

❖ هدف کلی درس:

- در اینجا یک توضیح کامل و خلاصه از مفاهیم اصلی مرتبط بامشتق در ریاضیات آمده است مشتقات اصلی مشتق گرفتن، بررسی و تحلیل (نرخ تغییرات) یک تابع است. به عبارت دیگر، مشتق به ما می گوید که یک تابع چگونه و با چه سرعتی تغییر می کند.
- ❖ کاربردهای اصلی مشتق عبارتند از - محاسبه سرعت و شتاب در فیزیک - تحلیل روندها در اقتصاد - بهینه سازی مسائل (کمینه/بیشینه کردن توابع) - مدل سازی تغییرات لحظه ای در علوم مهندسی و پزشکی

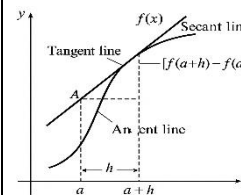
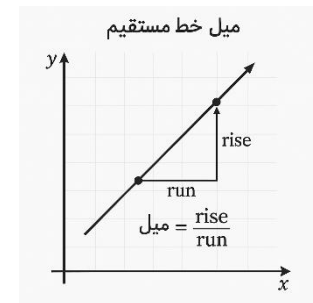
❖ میل یک محنی: تعریف:

میل عبارت تانجانت زاویه است که گراف یک تابع با محور مثبت x می سازد.

✓ اگر گراف تابع یک خط مستقیم باشد میل آن دارای خصوصیات زیر است:

- میل آن در تمام نقاط ثابت است
- اگر بخوایم میل خط مستقیم را دریافت کنید از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



- ✓ اگر تابع دارای درجه بزرگتر از یک باشد گراف آن شکل خط منحنی را دارا است و میل آن در هر نقطه در اثر تغییر مسیر منحنی، تغییر می نماید بنا آن میل آن را در هر نقطه باید مطالعه کنیم. برای دریافت میل در هر نقطه یک مماس بالای منحنی در همان نقطه ترسیم نموده که میل منحنی در یک نقطه در حقیقت مساوی با میل مماس بالای منحنی در همان نقطه می باشد.

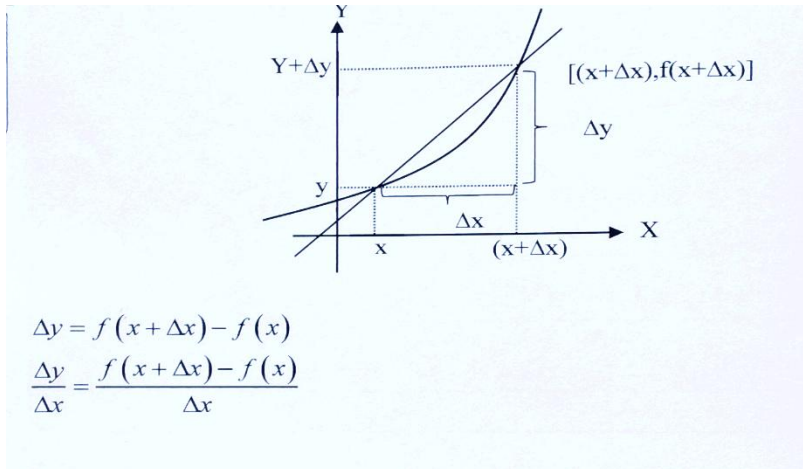
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

❖ جهت وضاحت بیشتر مثال زیر را در نظر می گیریم:  
مثال 1: میل منحنی  $y = x^2$  را دریافت نموده و آنرا در  $x = 3$  محاسبه نمایید.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x + 0 \end{aligned}$$

$$= 2x \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

❖ تغییرات متوسط تابع: هرگاه تغییرات تابع را در هر واحد تغییرات متحول محاسبه نماییم تغییر متوسط تابع حاصل می شود و یا تغییرات تابع در فی واحد تغییر متحول، تغییر متوسط تابع می نامیده می شود.



❖ مشتق یک تابع:

برای مشتق یک تابع دو نوع تعریف ارایه می کنیم:

✓ **تعریف الجبری مشتق:** تزاید لحظه ای تابع را مشتق می نامند و یا مشتق عبارت از لیمت نسبت تغییرات تابع و تغییرات متحول بوده زمانی که تغییرات متحول به صفر تقرب نماید.

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

جهت وضاحت بیشتر مثال زیر را در نظر می گیریم.  
مثال: مشتق تابع  $f(x) = 2x$  را دریابید.

تابع	مشتق	مثال
1) $y = a$	$\dot{y} = 0$	$y = 3 \Rightarrow \dot{y} = 0$
2) $y = ax$	$\dot{y} = a$	$y = 7x \Rightarrow \dot{y} = 7$
3) $y = ax^n$	$\dot{y} = a \cdot n$	$y = 2x^3 \Rightarrow \dot{y} = 6x^2$
4) $y = u + v + \dots$	$\dot{y} = \dot{u} + \dot{v}$	$y = 3x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \dot{y} = 6x - 5$
5) $y = u \times v$	$\dot{y} = \dot{u} \cdot v + u \cdot \dot{v}$	$y = (2x^2)(4x) \Rightarrow \dot{y} = 4x \cdot 4x + 4 \cdot 2x^2 = 16x^2 + 8x^2$
6) $y = \frac{u}{v}$	$\dot{y} = \frac{\dot{u} \cdot v - u \cdot \dot{v}}{v^2}$	$y = \frac{3x^2}{4x} \Rightarrow \dot{y} = \frac{6x \cdot 4x - 4 \cdot 3x^2}{16x^2} = \frac{16x^2 - 12x^2}{16x^2} = \frac{4x^2}{16x^2} = \frac{4x}{16x} = \frac{1}{4}$
7) $y = \frac{u}{a}$	$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{a}$	$y = \frac{2x^2}{8} \Rightarrow \dot{y} = \frac{4x}{8} = \frac{x}{2}$
8) $y = \frac{a}{u}$	$\dot{y} = \frac{-a\dot{u}}{u^2}$	$y = \frac{3}{5x} \Rightarrow \dot{y} = \frac{-15}{25x^2}$
9) $y = \frac{a}{u^2}$	$\dot{y} = \frac{-2a\dot{u}}{u^3}$	$y = \frac{3}{5x} \Rightarrow \dot{y} = \frac{-15}{25x^2}$
10) $y = au^m$	$\dot{y} = m \cdot a \cdot u^{m-1}$	$y = 3 \cdot 2x^2 \Rightarrow \dot{y} = 2 \cdot 3 \cdot 4x \cdot 2x = 48x^2$
11) $y = \sqrt{u}$	$\dot{y} = \frac{\dot{u}}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{2x} \Rightarrow \dot{y} = \frac{2}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$
12) $y = \sqrt[m]{u^n}$	$\dot{y} = \frac{n \cdot \dot{u}}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y = \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow \dot{y} = \frac{3 \cdot 3x^2}{5 \sqrt[5]{x^{5-3}}} = \frac{9x^2}{5 \sqrt[5]{x^2}}$

راهنمای آموزشی صنف دوازدهم دوره چهارم.

- یاد بگیری که چگونه مربع یک تابع را مشتق بگیری.
- بتوانی تابع‌های مرکب را تشخیص بدهی و با قاعده زنجیره‌ای از آن‌ها مشتق بگیری
- مشتق توابع مثلثاتی را حفظ کنی و از آن‌ها در حل مسائل استفاده کنی
- یاد بگیری که چگونه از معادلاتی که  $y$  صراحتاً داده نشده مشتق بگیری (مشتق ضمنی)،

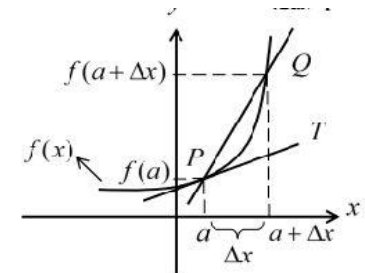
$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

✓ تعریف هندسی مشتق: مشتق عبارت از میل مماس در نقطه تماس بالای منحنی می باشد. در گراف تابع  $f(x)$  اگر نقاط  $p(a, f(a))$  و نقطه  $Q((a + \Delta x), f(a + \Delta x))$  دو نقطه روی گراف باشند میل خط عبور کننده از دو نقطه  $P$  و  $Q$  از رابطه زیر بدست می آید.

$$m_{PQ} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} \Rightarrow m_{PQ} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

اگر نقطه  $Q$  به سمت نقطه  $P$  میل کند ( $Q \rightarrow P \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$ ) در این صورت مستقیم قاطع  $PQ$  به خط مماس  $T$  بر منحنی گراف در نقطه  $P$  تبدیل می شود که میل این خط مماس همان مشتق تابع در نقطه  $P$  است



$$m = f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

مثال:

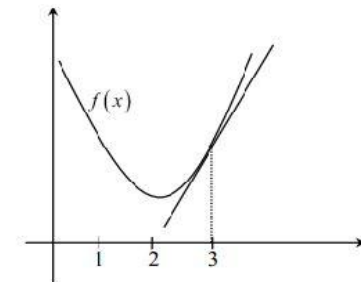
$$f(x) = x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$f'(3) = 10$$

$$f'(-3) = -2$$

$$f'(4) = 12$$



در این حالت  $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  و  $f'(x) = 2x$ ، در نتیجه قاعده زنجیره ای (I) شکل زیر را بخود میگیرد.

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2+1}) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

**قضیه 2 (قاعده زنجیره ای).** فرض کنیم  $f$  در  $x$  و  $g$  در  $f(x)$  مشتق پذیر باشد، در این صورت تابع مرکب  $f \circ g$  در  $x$  مشتق پذیر است و مشتقش از رابطه ذیل بدست می آید.

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (I')$$

**ثبوت (اختیاری).** چون  $g$  در  $f(x)$  مشتق پذیر است، داریم

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) \vee \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) + \varepsilon(\Delta y) \quad (II)$$

که در آن  $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$ . بنابه (وقتی که  $x \rightarrow a$ ،  $f(x) \rightarrow L$  اگر فقط اگر  $f(x) = L + \varepsilon(x)$ ، که در آن وقتی  $x \rightarrow a$ ،  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ ) با ضرب رابطه (II) در  $\Delta y$  در مییابیم

$$g(y+\Delta y) - g(y) = [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)]\Delta y \quad (III)$$

مهم است توجه کنیم که اگرچه (III) با فرض  $\Delta y \neq 0$  نوشته شده است، فرمول (III) حاصل از (II)

برای  $\Delta y \neq 0$ ، حتی در صورت  $\Delta y = 0$  نیز درست است، زیرا افزایش  $g(y+\Delta y) - g(y)$

صرف نظر از انتخاب  $\varepsilon(0)$ ، برای  $\Delta y = 0$  صفر است. تا ب حال  $\varepsilon(\Delta y)$  فقط برای  $\Delta y \neq 0$  تعریف شده است، ولی اکنون قلمرو  $\varepsilon(\Delta y)$  را با فرض  $\varepsilon(0) = 0$  وسیع ساخته  $\varepsilon(\Delta y)$  را در  $\Delta y = 0$  پیوسته می سازیم. حال (III) را به  $\Delta x$  یعنی نمو متحول مستقل، تقسیم کرده و لیمت آن را وقتی  $\Delta x \rightarrow 0$  می گیریم. این کار نتیجه می دهد که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y+\Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (IV)$$

که در آن

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad (V)$$

تزايد متحول مستقل  $y$  است. به علاوه، چون  $f$  در  $x$  مشتق پذیر است و لذا در  $x$  پیوسته است  $\Delta x \rightarrow 0$  ایجاب می کند که  $\Delta y \rightarrow 0$ . در نتیجه

**قضیه 1.** مشتق تابع جذری درجه دوم مساوی است به مشتق تابع مجذور بر دو چند همان تابع جذری در مخرج یعنی

$$y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**ثبوت.**

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left( \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

میدانیم که  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$  است، بنا بر این  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$  میباشد، فلذا

$$y' = u' \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**مثال 1.** مشتق تابع  $f(x) = \sqrt{6x^2 - 7x}$  در  $x = 3$  محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 7x)'}{2\sqrt{6x^2 - 7x}} = \frac{12x - 7}{2\sqrt{6x^2 - 7x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{29}{2\sqrt{54 - 21}} = \frac{29}{2\sqrt{33}} \quad \text{حل-}$$

**مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره ای**

هیچیک از قواعد مشتقگیری که تاکنون ثابت شده اند طرز مشتقگیری از توابع مرکب نظیر  $\sqrt[3]{x^2+1}$  و یا  $\sin(\sin x)$  را به ما نمایی گوید، لذا اینک به اثبات قاعده دیگری می پردازیم که مشتق تابع مرکب را بر حسب مشتقات توابع مؤلفه آن بیان می کند، قاعده زنجیره ای موسوم است، به قدر کافی

ساده ولی اثبات آن کمی پیچیده می باشد. فرض کنیم  $f$  و  $g$  دو تابع باشند، بطوریکه  $f$  در  $x$  و  $g$  در  $f(x)$ ، یعنی مقدار  $f$  در  $x$ ، مشتق پذیر باشد. بزودی نشان می دهیم که تابع مرکب  $g(f(x))$  نیز در  $x$  مشتق پذیر بوده و دارای مشتق

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \quad (I)$$

می باشد که در آن پریم مشتق نسبت به شناسه تابع را نشان می دهد، مثلاً هرگاه  $f(x) = x^2 + 1$  و  $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ، آنگاه  $g(f(x)) = \sqrt[3]{x^2+1}$ ، به علاوه،  $f$  برای هر  $x$  مشتق پذیر است حال آنکه  $g$  برای هر  $x > 0$  و در نتیجه برای هر قیمت از  $f$  زیرا  $1 \geq x^2 + 1$  مشتق پذیر میباشد،

ثبوت. ابتدا تابع مذکور را به شکل تابع طاقت دارنوشته و نظر به قاعده زنجیره ای مشتق می

$$y = u^{\frac{n}{m}} \Rightarrow y' = \frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} \cdot u' =$$

گیریم، یعنی

$$\frac{u'n}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

مثال 1. مشتق تابع  $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 4)^2}$  را در  $x = 3$  دریابید.

حل- فرار قاعده فوق داریم

$$y' = \frac{2 \cdot (x^2 - 4)' \cdot \frac{1}{5} (x^2 - 4)^{-\frac{4}{5}}}{1} = \frac{2 \cdot 2x}{5 \sqrt[5]{(x^2 - 4)^4}} \Rightarrow f'(3) = \frac{12}{5 \sqrt[5]{125}}$$

مثال 2. مشتق تابع  $y = \sqrt[6]{10x^2 - 8}$  را دریابید.

حل-

$$y' = \frac{(10x^2 - 8)'}{6 \sqrt[6]{(10x^2 - 8)^5}} = \frac{20x}{6 \sqrt[6]{(10x^2 - 8)^5}} = \frac{10x}{3 \sqrt[6]{(10x^2 - 8)^5}}$$

مثال 3. مشتق تابع  $f(x) = \frac{-5}{\sqrt{2x+5}}$  را در  $x = 2$  محاسبه کنید.

حل-

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (\sqrt{2x+5})'}{(\sqrt{2x+5})^2} = \frac{5}{\sqrt{2x+5}} \cdot \frac{1}{2x+5} = \frac{5}{(2x+5)\sqrt{2x+5}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{27}$$

### مشتقات توابع مثلثاتی

1. مشتق تابع  $y = \sin x$  به مساوی به  $y' = \cos x$  است.

ثبوت. با در نظر داشت تحلیل الجبری مشتق داریم

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

حالا با استفاده از فرمول  $\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$  داریم که

$$\Delta y = 2 \sin\left(\frac{x + \Delta x - x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + \Delta x + x}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0 \text{ (VI)}$$

این امر که  $\varepsilon(0) = 0$  و در نتیجه  $\varepsilon(\Delta y) = 0$  در  $\Delta y = 0$  پیوسته است در این نتیجه گیری اهمیت دارد

زیرا برقراری  $\Delta y \neq 0$  را نمی توان تضمین کرد (به یاد آورید که  $\Delta y$  دلخواه نیست بلکه با مقدار  $\Delta x$  معین می شود) از روابط (IV) تا (VI) نتیجه می شود که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

یا معادلاً (VII)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

زیرا  $y = f(x)$  و  $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$  حال ثبوت قاعده زنجیره ای (I) یا (II) کامل است، زیرا لیمت (VII) چیزی جز مشتق تابع مرکب  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  نیست. [1]

اگر  $f(x)$  به  $u$  و  $g(f(x))$  را  $v$  فرض کنیم پس مشتق تابع مرکب را می نویسیم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

در صورتیکه تابع مرکب از سه تابع تشکیل شده باشد، پس مشتق آن مساوی است به

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x \vee (g(f(h(x))))' = g'(f(h(x))) \cdot f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

مثال 1. مشتق تابع  $y = \sqrt{x^5 - 6x + 7}$  را دریابید.

حل- در اینجا  $u = x^5 - 6x + 7$  و  $y = \sqrt{u}$  است، پس و  $u'_x = 5x^4 - 6$  پس می نویسیم که

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{(5x^4 - 6)}{2\sqrt{x^5 - 6x + 7}}$$

مثال 2. مشتق  $y' = 5(x^2 - 4x)^4 \cdot (2x - 4) \Rightarrow y'(2) = 5 \cdot (0) \cdot (4 - 8)^4 = 0$  تابع  $y = (x^2 - 4x)^5$  را در  $x = 2$  دریابید.

حل-

قضیه 7. مشتق تابع  $y = \sqrt[m]{u^n}$  به مساوی است به:

$$y' = \frac{nu'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

2.  $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u \cdot \cos u \cdot u'$
3.  $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \cdot u'$
4.  $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u \cdot \sin u \cdot u'$
5.  $y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$
6.  $y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u \cdot \sec^2 u \cdot u'$
7.  $y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u \cdot u'$
8.  $y = \cot^n u \Rightarrow y' = n \cot^{n-1} u \cdot \csc^2 u \cdot u'$
9.  $y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$
10.  $y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u \cdot \tan u \cdot u'$
11.  $y = \csc u \Rightarrow y' = -\csc u \cdot \cot u \cdot u'$
12.  $y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u \cdot \csc u \cdot \cot u \cdot u'$

نظریه  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  داریم که  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$  پس :  $y' = 1 \cdot \cos(1 + \frac{0}{2}) = \cos x$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\sin\left(1 + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y' = -\sin x \cdot 1$$

$$= -\sin x$$

2- مشتق تابع  $y = \cos x$  مساوی است به  $y' = -\sin x$ .

ثبوت. طبق معمول به ثبوت می رسانیم

3- مشتق تابع  $y = \tan x$  مساوی است به :  $y' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

4- مشتق تابع  $y = \cot x$  مساوی است به :  $y' = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(-\sin x) \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

5- مشتق تابع  $y = \sec x$  مساوی است به :  $y' = \sec x \cdot \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{(-1) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

6- مشتق تابع  $y = \csc x$  مساوی است به :  $y' = \csc x \cdot \cot x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(-1) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتقات توابع مرکب مثلثاتی را قرار ذیل داریم. [2]

$$1. y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$$