

اهداف آموزشی

در ختم این درس شاگردان قادر گردد تا

- ✓ در مورد مشتقات مرتبه بلند آشنایی حاصل کنند.
- ✓ سوالات مربوط به مشتقات مرتبه بلند حل بتوانند.
- ✓ به روش های حل سوال های مشتقات مرتبه بلند آشنا شوند.

عنوان 1: مشتقات مرتبه بلند

صفحه: 77

**تعریف:** اگر از معادله یک تابع نظر یک متحول چندین مرتبه مشتق گرفته شود، آنرا مشتق مرتبه بلند می نامند. طوریکه مشتق اول را به  $y'$  مشتق دوم را به  $y''$  مشتق سوم را به  $y'''$  مشتق چهارم را به  $y^{(4)}$  و مشتق پنجم را به  $y^{(5)}$  ... نشان می دهد.

**نکته:** هرگاه تابع چند جمله بی  $f_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$  داده شده باشد مشتق  $n$ -ام آن قرار ذیل دریافت می گردد.

$$f_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$$

$$f_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots c_n = n! c_n$$

مثال اول: مشتق پنج تابع  $y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$  را دریافت نمائید.

حل: از تابع فوق نظر به متحول  $x$  پنج مرتبه مشتق می گیریم.

$$y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$$

$$y' = 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 - 6x$$

$$y'' = 60x^4 - 60x^3 - 12x - 6$$

$$y''' = 240x^3 - 180x^2 - 12$$

$$y^{(4)} = 720x^2 - 360x$$

$$y^{(5)} = 1440x - 360$$

مثال دوم: مشتق هفتم تابع  $y = \sin x$  را دریافت نمائید.

حل: در تابع فوق هفت مرتبه نظر به متحول  $x$  مشتق می گیریم.

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$y^{(5)} = \cos x$$

$$y^{(6)} = -\sin x$$

$$y^{(7)} = -\cos x$$

فعالیت:

1. فورمول دریافت مشتق مرتبه بلند را ساده سازید.
2. مشتق سوم تابع  $y = 3\tan x$  را دریافت نمائید.

تمرین:

1. مشتق ششم تابع  $y = 4x^7 - 7x^5 + 2x$  را دریافت نمائید.
2. مشتق سوم تابع  $y = 12x^3 - 2\cos x$  را دریافت نمائید.

عنوان 2: موارد استعمال مشتق

صفحه: 85

اهداف:

- شاگردان مفهوم، کاربرد و استعمال مشتق را بدانند.
- شاگردان عملاً مشتق را بکار برده و سوالات مربوط به آن را حل کرده بتوانند.
- شاگردان از کاربرد عملی مشتق در زندگی روزمره احساس خوشی نمایند.

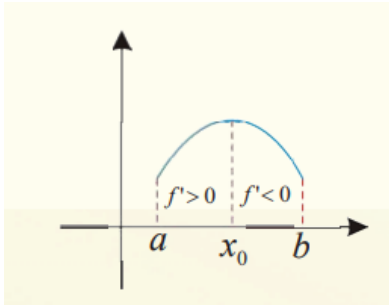
تحولات تابع:

1. تابع متزايد: اگر تابع  $f(x)$  در انتروال  $[a, b]$  متمادی و در انتروال  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد، اگر در انتروال داده شده  $f'(x) > 0$  (مشتق اول تابع مثبت باشد)، درین صورت تابع در همان انتروال متزايد است.

اهداف آموزشی (دانشی، مهارتی و ذهنیتی)

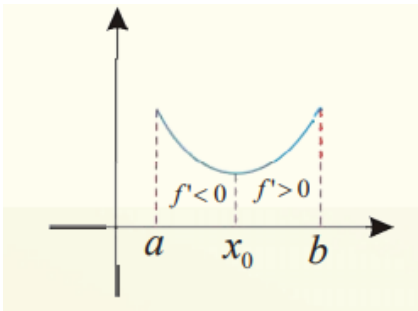
- ✚ شاگردان مفهوم نقاط بحرانی یک تابع را بدانند.
- ✚ شاگردان نقاط اعظمی و اصغری یک تابع را دریافت کرده بتوانند.
- ✚ شاگردان از حل سوالات مربوط به دریافت نقاط بحرانی تابع احساس خوشی نمایند.

**تعریف:** نقاط بحرانی تابع عبارت از نقاط اند که تابع در آن تحول داشته باشد. که بیشتر در گراف توابع متصور است، نقاط بحرانی تابع شامل (نقاط اعظمی، نقاط اصغری، نقاط انعطاف) می باشد. که هر کدام را با ذکر مثال به بحث می گیریم.



❖ **نقطه اعظمی:** هرگاه یک تابع  $y = f(x)$  در یک نقطه معین  $x_0$  از حالت تزايد به حالت تناقص تبدیل می شود یا به عباره دیگر اشاره مشتق در همین نقطه معین  $x_0$  از مثبت به منفی تبدیل گردد، نقطه معین  $x_0$  را نقطه اعظمی تابع می نامند.

❖ **نقطه اصغری:** هرگاه یک تابع  $y = f(x)$  در یک نقطه معین  $x_0$  از حالت تناقص به حالت تزايد تبدیل می شود یا به عباره دیگر اشاره مشتق در همین نقطه معین  $x_0$  از منفی به مثبت تبدیل گردد، نقطه معین  $x_0$  را نقطه اصغری تابع می نامند.



2. تابع متناقص: اگر تابع  $f(x)$  در انتروال  $[a, b]$  متمادی و در انتروال  $(a, b)$  مشتق پذیر باشد، اگر در انتروال داده شده  $f'(x) < 0$  (مشتق اول تابع منفی باشد)، درین صورت تابع در همان انتروال متناقص است.

مثال اول: تابع  $y = 4x - 2$  متزايد است یا متناقص.

حل: از تابع فوق نظر به متحول  $x$  یک نرتبه مشتق می گیریم، در صورت مشتق اول تابع بزرگ از صفر گردد تابع متزايد است و اگر کوچک از صفر گردد متناقص است.

$$y = 4x - 2$$

$$y' = 4 > 0$$

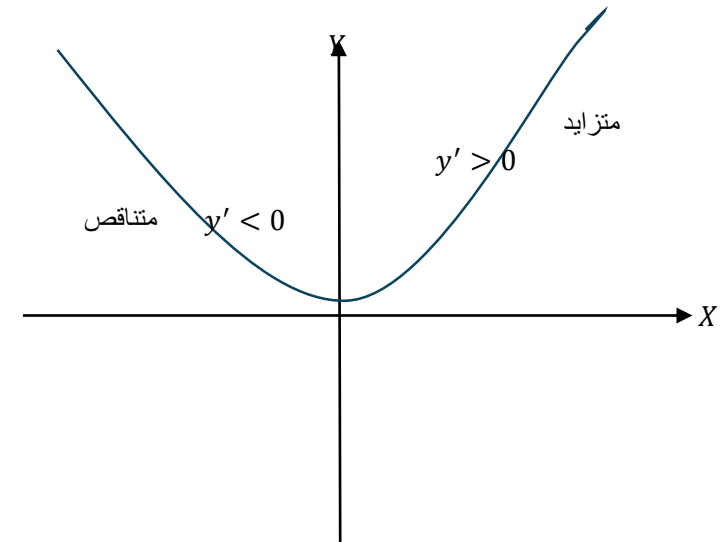
چون مشتق اول تابع بزرگ از صفر است، پس تابع متزايد است.

مثال دوم: نظر به گراف تابع  $y = x^2$  نشان دهید که در انتروال متزايد و در کدام انتروال متناقص است؟

حل: با در نظر داشت مشتق اول و گراف تابع انتروال تزايد و تناقص آن را می توان قرار ذیل دریافت نمود.

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$y' = 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \rightarrow (0, +\infty) \text{ متزايد} \\ 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \rightarrow (-\infty, 0) \text{ متناقص} \end{cases}$$



عنوان 3: نقاط بحرانی تابع (اعظمی و اصغری)

برای تعیین نقاط اعظمی و اصغری از جدول تعیین اشاره استفاده می کنیم.

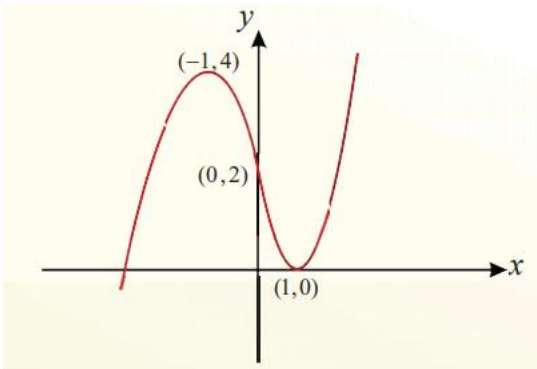
$f'(x) = 0$	$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$1$	$2$	$+\infty$	
$3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$	$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$	$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	$-2$	$-2$	$+\infty$	
			Max		Min		

**مثال دوم:** نقاط اعظمی و اصغری تابع  $f(x) = x^3 - 3x + 2$  را دریافت نموده و گراف آن را ترسیم نمائید.

حل: برای دریافت نقاط اعظمی و اصغری مشتق اول را دریافت نموده و مساوی به صفر قرار میدهیم.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

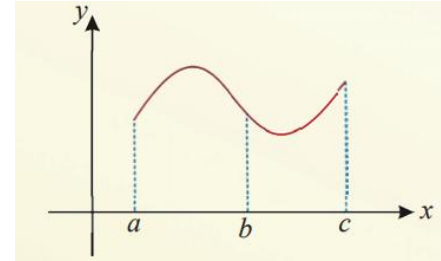
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



فعالیت ها: باهم صنفی/همصنفی ها یک گروه ایجاد نموده و فعالیت های ذیل را انجام دهند.

- نقاط بحرانی چیست؟
- نقطه اعظمی مطلق و اصغری مطلق را از روی گراف تشخیص کنند.
- نقش گراف ها در ریاضی چیست؟
- آیا گراف های توابع کاربرد در زندگی روزمره دارد؟

❖ **نقطه انعطاف:** هرگاه مشتق اشاره خود را در یک نقطه معین  $x_0$  از مثبت به صفر و دوباره به مثبت یا از منفی به صفر و دوباره به منفی تغییر دهد، نقطه معین  $x_0$  را بنام نقطه انعطاف می نامند.



در شکل فوق نقطه  $b$  عبارت از نقطه انعطاف تابع است.

**نکات:**

- مشتق اول تابع در نقاط بحرانی برابر با صفر است.
- برای دریافت نقاط بحرانی تابع مشتق اول آنرا گرفته برابر با صفر قرار می دهیم.
- مشتق دوم تابع در نقاط انعطاف برابر با صفر است.
- برای دریافت نقاط انعطاف مشتق دوم تابع را گرفته برابر با صفر قرار می دهیم (نقطه انعطاف تابع یک بحث جداگانه اند که در درس بعدی خواهیم خواند)

**مثال اول:** نقاط بحرانی تابع  $y = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$  را دریافت نمائید.

حل: برای دریافت نقاط بحرانی مشتق اول تابع را میگیریم و آنرا برابر با صفر قرار می دهیم. نقاط بحرانی تابع دریافت می گردد.

$$y' = 3x^2 - 7x + 2$$

برای دریافت نقاط بحرانی مشتق برابر با صفر قرار داده می شود.

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - x + 2$$

$$\Rightarrow 3x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(3x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

پس تابع دارای دو نقطه بحرانی اند این نقاط عبارت از  $(2, -2)$  و  $(\frac{1}{3}, \frac{17}{54})$  است.

## عنوان: نقطه انعطاف توابع

### اهداف آموزشی

- شاگردان مفهوم نقطه انعطاف را بدانند.
- شاگردان نقطه انعطاف را مشخص و تعیین کرده بتوانند.
- شاگردان نقطه انعطاف توابع را دریافت کرده بتوانند.
- شاگردان سوالهای مربوط به نقطه انعطاف را حل کرده بتوانند.

**تعریف:** نقطه که در آن منحنی جهت خود را تغییر می دهد، یعنی از معقریت به محدبیت و برعکس تبدیل شود، آنرا نقطه انعطاف می نامند.

برای دریافت نقطه انعطاف تابع مشتق دوم آنرا گرفته و برابر با صفر قرار می دهیم.

مثال: نقاط انعطاف تابع  $f(x) = x^5 - 5x^3$  را دریافت نمایید.

حل: برای دریافت نقاط انعطاف یک تابع مشتق دوم آنرا برابر با صفر قرار می دهیم.

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 - 30x = 0$$

$$10x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$10x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \\ \begin{cases} x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

پس تابع فوق در نقاط  $x_1 = 0$ ،  $x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}}$  و  $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$  انعطاف دارد.

**ترسیم منحنی ها:**

**گراف توابع درجه دوم**

توابع درجه دوم بنام توابع پارابولیک نیز یاد می شود، زیرا گراف این توابع یک پارابول عمودی است.

برای ترسیم گراف توابع درجه دوم، نقطه ذیل را در نظر می گیریم.

1. تحولات تابع را بررسی می نمائیم.

برای تعیین نقاط بحرانی مشتق اول را برابر صفر قرار می دهیم و برای تعیین نقطه انعطاف مشتق دوم را برابر با صفر قرار می دهیم.

تابع درجه دوم دارای یک نقطه بحرانی (اعظمی یا اصغری) اند، اگر تابع به شکل

$f(x) = ax^2 + bx + c$  باشد، و نقطه بحرانی از رابطه  $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$  دریافت می گردد. در رابطه بالا اگر  $a > 0$  باشد نقطه اصغری و اگر  $a < 0$  نقطه اعظمی است.

2. تقاطع با محورات: برای دانستن تقاطع با محور افقی  $y = 0$  قرار می دهیم و برای داشتن تقاطع با محور عمودی  $x = 0$  قرار می دهیم.

3. دریافت محور تناظر: برای دریافت محور تناظر مشتق اول را برابر با صفر قرار می دهیم، محور تناظر توابع درجه دوم  $x = -\frac{b}{2a}$  است.

**مثال:** تحولات تابع  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  را مطالعه و گراف آنرا ترسیم کنید.

حل:

1. ناحیه تعریف تابع تمام اعداد حقیقی اند. یعنی  $D_f = (-\infty, +\infty)$

2. تقاطع با محورات:

تقاطع با محور  $y$ :

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3), y \text{ با } x \text{ تقاطع}$$

تقاطع با  $x$ :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 3x + 3 = x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow (1, 0), x \text{ با } x \text{ تقاطع} \\ x = 3 \rightarrow (3, 0) \text{ و } x \text{ با } x \text{ تقاطع} \end{cases}$$

3. نقاط بحرانی: مشتق اول را برابر با صفر قرار می دهیم.

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \rightarrow \min(2, -1)$$

مجانب افقی: نسبت ضریب حدود هم درجه صورت و مخرج تابع است.

$$y = \frac{x+1}{2x-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} \text{ مجانب افقی}}$$

**مثال 2:** مجانب های تابع  $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$  را دریافت نمائید.

حل: تابع متذکره دارای مجانب های مایل و عمودی اند.

مجانب مایل: صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم

$$\frac{x^2+2x-1}{x} = x+2 \Rightarrow \boxed{y = x+2 \text{ مجانب مایل}}$$

مجانب عمودی: مخرج برابر با صفر قرار داده می شود.

$$\boxed{x = 0 \text{ مجانب عمودی}}$$

### گراف توابع هوموگرافیک:

اهداف آموزشی:

- شاگردان مجانب های توابع را دریافت کرده بتوانند.
- شاگردان تقاطع گراف را محور های افقی و عمودی دریافت کرده بتوانند.
- شاگردان از توابع هوموگرافیک در زندگی روزمره استفاده کرده بتوانند.

**تعریف:** توابع که شکل  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  را داشته باشند بنام توابع هوموگرافیک یاد می شود.

**مثال:** تحولات تابع  $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$  را مطالعه و گراف آنرا ترسیم کنید.

حل: در ابتداء مجانب های تابع را دریافت می نمائیم.

مجانب افقی تابع: نسبت ضریب حدود هم درجه تابع است. یعنی:  $y = 2$

مجانب عمودی تابع: مخرج تابع را برابر با صفر قرار میدهیم. یعنی  $x = 3$

تقاطع با محورات:

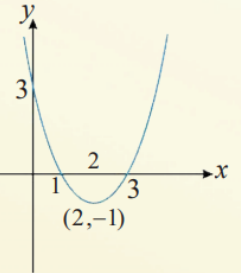
برای تقاطع با محور  $x$ ،  $y = 0$  قرار میدهیم.

$$y = 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-3} = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right), x$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 2x-4 = 0 &\Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2 \\ f(2) = 2^2-4\cdot 2+3 = -1 &\Rightarrow V(2,-1) \text{ min} \\ x \rightarrow \pm\infty &\Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2-4x+3] &= +\infty \end{aligned}$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$
$y'$	-	-	-	+	+	+
$y$	$-\infty \searrow$	$3 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty \nearrow$

Min



**فعالیت ها:**

1. نقطه انعطاف تابع  $y = x^3 - 2x + 7$  تعیین کنید.
2. تحولات تابع  $f(x) = -x^2 + 2x$  را تعیین و گراف آن را ترسیم کنید.

### مجانب های گراف یک تابع:

**تعریف:** مجانب ها عبارت از خطوط مستقیم اند که حیثیت راهنمای توابع را دارد، مجانب های توابع سه نوع اند.

**الف) مجانب عمودی:** در تابع  $y = f(x)$  وقتی مجانب عمودی وجود می آید که اگر  $x \rightarrow a$  یا  $x \rightarrow \infty$  می کند، یعنی  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  می گردد. در توابع کسری برای دریافت مجانب عمودی مخرج تابع را مساوی به صفر قرار میدهیم.

**ب) مجانب مایل:** در تابع کسری  $y = f(x)$  هرگاه درجه معادله صورت یک واحد کمتر از درجه معادله مخرج باشد، تابع دارای مجانب مایل است. و برای دریافت مجانب مایل صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم که معادله خطی  $y = ax + b$  :  $a \neq 0$  است.

**ج) مجانب افقی:** یک تابع زمان مجانب افقی دارد که اگر  $x \rightarrow \infty$  درین صورت  $y \rightarrow c$  می کند، یعنی  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$  گردد.

**مثال:** مجانب های تابع  $y = \frac{x+1}{2x-4}$  را دریافت نمائید.

حل: تابع متذکره دارای مجانب های عمودی و افقی اند.

مجانب عمودی: مخرج را برابر با صفر قرار می دهیم

$$2x-4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ مجانب عمودی}}$$

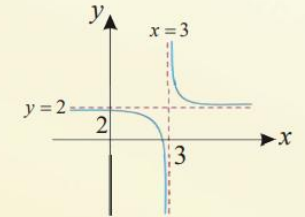
برای تقاطع با محور  $y$ ،  $x = 0$  قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right), y, \text{ تقاطع با } y$$

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-3)^2 - (-5) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$-\infty$	تعریف نشده	$+\infty$



#### فعالیت ها:

- تحولات تابع  $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$  را بررسی و گراف آنرا ترسیم کنید.
- تحولات تابع  $f(x) = x^2 + 3x - 9$  را بررسی و گراف آن را ترسیم کنید.
- مجانب های تابع  $f(x) = \frac{3x-5}{x-4}$  را دریافت نمایید.
- مجانب های تابع  $f(x) = \frac{2x^2-11x}{3x+2}$  را دریافت نمایید.