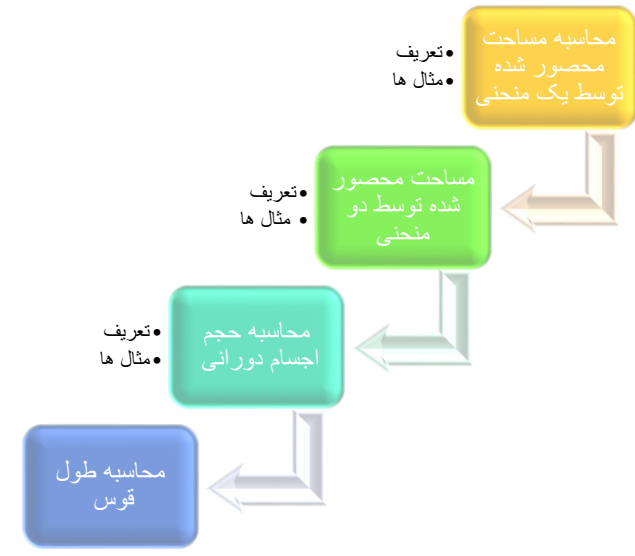


راهنمایی آموزشی ریاضی صنف دوازدهم - دوره دوازدهم

آنچه قرار است درین بخش بخوانیم



اهداف آموزشی: در پایان این بخش شاگردان باید به نتایج ذیل دست یابند.

- ✓ محاسبه سطوح محصور شده توسط گراف منحنی‌ها را بدانند.
- ✓ مساحت محصور شده بین دو منحنی توابع را دریافت کرده بتوانند.
- ✓ حجم اجسام دورانی را با استفاده از انتیگرال معین دریافت کرده بتوانند.
- ✓ طول قوس را محاسبه کرده بتوانند.
- ✓ مثال‌های مربوط به درس را کار کرده بتوانند.

محاسبه مساحت محصور شده توسط یک منحنی

انتیگرال $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ مساحت سطحی را نشان می‌دهد که توسط منحنی تابع $y = f(x)$ و محور x در انتروال $[a, b]$ محصور شده است.

اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متممادی و مثبت باشد، یعنی $y = f(x) \geq 0$ گردد درین حالت گراف تابع $f(x)$ همیشه در قسمت بالای محور x قرار دارد و مثبت و اگر $f(x) \leq 0$ باشد درین صورت گراف تابع همیشه در قسمت پائین x قرار دارد و منفی است.

مثال 1: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ و محور x را محاسبه نمائید.

حل 1: برای تعیین نمودن سطح محصور شده ابتداء نقطه بحرانی و تقاطع با محور x را به دست می‌آوریم.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ نقطه بحرانی}$$

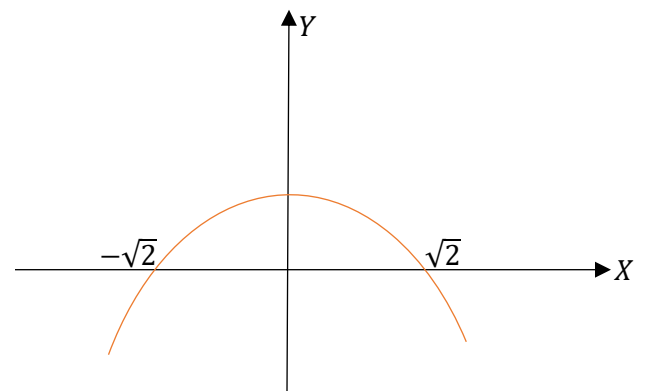
$$y = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$= \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

نقاط تقاطع با محورات $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \left(\left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} \right)$$

$$A = 2 \left(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0 \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$





$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} \Rightarrow A = \frac{49}{6}$$

محاسبه مساحت محصور شده توسط دو منحنی

برای محاسبه سطح محصور شده توسط دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ در صورتیکه $f(x) > g(x)$ باشد، یعنی گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار داشته باشد، پس ابتداء نقطه تقاطع هر دو منحنی را یافته بعداً مساحت بین منحنی با محور x را در انتروال $[a, b]$ محاسبه می کنیم.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

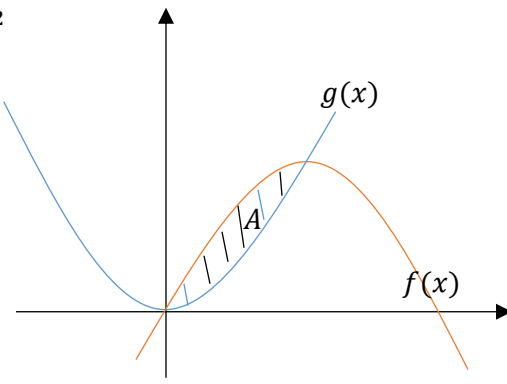
اگر $f(x) < g(x)$ باشد، یعنی گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار داشته باشد داریم که.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

مثال 1: مساحت سطح محصور شده بین منحنی های $f(x) = 2x - x^2$ و $g(x) = x^2$ را حساب کنید.

حل 1: در قدم نخست نقاط تقاطع هر دو منحنی را دریافت می کنیم، برای این کار معادلات هر دو منحنی را باهم برابر قرار میدهیم.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - x^2, & g(x) &= x^2 \\ f(x) &= g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \\ 2x - x^2 - x^2 &= 0 \\ 2x - 2x^2 &= 0 \\ 2x(1 - x) &= 0 \\ 2x = 0 \Rightarrow x_1 &= 0 \\ 1 - x = 0 \Rightarrow x_2 &= 1 \end{aligned}$$



مثال 2: گراف منحنی تابع $y = x^2 - 3x$ را رسم و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی مذکور و محور x را در انتروال $[-1, 4]$ محاسبه کنید.

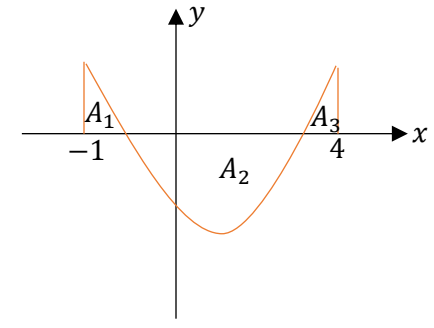
حل 2:

$$y = x^2 - 3x \Rightarrow y' = 2x - 3$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \quad \text{نقطه بحرانی} \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$



$$\begin{aligned} A &= A_1 - A_2 + A_3 \\ &= \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx \end{aligned}$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4$$

بعد از وضع اندکس های بالای و پائین بجای متحول ها داریم که

$$A = -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}27 - \frac{3}{2}9\right) + \left(\frac{1}{3}64 - \frac{3}{2}16\right) - \left(\frac{1}{3}27 - \frac{3}{2}9\right)$$



$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx$$

$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + 5\frac{25}{2} \right) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}$$

$A = \frac{125}{6}$

محاسبه احجام دورانی

در صنوف پائین تر ما حجم اجسام را با استفاده از فورمول های که بدون ثبوت آنها را قبول کرده بودیم حل می کردیم، اما در اینجا فورمول های حجم اجسام را با استفاده از انتیگرال معین ثبوت می کنیم.

- هرگاه مساحت منحنی تابع متمادی $y = f(x)$ توسط خطوط $x = a$ و $x = b$ محصور شده باشد. پس حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی تابع فوق حول محور x به وجود می آید تقریباً استوانه پی شکل است که از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

- اگر مساحت منحنی $x = f(y)$ توسط خطوط $y = c$ و $y = d$ محصور شده باشد. مساحت مقطع چنین استوانه نظر به محور y ، πr^2 بوده، ارتفاع آن $\Delta y = d - c$ و شعاع آن $x = r$ است. حجم که از دوران این مساحت به دست می آید طور ذیل است.

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi x^2 dx = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

1. حجم کره را با استفاده از انتیگرال محاسبه کنید.

ثبوت:
 $x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$

نقاط تقاطع هر دو منحنی عبارت اند از $(1,1)$ و $(0,0)$ ، حالا مساحت محصور شده را میتوان قرار ذیل دریافت نمود.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2] dx = \int_0^1 [2x - x^2] dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$A = \frac{1}{3}$

مثال 2: مساحت محصور شده بین منحنی $f(x) = x^2 - 6x + 2$ و خط $g(x) = 2 - x$ را حساب کنید.

حل 2: اول نقاط تقاطع خط و منحنی را دریافت می کنیم.

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

$$g(x) = 2 - x$$

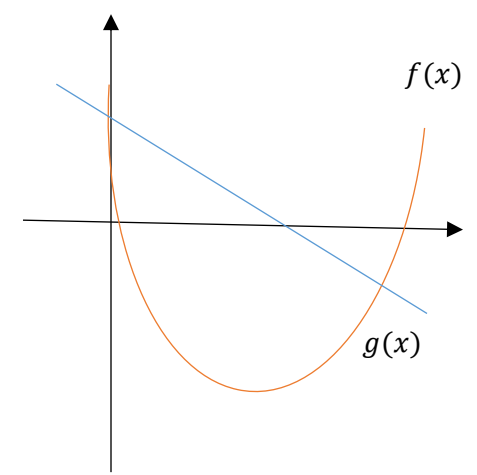
$$f(x) = g(x)$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 2 - x$$

$$x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0$$

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$



نقاط تقاطع $(0,2)$, $(5, -3)$

از شکل معلوم می شود که گراف $g(x)$ بالای گراف $f(x)$ قرار دارد، پس داریم که:

از شکل معلوم می شود که گراف $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار دارد به این معنی که:

$$g(x) > f(x)$$



$$= 2\pi \left[b^2 x - \frac{b^2 x^3}{a^2 3} \right]_0^a = 2\pi \left[\left(b^2 a - \frac{b^2 a^3}{a^2 3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left[b^2 a - \frac{b^2 a}{3} \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{2b^2 a}{3} \right] \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi a^2 b \text{ حجم بیضوی}$$

مثال 1: حجم جسم را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y = x^2$ و خط $y = 1$ حول محور y به دست می آید حساب کنید.

حل:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \left[\frac{1}{2} \pi y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi \Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

مثال 2: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = x$ حول محور x به وجود می آید.

حل 2:

$$\begin{cases} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{cases} \Rightarrow y_2 > y_1$$

$$= \int_a^b [\pi(y_2^2 - y_1^2)] dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0 \right) - \left(\frac{1}{5} - 0 \right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{2\pi}{15} \Rightarrow V = \frac{2\pi}{15}$$

محاسبه طول قوس

❖ اگر منحنی $y = f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ داده شده باشد با توجه به پارامتر مانند x طول قوس منحنی از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$V = \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

2. حجم مخروط را توسط انتیگرال دریافت نمائید.

چون سطح مخروطی از دوران خط $y = mx$ حول محور x بدست می آید، بنا برین:

$$V = \int_0^h \pi y^2 dx$$

$$= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi h}{3} (mh)^2 \xrightarrow{mh=r} \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \text{ حجم مخروط}$$

3. حجم بیضوی را با استفاده از انتیگرال دریافت نمائید.

میدانیم که معادله نورمال بیضوی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ است و رابطه $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ نیز درست است و داریم که.

$$V = \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx = 2\pi \int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx$$

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(x) + 1} dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} dy$$

$$= \int_1^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^3} \right]_1^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{10^3} - \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 1\right)^3} \right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$

فعالیت‌ها

- مساحت محصور شده بین منحنی $y = \sin x$ و محور x را در انتروال $[0, 2\pi]$ محصور شده دریافت کنید.
- مساحت محصور شده بین منحنی $y = x^2 + 3$ در انتروال $[-2, 4]$ را دریافت کنید.
- طول قوس منحنی $x = t^2$ و $y = t^3$ را در انتروال $1 \leq x \leq 2$ دریافت کنید.
- محیط دایره $x^2 + y^2 = r^2$ را دریافت نمائید.
- مساحت محصور شده بین منحنی‌ها $y = x^2$ و $y = -x^2 + 4x$ را دریافت کنید.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

مثال: طول قوس منحنی $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0 \leq x \leq 4$ حساب کنید.

حل:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^4 = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{u^3} \right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^2} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right]$$

$$= \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1)$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

❖ اگر معادله منحنی $x = f(y)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ داده شده باشد با توجه به پارامترهای مانند y طول قوس منحنی را چنین محاسبه می‌کنیم.

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(x) + 1} dy$$

مثال: طول قوس منحنی $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $1 \leq x \leq 4$ محاسبه کنید.

حل: