

هدف کلی درس:

هدف از این درس این است که دانش آموزان با مفهوم «لمیت» آشنا شوند و نحوه استفاده از آن را در زندگی روزمره و درک بهتر از حرکات‌ها و تغییرات تدریجی یاد بگیرند.

1. مفاهیم کلیدی درس (مفهوم لمیت)

تعریف لمیت:

مفهوم لمیت به ما می‌گوید که وقتی متحول (مثلاً متغیر  $x$ ) به یک عدد خاص (مثلاً  $A$ ) نزدیک می‌شود، تابع  $y$  چه رفتاری دارد. به عبارت دیگر، لمیت نشان‌دهنده رفتار تابع در نزدیکی یک نقطه خاص است، حتی اگر آن نقطه تعریف نشده باشد.

مثال ساده از لمیت:

فرض کنید تابعی به نام  $y = x^2 - 1$  داریم. اگر  $x$  به عدد 2 نزدیک شود، مقدار تابع  $y$  به عدد 3 نزدیک می‌شود. به این می‌گوییم که «لمیت تابع  $x^2 - 1$  وقتی که  $x$  به 2 نزدیک می‌شود، برابر 3 است.»

اما شاید بخواهید بدانید که چطور یک تابع می‌تواند به یک عدد نزدیک شود بدون اینکه در آن نقطه دقیقاً به همان مقدار برسد. اینجاست که مفهوم لمیت وارد می‌شود!

معمای دویدن خرگوش و سنگ‌پُشت

قصه مسابقه خرگوش و سنگ‌پُشت را شاید شنیده باشید. می‌خواهیم آنرا به شکل دیگری بازگو کنیم که به زبان ریاضی نزدیک‌تر باشد. فرض کنید خرگوش، قهرمان دوش در جنگل با سرعتی بسیار بالا، در حال دویدن به سمت خط پایان مسابقه است. حالا در این مسابقه، سنگ‌پُشت (که یک موجود بسیار کند است) هم حضور دارد. سنگ‌پُشت به‌طور طبیعی خیلی کندتر از خرگوش حرکت می‌کند.

اما داستان جالب اینجاست:

در ابتدا، سنگ‌پُشت چند قدم جلوتر از خرگوش قرار دارد. یعنی وقتی خرگوش شروع به دویدن می‌کند، درست وقتی که به نقطه‌ای که سنگ‌پُشت در لحظه آغاز دویدن او قرار داشته می‌رسد، سنگ‌پُشت که در حال حرکت است در این لحظه در آن نقطه نیست و کمی جلوتر رفته است. پس با وجود آنکه خرگوش به سرعت حرکت می‌کند و قصد دارد به سنگ‌پُشت برسد، اما در این مسابقه

عجیب، هر زمان که خرگوش به یک نقطه می‌رسد، سنگ‌پُشت کمی بیشتر جلو می‌رود. به عبارت دیگر، هر وقت خرگوش یک مسافت را طی می‌کند، سنگ‌پُشت هم مقداری جلوتر می‌رود.

این اتفاق به‌طور مداوم ادامه پیدا می‌کند. حالا سوال اینجاست: آیا خرگوش به سنگ‌پُشت می‌رسد یا خیر؟!

پاسخ معما و ارتباط با لمیت:

اگر دقت کنید، این معما نشان می‌دهد که خرگوش هرگز نمی‌تواند به سنگ‌پُشت برسد، حتی اگر سرعت خرگوش بسیار زیاد باشد. چرا؟ چون همیشه وقتی خرگوش به نقطه‌ای می‌رسد، سنگ‌پُشت هم مقداری بیشتر جلو رفته است!

اما نکته‌ی جالب اینجاست که در دنیای واقعی، خرگوش قطعاً به سنگ‌پُشت می‌رسد. چرا؟ چون در هر مرحله، فاصله بین خرگوش و سنگ‌پُشت به‌طور تدریجی کاهش پیدا می‌کند، حتی اگر در ابتدا به نظر برسد که خرگوش نمی‌تواند به او برسد.

مفهوم

این معما دقیقاً مفهوم لمیت در ریاضیات را توضیح می‌دهد. در حقیقت، به جای اینکه بگوییم خرگوش به‌طور واقعی به سنگ‌پُشت نمی‌رسد، می‌گوییم که «خرگوش به سمت سنگ‌پُشت می‌دود» و این نزدیکی‌ها با گذر زمان بیشتر می‌شود.

لمیت یعنی اینکه چیزی به یک نقطه نزدیک می‌شود، حتی اگر هرگز دقیقاً به آن نقطه نرسد. در این معما، خرگوش به‌طور مداوم به سمت سنگ‌پُشت نزدیک‌تر می‌شود ولی وقتی که مسافه و زمان را به واحدهای کوچک و کوچکتر تقسیم کنیم، خرگوش هرگز به سنگ‌پُشت نمی‌رسد.

نتیجه‌گیری:

در دنیای واقعی، خرگوش به سنگ‌پُشت می‌رسد، اما در ریاضیات، ما از لمیت استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که هرچه خرگوش به جلو می‌رود، به سنگ‌پُشت نزدیک‌تر می‌شود، حتی اگر در ابتدا فاصله زیادی باشد.

این مثال به ما نشان می‌دهد که لمیت در ریاضیات به‌طور ساده به معنی «تقریب» و یا «نزدیک شدن» به یک نقطه است، ولی هیچ‌وقت دقیقاً به آن نقطه نمی‌رسیم.

چالش شایستگی:

1. اگر فاصله اولیه بین خرگوش و سنگ‌پُشت  $d_0$  باشد و در هر مرحله این فاصله نصف شود، فاصله‌ای که خرگوش باید طی کند تا به سنگ‌پُشت برسد را به صورت یک تابع از تعداد خیزهای خرگوش (تعداد دفعاتی که خرگوش به نقطه قبلی سنگ‌پُشت می‌رسد) بنویسید.

2. زمان لازم برای هر پرش خرگوش را به عنوان تابعی از تعداد پرش‌ها بنویسید. اگر زمان هر پرش به نسبت فاصله‌ای که طی می‌شود کاهش پیدا کند، زمان کلی پرش‌های خرگوش را به صورت یک تابع از تعداد پرش‌ها بیان کنید.
3. چه لمیتی برای این توابع وجود دارد؟ چه زمانی خرگوش می‌تواند به سنگ‌پشت برسد؟

### معمای پرواز پرنده بین دو موتور:

فرض کنید دو موتور از دو سمت جاده به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و یک پرنده از روی یکی از آن‌ها به روی دیگری می‌پرد و بدون توقف، فوراً به سوی موتور قبلی برمی‌گردد. پرنده این کار را به‌طور مداوم ادامه می‌دهد در حالیکه موتورها به هم نزدیک‌تر می‌شوند، پرنده بی‌وقفه از روی یکی به سوی دیگری می‌پرد و برمی‌گردد، سؤال این است که پرنده چند بار این کار را انجام می‌دهد؟ آیا برای پاسخ به این سؤال نیاز به دانستن فاصله دقیق بین دو موتور داریم؟

### جواب ساده و مفهوم لمیت:

در این نوع معما، تعداد دفعاتی که پرنده از روی یکی از موتورها به روی دیگری می‌پرد، به مفهوم "تقریب" نزدیک می‌شود و لمیت را نشان می‌دهد.

### چرا به فاصله نیاز نداریم؟

برای حل این مسئله، نیازی به دانستن دقیق فاصله بین دو موتور نیست، بلکه مفهوم لمیت به ما کمک می‌کند که بفهمیم چگونه پرنده به‌طور پیوسته در حال پریدن از یک موتور به دیگری است، هرچند که هر بار فاصله‌ای که باید ببرد کمتر و کمتر می‌شود.

### چطور؟

در ابتدا، پرنده مسافتی طولانی می‌برد، اما با نزدیک شدن موتورها به هم، هر بار که پرنده از یک موتور به دیگری می‌پرد، فاصله کمتر و کمتر می‌شود، اما وقتی ما زمان و مسافت را به واحدهای کوچک و کوچک‌تر تقسیم نمائیم، پرنده دائم در حال رفت و آمد باقی می‌ماند. در ریاضیات، این به این معناست که پرنده هرگز به‌طور کامل متوقف نمی‌شود، بلکه هر بار کمتر و کمتر پرش می‌کند، ولی در نهایت، به صورت تئوریک، این فرایند به بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند. یعنی تعداد پرش‌ها به سمت بی‌نهایت می‌رود، اما مسافه هر پرواز و زمان پرواز به یک قیمت بسیار بسیار کوچک نزدیک می‌شود.

### نتیجه‌گیری:

پرنده به‌طور نظری تعداد پرش‌های بی‌پایانی انجام می‌دهد، اما چون هر بار که از یک موتور به دیگری می‌پرد، فاصله کمتر و کمتر می‌شود، در عمل پرنده تنها تعداد محدودی پرش انجام می‌دهد که البته در بی‌نهایت به صفر نزدیک می‌شود.

این سؤال دقیقاً همان مفهوم لمیت را نشان می‌دهد، که نشان می‌دهد وقتی دو موتور به هم نزدیک می‌شوند (و پرنده از یکی به دیگری می‌پرد)، تعداد دفعاتی که پرنده این کار را انجام می‌دهد به بی‌نهایت نزدیک می‌شود، اما هر پرش فاصله‌ای کمتر از قبل خواهد داشت و در نتیجه فاصله پرواز و نیز زمان پرواز به سمت صفر تقرب می‌کند.

### آیا به فاصله بین دو موتور نیاز داریم؟

خیر، برای پاسخ دادن به این سؤال از نظر ریاضی و استفاده از مفهوم لمیت، نیازی به دانستن فاصله دقیق بین دو موتور نیست. مهم این است که موتورها چه یک کیلومتر فاصله داشته باشند و یا فقط چند متر، فقط زمانی که به یکدیگر بسیار نزدیک می‌شوند و فاصله بین آن‌ها به صفر تقرب می‌کند، در آن زمان است که تعداد پرش‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

### چالش شایستگی:

1. اگر فاصله اولیه بین دو موتور  $d_0$  باشد و در هر مرحله این فاصله نصف شود، فاصله‌ای که پرنده باید طی کند تا بین دو موتور به‌طور مداوم پرش کند را به صورت یک تابع از تعداد پرش‌ها بنویسید.
2. اگر زمان لازم برای هر پرش پرنده به نسبت فاصله‌ای که طی می‌کند کاهش پیدا کند، زمان کل پرش‌های پرنده را به صورت یک تابع از تعداد پرش‌ها بنویسید.
3. چه لمیتی برای این توابع وجود دارد؟ در نهایت، پرنده به کجا می‌رسد و چه زمانی به‌طور نظری به‌طور کامل به پایان می‌رسد؟

### فعالیت عملی:

1. رسم گراف تابعی ساده (مثلاً  $y = x^2$ ) و مشاهده رفتار آن وقتی که  $x$  به 1، 0، یا هر عدد دیگر نزدیک می‌شود.
2. مسئله‌های کاربردی:
  - از دانش‌آموزان بخواهید که مثالی از زندگی روزمره بیاورند که در آن یک تغییر تدریجی و پیوسته را مشاهده می‌کنند (مثل تغییر دما، سرعت، یا قیمت‌ها)

تمرین‌های بصری و جالب:

تمرین 1 – رسم گراف:

- از دانش‌آموزان بخواهید که گراف تابعی مانند  $y = x^2$  را رسم کنند و مشاهده کنند که چگونه این تابع به سمت صفر یا هر عدد دیگر نزدیک می‌شود.

تمرین 2 – مثال‌های معمایی:

- مثال‌های کاربردی دیگری مشابه معمای خرگوش و سنگ‌پشت پیدا کنید که مفاهیم لمیت را در زندگی واقعی نشان دهد. به عنوان مثال، برای یک وسیله نقلیه که به یک مقصد نزدیک می‌شود، آیا در نهایت به مقصد می‌رسد؟

تمرین نوشتاری:

- از دانش‌آموزان بخواهید که مفاهیم لمیت و کاربرد آن‌ها در زندگی روزمره را در چند جمله ساده بیان کنند.

4. روش‌های بهبود یادگیری

مطالعه گروهی و تعامل:

- ایجاد گروه‌های کوچک از دانش‌آموزان برای بحث و تبادل نظر در مورد مفاهیم لمیت و کاربردهای آن.

5. یادگیری نوآورانه

مستندسازی یادگیری:

- از دانش‌آموزان بخواهید که یادداشت‌های روزانه بنویسند یا گرافهایی برای هر مفهومی که یاد می‌گیرند، رسم کنند.
- همچنین، از آن‌ها بخواهید که یک پروژه کوچک بسازند که در آن نتایج محاسبات لمیت را نمایش دهند.

استفاده از تکنولوژی:

- برای دانش‌آموزانی که به اینترنت دسترسی دارند، می‌توانند با جستجو در یوتیوب و مشاهده ویدئوهای آموزشی در مورد "Limit" به درک بهتری از این مفهوم برسند.

6. خلاصه درس:

در این درس، دانش‌آموزان باید مفهوم لمیت را یاد بگیرند و نحوه استفاده از آن را در مسائل مختلف ریاضی و علمی درک کنند. با استفاده از معماها، تمرین‌ها، و روش‌های نوآورانه یادگیری، این مفاهیم برای آن‌ها جذاب و قابل درک خواهند شد.

هدف کلی درس:

هدف از این درس این است که دانش‌آموزان درک دقیق‌تری از رفتار تابع در نزدیکی یک نقطه خاص به دست آورند و با مفاهیم «لمیت سمت راست»، «لمیت سمت چپ»، «خواص لمیت «و» لمیت توابع نسبی» آشنا شوند تا بتوانند تحلیل دقیق‌تری از تغییرات و رفتار توابع ارائه دهند.

1. مفاهیم کلیدی درس

1.1 لمیت سمت راست و سمت چپ

تعریف:

فرض کنید تابعی به نام  $f(x)$  داریم و می‌خواهیم بدانیم وقتی  $x$  به یک عدد خاص مثلاً  $a$  نزدیک می‌شود، تابع چه رفتاری دارد.

- لمیت سمت راست: وقتی  $x$  از سمت بزرگ‌تر از  $a$  به سمت  $a$  نزدیک شود، نماد آن:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

- لمیت سمت چپ: وقتی  $x$  از سمت کوچک‌تر از  $a$  به سمت  $a$  نزدیک شود، نماد آن:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

**نکته مهم:** اگر لمیت سمت راست و سمت چپ برابر باشند، می‌گوییم که لمیت کلی در آن نقطه وجود دارد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



### یادگیری تصویری:

- استفاده از نرم‌افزارهای گراف‌کشی مانند GeoGebra
- مقایسه گراف‌هایی که در آن لمیت وجود دارد ولی مقدار تابع تعریف نشده.

### 5. یادگیری نوآورانه

#### پروژه کوچک:

هر گروه یک تابع خاص را انتخاب کند و:

- لمیت‌های سمت راست و چپ آن را تحلیل کند.
- گراف آن را رسم کند.
- نتیجه‌گیری کند که آیا لمیت کلی وجود دارد یا نه.

#### مستندسازی:

دانش‌آموزان می‌توانند فیلمی کوتاه یا پوستر از تحلیل تابع خود تهیه کرده و مفهوم لمیت را به زبان ساده توضیح دهند.

### 6. خلاصه درس

در این درس، دانش‌آموزان:

- تفاوت بین لمیت سمت راست و چپ را یاد می‌گیرند.
- خواص پایه‌ای لمیت‌ها را به صورت عملی تمرین می‌کنند.
- با تحلیل توابع نسبی، مهارت ساده‌سازی و یافتن لمیت را به دست می‌آورند.
- از طریق معماها و مثال‌های جذاب، مفهوم نزدیکی و تقریب در لمیت را عمیق‌تر درک می‌کنند.

- موقعیت قطار نسبت به پل هر لحظه به یک مقدار خاص نزدیک می‌شود.
- از یک سو می‌توان گفت قطار به «لمیت موقعیت بسته‌شدن پل» نزدیک می‌شود.
- اما از سوی دیگر، پل هر لحظه کمی بیشتر باز می‌شود و قطار به موقعیتی که وجود خارجی ندارد نزدیک می‌شود.

### 3. چالش شایستگی

لمیت یک تابع نسبی و جهت‌دار:

اگر تابع

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

را در نظر بگیریم، بررسی کنید:

- لمیت سمت راست  $x \rightarrow 3^+$
- لمیت سمت چپ  $x \rightarrow 3^-$
- لمیت کلی در  $x = 3$

پاسخ: تابع را ساده می‌کنیم:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad (x \neq 3)$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

### 4. روش‌های بهبود یادگیری

فعالیت گروهی:

- گروه‌بندی برای تحلیل گراف توابع خاص و بررسی لمیت‌های سمت راست و چپ.
- استفاده از کاغذهای رنگی برای جدا کردن نقاطی که تابع تعریف نشده ولی لمیت وجود دارد.