

## راهنمایی آموزشی ریاضی تسریعی ب - دوره یازدهم

## اهداف آموزشی

**هدف کلی:** فراگیران در پایان این بخش بتوانند مفاهیم بنیادی هندسه فضایی را درک کرده، روابط بین خط ها و مستوی ها در فضا را تحلیل و با رسم اشکال هندسی، موقعیت نسبی آنها را تشخیص دهند.

## اهداف تعلیمی:

## 1. مفاهیم ابتدائی و اسیوم ها

- فراگیران بتوانند مفاهیم اولیه مانند نقطه، خط، مستوی و فضا را تعریف کنند.
- با اصول و اسیوم های بنیادی هندسه فضایی آشنا شوند.

## 2. خط و مستوی در فضای سه بعدی

- تشخیص دهند که چگونه یک خط یا مستوی در فضا تعریف می شوند.
- رابطه بین دو نقطه و خط، و بین خط و مستوی را توضیح دهند.

## 3. خطوط مستقیم و موازی در فضا

- خطوط مستقیم و موازی را در فضای سه بعدی تشخیص دهند
- شرایط موازی بودن دو خط در فضا را توضیح دهند.

## 4. زاویه بین دو خط در فضا

- بتوانند زاویه بین دو خط متقاطع در فضا را پیدا کنند.
- از فرمول ها برای محاسبه زاویه استفاده شود.

## 5. خطوط و مستوی های موازی در فضا

- تفاوت بین خط های موازی و مستوی های موازی را تشریح کنند
- شرایط ریاضی برای تعیین موازی بودن آنها را بنویسند.

## 6. خطوط مستقیم و مستوی های متعامد.

- شرایط تعامد (عمود بودن) بین خط و یک مستوی را بیان کنند.
- تشخیص دهند که کدام خط و مستوی بر هم عمود هستند.

## 7. مستوی های موازی در فضا

- ویژگی ها و شرایط موازی بودن دو مستوی را تشخیص دهند.
- در رسم اشکال سه بعدی، مستوی های موازی را مشخص کنند.

## خلص مطالب درس

## ❖ مفاهیم اساسی و اسیوم ها

اصطلاحات اولیه: مفاهیم اند که بدون تعریف قبول می شوند مانند نقطه، خط، مستوی و

فضا

دلیل و برهان: عمل ذهنی است که از یک سلسله گزارش های قبلی درست به گزارش های بعدی می رسد و درستی آن را می توان بر اساس آنچه قبلا پذیرفته شده است را قبول کرد.

**قضیه:** ادعای که برای اثبات آن به دلیل و برهان نیاز باشد.

**خط:** یک مفهوم ذهنی است که بدون تعریف قبول شده است (یکی از اصطلاحات اولیه است).

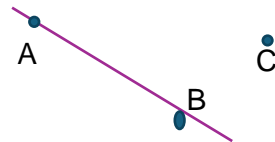
**خط مستقیم:** نقاط پیهم و متصل را خط می نامند و کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه خط مستقیم است، خط مستقیم نیز یکی از مفاهیم و اصطلاحات اولیه اند.

اکیوم های خط:

✓ دو نقطه مشخص تنها و تنها یک خط مستقیم را مشخص می نماید.



✓ هر خط مستقیم دارای دو نقطه مشخص اند و حد اقل سه نقطه وجود دارد که در یک خط مستقیم شامل نیست.



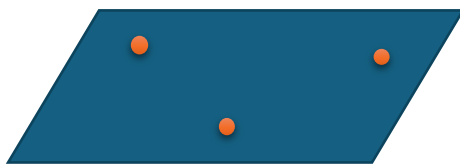
✓ بین هر دو نقطه یک خط مستقیم می توان نقطه بی مشخصی را بدست آورد.



**مستوی:** به هر سطح هموار مستوی گفته می شود مانند، سطح آب، روی تخته سفید صنف... و مستوی نیز یکی از مفاهیم اولیه اند.

**اکیوم های مستوی:**

✚ در هر مستوی کم از کم سه نقطه وجود دارد که به امتداد یک خط مستقیم نیست.



### اوضاع نسبی دو خط مستقیم با یک دیگر

دو خط مستقیم در یک مستوی موازی نامیده می شود اگر هیچ نقطه بی مشترک نداشته باشد.

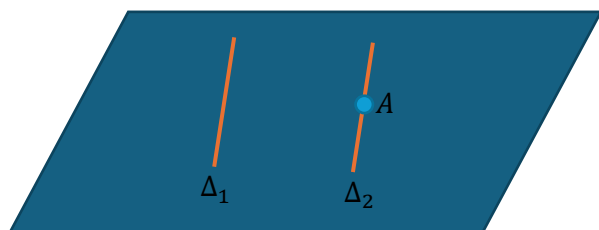
دو خط مستقیم که در یک مستوی یک نقطه مشترک داشته باشد باهم متقاطع گفته می شود.

دو خط مستقیم که هم مستوی نبوده و نقطه مشترک نداشته باشند بنام خطوط متنافر یاد می شود.

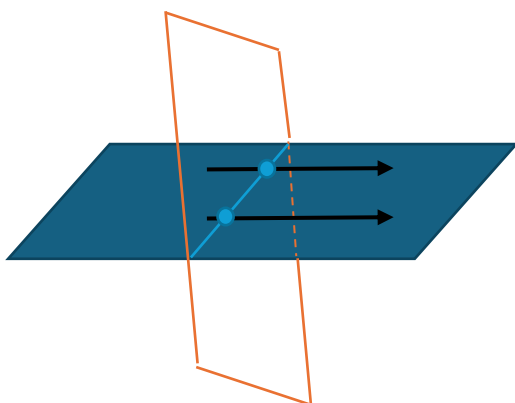
### ❖ خطوط مستقیم موازی در فضا

**تعریف:** دو خط مستقیم که در یک مستوی واقع بوده و هیچ نقطه مشترک نداشته باشند موازی نامیده می شود.

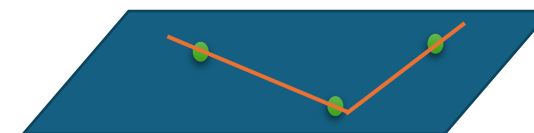
**قضیه 1:** از یک نقطه خارج یک خط مستقیم تنها یک مستقیم موازی با آن رسم می شود و بس



**قضیه 2:** هرگاه دو خط مستقیم موازی باشد و یک مستوی یک از آنها را قطع کند دیگرش را نیز قطع می کند.



از سه نقطه که به استقامت یک خط مستقیم نباشد یک مستوی می گذرد.



اگر دو نقطه یک خط مستقیم در یک مستوی باشد، این خط شامل مستوی است.



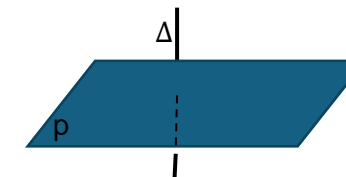
### ❖ خط و مستوی در فضای سه بعدی

فضای را که در آن زندگی می کنیم سه بعدی است و یکی از مفاهیم اولیه می باشد. یا به عبارت دیگر: فضا عبارت از مجموعه نقاط است، طوریکه خط دارای یک بعد و مستوی دارای دو بعد نیز جزء از فضای سه بعدی اند.

اوضاع نسبی یک خط مستقیم و یک مستوی

▪ خط و مستوی متقاطع است اگر یک نقطه مشترک داشته باشد.

خط  $\Delta$  و مستوی  $P$  باهم متقاطع اند



▪ خط و مستوی منطبق است اگر دو یا چند نقطه مشترک داشته باشد.

خط مستقیم  $\Delta$  و مستوی  $P$  باهم منطبق اند.



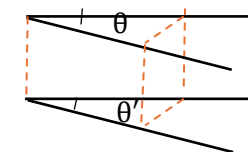
▪ خط و مستوی موازی اند اگر هیچ نقطه مشترک نداشته باشد.

خط  $\Delta$  و مستوی  $P$  باهم موازی اند



## ❖ زاویه بین خط مستقیم در فضا

قضیه: دو زاویه در فضا که دارای اضلاع موازی و هم جهت باشند باهم مساوی اند.



زاویه های  $\theta$  و  $\theta'$  باهم مساوی اند.

## ❖ مستقیم های موازی و مستوی های موازی در فضا

قضیه 1: اگر یک خط مستقیم به یک خط مستقیم یک مستوی، موازی باشد. خط مستقیم مذکور به همین مستوی موازی می باشد.

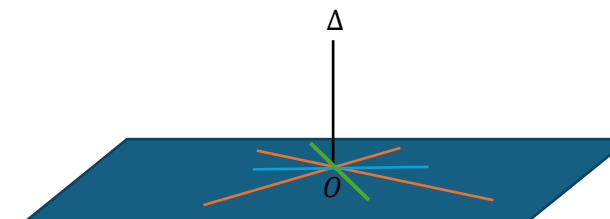


خط  $\Delta$  با خط  $d$  موازی اند.

قضیه 2: هرگاه یک خط مستقیم به هر یکی از دو مستوی متقاطع موازی باشد خط مستقیم مذکور به فصل مشترک مستوی های ذکر شده موازی اند.

## ❖ خطوط مستقیم و مستوی های متعامد در فضا

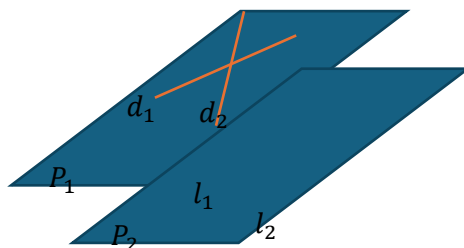
هرگاه یک خط مستقیم  $\Delta$  بالای دو مستقیم که آنها را در یک نقطه قطع کند عمود باشد، بالای تمام مستقیم های که در مستوی این دو خط متقاطع واقع اند و از همان نقطه بگذرد عمود اند.



در شکل فوق مستقیم  $\Delta$  بالای تمام مستقیم های که از نقطه  $O$  گذشته است، عمود اند.

## ❖ مستوی های موازی در فضا

قضیه: اگر دو خط مستقیم متقاطع یک مستوی با دو خط مستقیم متقاطع مستوی دیگر موازی باشد، مستوی های مذکور باهم موازی اند.



در شکل مقابل .

$$d_2 // l_2 \text{ و } d_1 // l_1$$

پس در نتیجه مستوی های  $P_1 // P_2$

**فعالیت ها:** شاگردان فعالیت های ذیل را انجام دهند.

**فعالیت اول:** یک قلم و یک ورق کاغذ را بگیرند و با مارکر روی ورق کاغذ دو نقطه بگذارد و بعد، با قلم خط مستقیم را نشان دهد.

**فعالیت دوم:** یک تخته سفید خورد بردارد و با مارکر روی آن سه نقطه اختیاری بگذارد و نشان دهد که به صورت عمود سه نقطه در یک مستوی وجود دارد که به امتداد خط مستقیم نیست.

**فعالیت سوم:** شاگردان یک چوکی را روی سطح کاملاً هموار (کف اتاق کاشی شده) بگذارد و بگوید که چرا همزمان هر چهار پایه چوکی روی سطح قرار نمی گیرند و تنها سه پایه چوکی روی سطح قرار می گیرند؟

**عنوان 1: ترادف ها**

**اهداف آموزشی**

- ❖ در پایان این درس شاگردان به مفهوم ترادف آشنا گردد.
- ❖ شاگردان بتوانند ترادف را تعریف و مثال از آن کار نمایند.
- ❖ شاگردان به روش های حل مثال های کنکوری آشنا شوند.

**تعریف 1:** ترادف عبارت از ردیف اعداد، اشیا و قیمت های اند که اصل ترتیب در آن رعایت شده باشد.

**مثال:** ترتیب صنف های مکتب، ترتیب سن بین اولاد های یک فامیل... نمونه های از ترادف اند.



**تعریف 2:** ترادف عبارت از تابع است که ناحیه تعریف آن اعداد طبیعی و ناحیه قیمت آن اعداد حقیقی باشد.

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

طریق ارائه ترادف: هر ترادف به اساس ترتیب ذیل نوشته می شود.

$$a_n : a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots \ a_n$$

رابطه فوق بنام فورمول ترادف نیز یاد می شود. که هر کدام آنها را حد ترادف و تمام آنها را حدود ترادف ها می نامند. حدود یک ترادف بر اساس حد عمومی  $a_n$  تعریف و دریافت می شود.

**مثال:** شکل انکشافی ترادف  $a_n = \frac{n+1}{n}$  را بنویسید.

حل: در ترادف فوق بجای  $n$  اعداد طبیعی را قیمت می دهیم و شکل انکشافی ترادف دریافت می گردد.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{شکل عمومی ترادف} \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{7}{6} \quad \dots \quad \frac{n+1}{n}$$

**نکته:** اگر حدود یک ترادف معین باشد آنرا ترادف محدود و اگر حدود یک ترادف معلوم نباشد، آنرا ترادف نامحدود می نامند.

**تزايد و تناقص ترادف ها**

اگر حدود یک ترادف به ترتیب ازدیاد یابد ترادف را متزايد می نامند و اگر حدود آن به ترتیب کاهش یابد آنرا ترادف متناقص می نامند.

ترادف متزايد ... 12 10 8 6 4 2

ترادف متناقص ... -9 -6 -3 0 3

**مثال:** اگر حد عمومی یک ترادف  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$  باشد، 5 حد ترادف را دریافت نمائید.

حل: از تعریف ترادف ها استفاده نموده قیمت گذاری می نمائیم.

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$a_n : \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}$$

**انواع ترادف:** ترادف ها به صورت عموم دو نوع اند.

**الف) ترادف حسابی**

اگر رابطه بین حدود متعاقب یک ترادف بر اساس جمع و تفریق باشد، ترادف را حسابی می نامند. که همان رابطه بین حدود متعاقب همیشه یک عدد ثابت اند که آنرا تفاضل مشترک (فرق مشترک) می نامند و به حرف  $d$  نشان میدهد.

در ترادف حسابی تزايد و تناقص نظر به  $d$  تعیین می گردد، یعنی اگر  $d > 0$  باشد، ترادف متزايد و اگر  $d < 0$  باشد ترادف متناقص است.

**مثال:** ترادف ... 18 15 11 8 5 2 چگونه یک ترادف اند.

حل: در ترادف فوق  $d = 3$  اند و  $3 > 0$  می باشد، پس ترادف حسابی فوق متزايد است.

**دریافت حد  $n$  - ام در یک ترادف حسابی**

حد  $n$  - ام را که حد دلخواه نیز می نامند عبارت از حد ترادف است که حدود ترادف را تعیین می کند.

حد دلخواه در ترادف قرار ذیل دریافت می گردد.

حد اول	حد دوم	حد سوم	حد چهارم	حد $n$ -ام
$a$	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$ .....	$a+(n-1)d$
↓	↓	↓	↓ .....	↓
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$ .....	$a_n$

در نتیجه بین  $a_n$  و  $n, d, a_1$  رابطه  $a_n = a_1 + (n-1)d$  برقرار است.

یعنی حد دلخواه در ترادف حسابی عبارت اند از



$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad a_m = a_1 + (m - 1)d$$

$$a_n - a_m = nd - md = d(n - m)$$

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

**مثال:** حد پنجم یک ترادف 27 و حد نهم آن 47 است، تفاضل مشترک ترادف را دریافت نمائید.

**حل:** با استفاده از فرمول بالا داریم که

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{47 - 27}{9 - 5} = \frac{20}{4} = 5$$

### ترادف هارمونیک

معکوس ترادف حسابی را ترادف هارمونیک می نامند. یعنی اگر  $a_n$  یک ترادف حسابی باشد،  $\frac{1}{a_n}$  یک ترادف هارمونیک است.

**مثال:** ترادف هارمونیک ترادف حسابی ... 24 , 17 , 10 , 3 را بنویسید.

**حل:**

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{24}, \dots$$

**اوسط هارمونیک:** اگر سه حد یک ترادف هارمونیک  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  حدود یک ترادف حسابی و  $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n+1}}$  حدود یک ترادف هارمونیک باشد، اوسط هارمونیک از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

### ب) ترادف هندسی

اگر رابطه بین حدود یک ترادف بر اساس ضرب و تقسیم باشد، ترادف را هندسی می نامند. که همین ارتباط همیشه یک عدد ثابت اند و از حاصل تقسیم حدود متعاقب ترادف بدست می آید می آید آنرا نسبت مشترک می نامند و به حرف  $r$  و گاهاً به حرف  $q$  نشان میدهد.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

**مثال:** حد 30 - ام ترادف حسابی ... 12 , 5 , -2 را دریافت نمائید.

**حل:** با استفاده از فرمول عمومی ترادف می توان قرار ذیل حد 30 - ام ترادف را دریافت نمود.

$$a_1 = -2$$

$$d = 7 \quad a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$n = 30 \quad a_{30} = -2 + (30 - 1)7$$

$$a_{30} = ? \quad a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 = -2 + 203 =$$

$$> \boxed{a_{30} = 201}$$

**فعالیت 1:** تعداد حدود ترادف حسابی 2000 , ... , 45 , 40 , 35 چند است؟ دریافت نمائید.

**فعالیت 2:** حد اول یک ترادف حسابی 3 و حد دهم آن 10 است، فرق مشترک ترادف را دریافت نمائید.

**رهنمود:** از فرمول عمومی دریافت حد دلخواه ترادف استفاده شود.

### اوسط حسابی

اگر سه حد یک ترادف حسابی به ترتیب به شکل  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  باشد، اوسط حسابی از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

**مثال:** اوسط حسابی اعداد 7 و 23 را دریافت نمائید.

**حل:** با استفاده از فرمول اوسط حسابی داریم که

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{7 + 23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

**نکته:** اگر دو حد معین  $a_m$  و  $a_n$  یک ترادف حسابی معلوم باشد، می تواند تفاضل مشترک آنرا با استفاده از فرمول ذیل دریافت نمود.

مثال: اوسط هندسی اعداد 3 و 12 را دریافت نمائید.

حل: با استفاده از فورمول اوسط هندسی داریم که.

$$\bar{x}_G = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

فعالیت ها:

1. 5 حد اول ترادف هندسی را بنویسید که حد اول آن 5 و حد اخیر آن  $\frac{5}{16}$  باشد.

2. حد دوازدهم ترادف هندسی ... ، 2 ، 4 ، 8 را دریافت نمائید.

3. اوسط هندسی اعداد  $\sqrt{3}$  و  $\frac{\sqrt{3}}{4}$  را دریافت نمائید.

مجموعه قسمی ترادف ها

برای دریافت مجموعه قسمی یک ترادف، حدود ترادف را به ترتیب جمع می کنیم. مجموعه قسمی ترادف ها را به حرف S نشان میدهد.

اگر  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$  یک ترادف باشد، مجموعه قسمی آن قرار ذیل ارائه می شود.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

در مجموعه های قسمی جهت اختصار از سمبول سیگما استفاده می شود که دارای اندکس بالای، اندکس پائینی و فورمول تحت سیگما است.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k$$

مثال:  $\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i}$  را به شکل انکشاف یافته آن بنویسید.

حل: با در نظر داشت فورمول تحت سیگما و اندکس ها می توان قرار ذیل نوشت.

$$\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13068}{5040}$$

مجموعه قسمی n حد اول ترادف حسابی

اگر حدود یک ترادف حسابی را جمع کنیم به آن را سلسله حسابی می نامند که سلسله هاس حسابی دو نوع اند، اگر تعداد حدود مشخص باشد آنرا سلسله حسابی محدود و اگر تعداد حدود نا مشخص باشند آنرا سلسله حسابی نامحدود می نامند. یعنی

تزايد و تناقص در ترادف هندسی نیز بر اساس قیمت r تعیین می گردد، یعنی اگر  $r > 1$  باشد، ترادف متزايد و اگر  $r < 1$  باشد ترادف متناقص می نامند. اما اگر  $r = 1$  باشد ترادف ثابت اند.

ترادف متزايد ... 2 ، 4 ، 8 ، 16 ، 32

ترادف متناقص ...  $\frac{1}{27}$  ،  $\frac{1}{9}$  ،  $\frac{1}{3}$  ، 1

ترادف ثابت ... 5 ، 5 ، 5 ، 5

دریافت حد n - ام در ترادف هندسی

اگر a حد اول و r نسبت مشترک و n تعداد حدود یک ترادف هندسی باشد، حد n-ام یا دلخواه از رابطه ذیل دریافت می گردد.

حد n-ام	حد پنجم	حد چهارم	حد سوم	حد دوم	حد اول
$aq^{n-1}$ .....	$aq^4$	$aq^3$	$aq^2$	$aq$	$a_1$
↓	↓	↓	↓	↓	↓
$a_n$ .....	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$

یعنی فورمول حد دلخواه یا n-ام عبارت اند از.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

مثال: حد ششم ترادف ... ، -10 ، 5 را دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$r = -2 \quad a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_6 = 5 \cdot (-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5 \cdot (-32)$$

$$n = 6$$

$$a_6 = -160$$

اوسط هندسی

اگر دو حد یک ترادف هندسی معلوم باشد اوسط هندسی آن قرار ذیل دریافت می گردد.

$$a_n = \sqrt{(a_{n-1}) \cdot (a_{n+1})}$$

مثال: در یک ترادف هندسی حد اول برابر 2 و نسبت مشترک آن برابر با  $r = \frac{1}{2}$  است، مجموعه 5 حد اول آنرا دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 2 \quad r = \frac{1}{2} \quad n = 5 \quad S_5 = ?$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{16} = \frac{31}{8}$$

$$S_5 = \frac{31}{8}$$

فعالیت ها:

1. سلسله های هندسی متباعد چیست؟ با ذکر مثال تشریح کنید.
2. سلسله هندسی متباعد چیست؟ با ذکر مثال تشریح کنید.
3. اگر حد اول یک سلسله هندسی 5 و نسبت مشترک آن  $\frac{1}{3}$  باشد، مجموعه 7 حد اول آن را دریافت نمائید.
4. اگر حد اول یک ترادف هندسی 3 و مجموع 6 حد آن 3320 باشد، نسبت مشترک سلسله هندسی را دریافت نمائید.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{سلسله محدود}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{سلسله نامحدود}$$

سلسله محدود حسابی را مجموعه قسمی نیز می نامند و مجموعه قسمی  $n$  حد یک ترادف که به  $S_n$  نشان داده می شود از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

مثال: مجموعه 201 حد اول ترادف حسابی ... , 15 , 11 , 7 را دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 7 \quad d = 4 \quad n = 201 \quad S_n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ = \frac{201}{2}[14 + 800]$$

$$S_{201} = \frac{201}{2}[814] = 81807$$

فعالیت ها:

1. حاصل جمع 200 حد ترادف اعداد جفت را دریابید.
2. حاصل جمع 210 حد اول ترادف اعداد تاق را دریابید.
3. مجموعه قسمی 12 حد اول ترادف حسابی ... , 11 , 8 , 5 , 2 را دریابید.

مجموعه قسمی  $n$  حد اول یک ترادف هندسی

اگر حدود یک ترادف هندسی را باهم جمع نمائیم آنرا سلسله هندسی می نامند.

مجموعه قسمی  $n$  حد اول یک ترادف هندسی از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$