



راهنمایی آموزشی ریاضی صنف دهم - دوره دوازدهم

آنچه قرار است درین بخش بخوانیم

- معادله مماس و طول مماس
- دریافت مساحت مثلث در صورتیکه کمیات وضعیه راس آن معلوم باشد
- احصائیه: گراف چند ضلعی کثرت
- گراف ساقه و برگ
- چارک ها و گراف ساقه و برگ
- گراف صندوقچه بی
- مقایسه شاخص های مرکزی توسط منحنی نارمل

اهداف آموزشی: شاگردان درختم این درس قادر گردد تا:

- معادله مماس دایره را بدانند و طوب مماس را دریافت کرده بتوانند.
- مساحت مثلث را که کمیات وضعیه راس های آن معلوم باشد، دریافت بتوانند.
- علم احصائیه را تعریف کرده بتوانند.
- گراف های احصائیوی را تشریح و توضیح بتوانند.
- با انواع گراف های احصائیوی آشنا شوند و بتوانند داتا ها را در هر یک از گراف ها تنظیم نمایند.
- شاخص های مرکزی را بدانند، و با استفاده از منحنی نارمل شاخص های مرکزی را مقایسه بتوانند.

معادله مماس و طول مماس

اگر یک خط مستقیم با دایره بی که مرکز آن $C(h, k)$ و در نقطه $P_1(x_1, y_1)$ با دایره مماس باشد، پس میل شعاع مساوی است به $m = \frac{k-y_1}{h-x_1}$ و چون شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است، میل مماس مساوی است به $-\frac{h-x_1}{k-y_1}$ و چون یک نقطه خط مستقیم $P_1(x_1, y_1)$ است.

پس نظر به معادله $y - y_1 = m(x - x_1)$ داریم که

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

معادله فوق به نام معادله مماس یاد می شود. که در نقطه $P_1(x_1, y_1)$ با دایره مماس است.

نکته: اگر مرکز دایره در مبداء کمیات وضعیه قرار داشته باشد معادله مماس عبارت اند از.

$$yy_1 + xx_1 = r^2$$

مثال 1: معادله خط مستقیمی را دریابید که در نقطه $(3, 4)$ با دایره $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشد.

حل 1: چون مرکز دایره در مبداء کمیات وضعیه قرار دارد، پس داریم که.

$$y \cdot 4 + x \cdot 3 = 25 \Rightarrow 3x + 4y = 25$$

مثال 2: معادله خط مستقیم را دریابید که در نقطه $P(3, 5)$ با دایره بی که مرکز آن $(1, 2)$ است مماس باشد.

حل 2:

$$h = 1, k = 2, x_1 = 3, y_1 = 5$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1) = y - 5 = -\frac{1 - 2}{2 - 5}(x - 3)$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 21$$

طول مماس: اگر نقطه $P_1(x_1, y_1)$ که در خارج از دایره r^2 واقع باشد، مماس P_1T به این دایره رسم شود و نقطه T را به مرکز دایره وصل می کنیم درین صورت طول مماس از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$\overline{P_1T} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2}$$

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [4(-6 - 1) + 5(1 + 5) + 3(-5 + 6)]$$

$$= \frac{1}{2} (-28 + 30 + 3) = \frac{1}{2} 5 = 2.5$$

$$\Rightarrow S_{P_1P_2P_3} = 2,5$$

گراف چند ضلعی کثرت

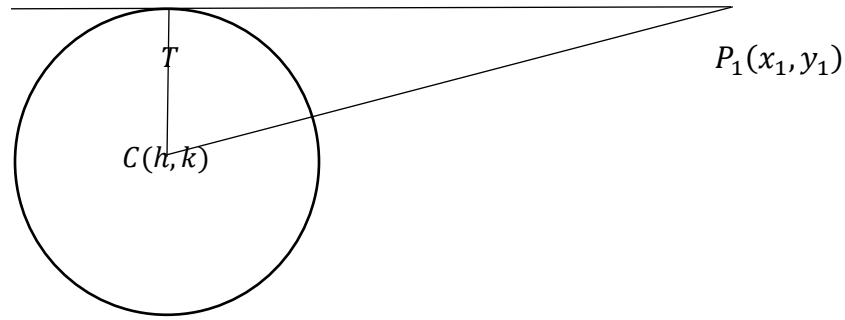
در علم احصائیه که علم تحلیل و تفسیر داتا و معلومات اند، در بعضی موارد برای بهتر نشان دادن داتا ها از روش گراف استفاده می شود، که یکی ازین گراف ها (چند ضلعی کثرت) اند.

در گراف چند ضلعی، مرکز هر دسته روی محور افقی و کثرت مطلق یا کثرت نسبی هر یک از دسته ها روی محور عمودی نشان داده می شود. متقابل با مرکز هر دسته و کثرت آن یک نقطه در مستوی مشخص می گردد که عرض مرکز دسته و طول آن برابر با کثرت آن دسته است. به تعداد دسته های جدول در مستوی سیستم مختصات نقطه بوجود می آید.

اگر به نقاط مذکور دونقطه اختیاری دیگر $(x_1 - c, 0)$ و $(x_n + c, 0)$ را در اول و آخر دسته ها اضافه کنیم، طوریکه c وسعت هر صنف است. از اتصال این نقاط به یکدیگر، یگ گراف حاصل می شود که آنرا گراف چند ضلعی کثرت می نامند.

مثال: گراف های مستطیلی و چند ضلعی داتای جدول زیر را رسم کنید.

حدود دسته	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
کثرت مطلق	3	5	8	7	2
مرکز دسته ها	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5



نکته: به یاد داشته باشید برای یافتن طول فاصله از یک نقطه خارج دایره به امتداد مماس کفایت می کند که قیمت های x و y نقطه را در معادله دایره وضع کنیم.

مثال: طول مماس را از نقطه $(-5, 10)$ بر دایره $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ را دریابید.

حل:

$$5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$$

طول مماس $L = \sqrt{(-5)^2 + 10^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$

دریافت مساحت مثلث در صورتکه کمیات وضعیه راس های آن داده شده باشد.

اگر راس های یک مثلث به ترتیب $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ و $P_3(x_3, y_3)$ باشند مساحت مثلث از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

مثال: اگر $A(4, -5)$ ، $B(5, -6)$ و $C(3, 1)$ راس های یک مثلث باشند مساحت این مثلث را دریابید.

حل:

$$x_1 = 4, y_1 = -5, x_2 = 5, y_2 = -6, x_3 = 3, y_3 = 1$$



4 0 1 4 5 6 6
5 2 7 8
6 5

چارک ها

اعداد که داتای مرتب را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند آن ها را چارک های اول، دوم و سوم می نامند و با Q_1 ، Q_2 و Q_3 نشان داده می شود.

چارک اول مقداری است که 25% داتا جامعه پائین تر از آن و 75% داتای جامعه بالاتر از آن قرار می گیرند.

چارک دوم مقداری است که 50% داتای جامعه پائین تر از آن و 50% داتای جامعه بالاتر از آن قرار دارد.

چارک سوم عبارت از مقداری است که 75% داتای جامعه پائین تر از آن و 25% داتای جامعه بالاتر از آن قرار دارد.

نکته 1:

اگر داتا را به صورت صعودی مرتب کنیم میانه داتا مساوی به Q_2 و میانه نیمه اول داتا مساوی به Q_1 و میانه نیمه دوم داتا مساوی به Q_3 می باشد.

نکته 2:

محل P - ام طوریکه $p = 1, 2, 3, \dots$ را با استفاده از رابطه ذیل بدست می آوریم.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

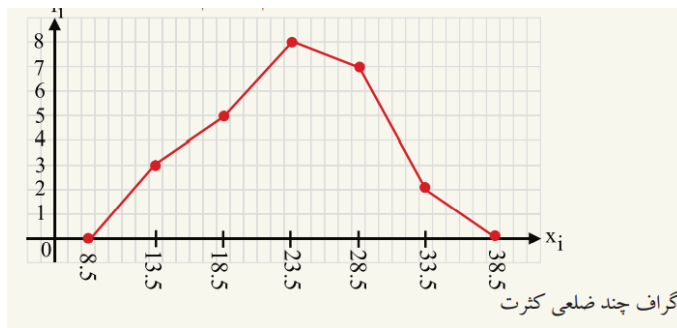
با استفاده از محل چارک مقدار چارک را تعیین کرده می توانیم.

مثال: فرض کنید مشاهدات بدست آمده از یک بررسی قرار ذیل باشد

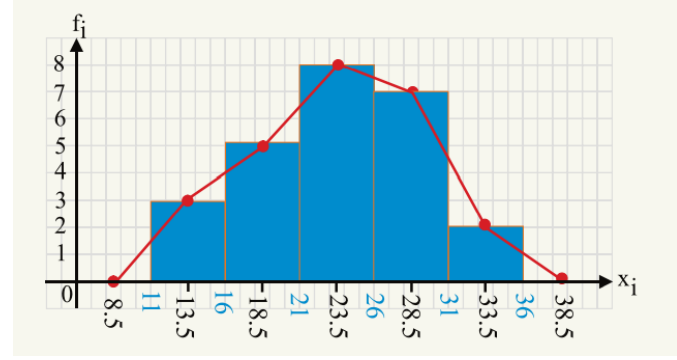
140 100 120 80 85 90

- محل چارک اول و سوم را دریافت کنید.
- مقادیر چارک های اول و سوم را دریافت کنید.

حل: اول داتای متذکره را شماره گذاری می نمایم.



نمایش گراف مستطیلی و چند ضلعی کثرت باهم قرار ذیل است.



گراف ساقه و برگ

برای تجزیه و تحلیل داتای عددی از گراف ساقه و برگ استفاده می گردد، این گراف برای داتای که تفاوت کوچکترین و بزرگترین داتای از نظر تعداد رقم ها اندک باشد مناسب است.

مثال: دریک کتاب فروشی از 20 نوع کتاب که تعداد هر کدام در جدول زیر تذکر داده شده است موجود است، گراف ساقه و برگ را برای این داتا ترسیم کنید.

حل:

	ساقه	برگ	
1	0	1	5
2	3	7	8
3	8	8	9 9

داتا : 90 85 80 120 100 140
شماره : 1 2 3 4 5 6

محل چارک ها را با استفاده از فرمول فوق دریافت می نمائیم.

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow C_{Q_1} = 2$$

$$C_{Q_2} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow C_{Q_2} = 5$$

پس با در نظر داشت شماره داتا ها مقدار داتا ها عبارت اند از.

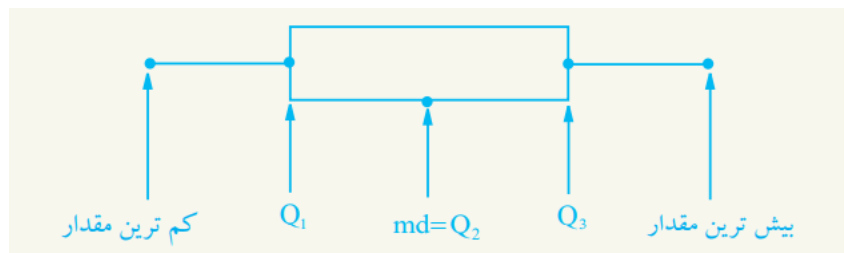
$$Q_1 = 85 \qquad Q_3 = 120$$

گراف صندوقچه پی

گراف تصویری است که پراکندگی داتا را نسبت به گراف های دیگر بهتر نشان می دهد. این گراف، داتای را بر اساس مقادیر زیر نمایش می دهند.

- کمترین داتا
- چارک اول
- میانه
- چارک سوم
- بیشترین داتا

گراف صندوقچه پی نشان دهنده چارک ها، حد اقل و حد اکثر داتا است.



مراحل تهیه گراف صندوقچه پی عبارت اند از.

- کوچکترین داتا را پیدا کنید.
- بیشترین داتا را پیدا کنید.
- میانه را پیدا کنید.

- چارک اول را دریافت کنید
- چارک سوم را دریافت کنید
- گراف را رسم کنید.

مثال: اگر تعداد تصادفات ترافیکی یک شهر طی 15 روز قرار زیر داده شده باشد،

12 10 15 23 14 27 16 34 41 43 32 18 25 31 19

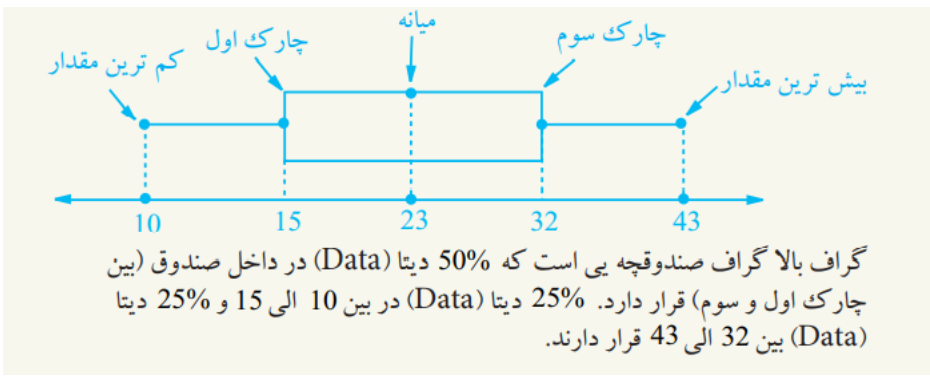
گراف صندوقچه پی آنرا ترسیم کنید.

حل:

داتای فوق را مرتب می کنیم

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

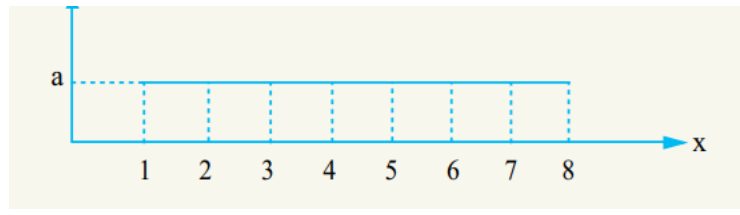
کمترین داتا = 10 بیشترین داتا = 43
چارک اول = 15 چارک سوم = 32
میانه = 23



مقایسه شاخص های مرکزی توسط منحنی نارمل

شاخص های مرکزی عبارت از (اوسط، مود و میانه) می باشد، و منحنی نارمل یکی از جمله منحنی های معروف در علم احصائیه اند که اکثر پدیده های طبیعی را می توان توسط آن نمایش داد، این منحنی یک منحنی متناظر و مشابه یک زنگوله است.

مثال: در گراف ذیل اوسط و میانه را دریافت نمائید.



حل:

$$\text{میانه} = med = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

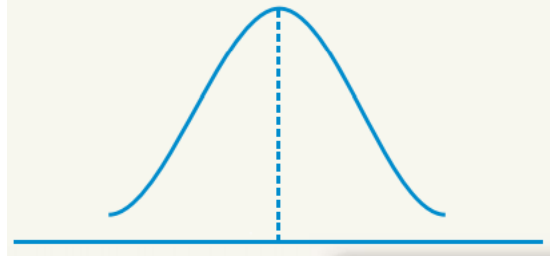
$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

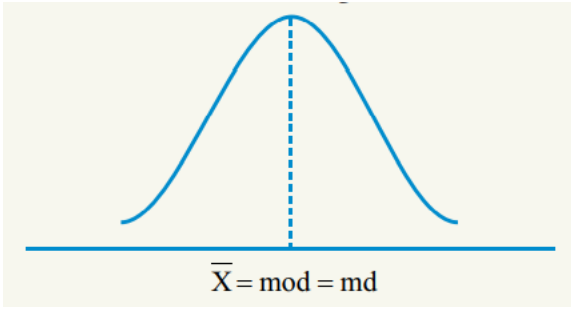
فعالیت ها

- ❖ معادله مماس چیست؟ بنویسید.
- ❖ طول مماس از کدام رابطه بدست می آید شرح داده و یک مثال کار کنید.
- ❖ احصائیه چیست؟ مفصلاً تشریح کنید.
- ❖ گراف چندضلعی کثرت چیست؟
- ❖ فرق گراف چند ضلعی کثرت و گراف مستطیلی چیست؟
- ❖ گراف ساقه و برگ چگونه داتا را نمایش می دهند؟ یک مثال کار کنید.
- ❖ از چارک ها در چه موارد استفاده می شود.
- ❖ چارک چگونه داتا ها ی اطلاعات احصائیی را تشریح می کند؟
- ❖ شاخص های مرکزی چیست و در احصائیه چه نقش دارد؟

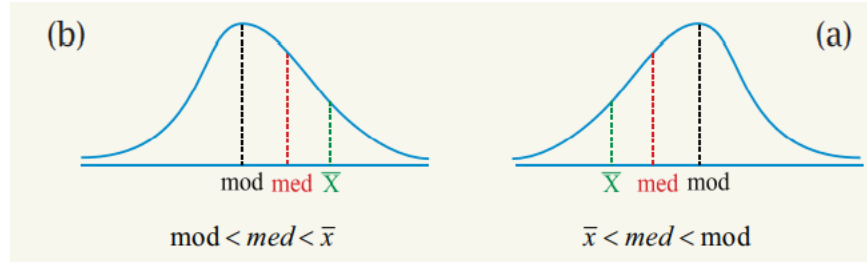
موفق باشید



چون منحنی نارمل متناظر است پس؛ در منحنی نارمل موقعیت اوسط، مود و میانه باهم برابر است و در نقطه اعظمی منحنی نارمل موقعیت دارد. یعنی:



اگر منحنی نارمل متناظر نباشد درین صورت داریم که:



- اگر اوسط و میانه مساوی باشند، تعداد داتای که قبل و بعد از اوسط و میانه قرار دارند، مساوی می باشند.
- اگر اوسط در سمت چپ میانه واقع باشند، داتای که در سمت راست اوسط قرار دارند بیش تر از تعداد داتای اند که در سمت چپ اوسط قرار دارند. مانند شکل a
- اگر اوسط در سمت راست میانه قرار داشته باشند، تعداد داتای که در سمت راست اوسط قرار دارند کمتر از تعداد داتای اند که در سمت چپ اوسط قرار گرفته اند.