی

$$C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{6 \cdot 4!} = 35$$

تبدیل ها

تعریف: تعداد ترکیب های مسلسل k عنصر انتخابی مورد نظر از n عنصر در آن در نظر داشت باشد مساوی به $k \cdot C_k^n$ می‌باشد. این ترکیب را بنام تبدیل یاد نموده و معمولاً آنرا به V_k^n نشان داده می‌شود.

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: چند امکان وجود دارد که در جلسه انتخابی از جمله 30 نفر اشتراک کننده به تعداد 4 تن برای رهبری طوریکه یک نفر رئیس، یک معاون اول، یک معون دوم و نفر چهارم به حیث منشی اشغال وظیفه نماید.

حل:

مسئله در حقیقت تبدیل 4 از 30 تن بوده که نظر به تعریف تعداد امکانات آن عبارت اند از.

احتمال دو جمله بی

هر تجربه تصادفی را می توان به یک تجربه که دارای دو حالت باشد تقلیل دهیم.

- هر فضای نمونه و یک تجربه دو حالت دارد اگر یکی از حالت ها بحیث پیروزی دارای احتمال P در نظر گرفته شود حالت دیگر آن عبارت از حالت ناکامی بوده که دارای احتمال $1 - P$ می باشد.
- با تکرار n بار تجربه احتمال k بار پیروزی یعنی P از این n بار که بقیه حالت ها که باخت یا شکست یعنی $q = 1 - p$ بوده داریم.

$$\text{احتمال } k \text{ ام بار پیروزی در انجام } n \text{ بار تجربه} = \binom{n}{k} \cdot P^k (1 - P)^{n-k}$$

مثال ۱: در یک فامیل 5 فرزند احتمال اینکه دو تن از اولاد ها پسر و بقیه دختر باشد چند است؟ هر گاه چانس تولد پسر و دختر نوزاد را برابر در نظر بگیریم.

حل:

درین مثال $p = \frac{1}{2}$ و $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ بوده و نظر به فورمول به دست می آید:

احتمال اینکه دو پسر و سه دختر باشد عبارت اند از.

$$\frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$$

فعالیت ها:

- ترتیب را تعریف نمائید.
- مسایل مهم ترتیب را حل نمائید.
- ترکیب چیست؟
- تبدیل چیست؟
- فورمول ترکیب و تبدیل را بنویسید.
- چه تفاوتی بین ترتیب، ترکیب و تبدیل وجود دارد؟
- در مسایل ترتیب و ترکیب و تبدیل اگر یک عدد یا کمیت تکراری باشد، چگونه باید در نظر گرفته شود؟