

راهنمایی آموزشی ریاضی صنف یازدهم - دوره دوازدهم

آنچه قرار است درین بخش بخوانیم

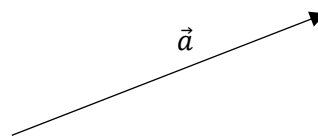


اهداف آموزشی: در پایان این بخش شاگردان باید قادر گردد تا.

- وکتور را تعریف نمایند.
- مختصات قائم را بشناسند و آنرا ترسیم کرده بتوانند.
- فاصله بین دو نقطه و نقطه وسطی یک خط مستقیم را دریافت کرده بتوانند.
- وکتورها را در سطح و فضا تعریف کرده بتوانند.
- مختصات نقطه در فضای سه بعدی را دریافت و تعیین کرده بتوانند.
- زاویه جهت وکتور را بشناسند و نسبت های آن را دریافت نمایند.

وکتور در سیستم مختصات قائم

تعبیر هندسی وکتور: وکتور یک قطعه خط جهت دار است که دارای سه پارامتر باشد

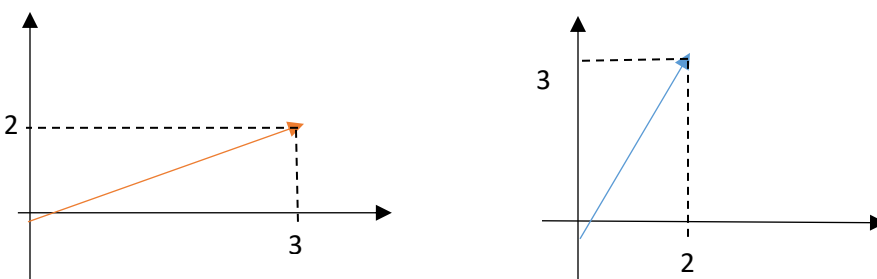
- 
1. طول معین داشته باشد
 2. جهت معین داشته باشد.
 3. مبدا و انجامش معلوم باشد.

تعبیر الجبری وکتور: وکتور یک متریکس ستونی است.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

یک وکتور در سیستم مختصات قائم به شکل ستونی $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ درحالیکه مختصه روی x و a_y مختصه روی y است.

مثال: وکتور های $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ را در سیستم مختصات قائم، نشان دهید.



نکته: نشان دادن یک وکتور در مستوی بخاطر بکار برده می شود که برای ارائه، یک نقطه در سیستم مختصات قائم تنها یک محل در سیستم مختصات وجود دارد در حالیکه برای ارائه یک وکتور در مستوی بی نهایت جاها وجود دارد.

فاصله و نقطه وسطی بین دو نقطه

برای هر دو نقطه اختیاری $P(x_1, y_1)$ آغاز و $Q(x_2, y_2)$ انجام وکتور $\vec{a} = PQ$ باشد، درین صورت وکتور را به $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ نشان داده می شود و طول وکتور عبارت اند از.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نقطه وسطی وکتور PQ عبارت اند از.

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$



مثال: نقطه وسطی و فاصله بین دو نقطه $A(2,4)$ و $B(5,5)$ را دریافت نمائید.
حل:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 + 5}{2} \\ \frac{4 + 5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

وکتورها در سطح و فضا

تعریف: ست تمام جوره های مرتب که برای آنها مانند قاعده جمع و ضرب سکالری صدق کند، به نام فضای وکتوری \mathbb{R}^2 یا وکتورها در مستوی یاد می شود.

اگر $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ و یک عدد سکالری $a \in \mathbb{R}$ باشد قواعد جمع و ضرب با سکالر را قرار ذیل داریم.

قاعده جمع $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$

قاعده ضرب سکالری $a \cdot \vec{u} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ a \cdot y \end{pmatrix}$

وکتور واحد ها

عبارت از وکتور های اند که طول آنها یک واحد بوده و فقط برای تزیید جهت مختصه بکار می رود.

واحد وکتورها نظر به ساحه به \vec{i} ، \vec{j} و \vec{k} نشان داده می شود.

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

برای یک وکتور اختیاری $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ داریم که

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

مثال: هرگاه $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ باشد، قیمت های ذیل را می توان دریافت نمود.

- 1) $u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3i + 2j$
- 2) $4u + 2v = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -12+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = 8i - 2j$
- 3) $u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = -i - 8j$

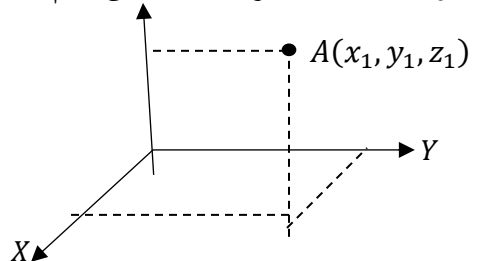
مختصات نقطه در فضای سه بعدی

تعریف: فضای \mathbb{R}^3 عبارت از مجموعه تمام سه تایی های مرتب (x, y, z) می باشد و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

تعیین یک نقطه در فضای سه بعدی

برای مشخص کردن موقعیت یک نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ در دستگاه مختصات قایم به ارتباط هر محور با در نظر داشت علامه، فواصل را جداگانه کنیم.



نکته: در فضای سه بعدی نیز قاعده جمع و قاعده ضرب در سکالر برای هر دو وکتور u و v و سکالر a درست است. یعنی

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_2}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

فاصله یک نقطه از مبدا مختصات قائم ذیل دریافت می‌گردد.

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال 1: اگر $a = (-5, 4, 5)$ باشد، طول این شعاع وکتور را دریافت کنید.

حل 1:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{66}$$

مثال 2: اگر $\vec{w} = 6i + 9j - 3k$ و $\vec{v} = 4i + 6j + 2k$ و $\vec{u} = 2i + 3j + k$ باشند قیمت $|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}|$ را دریافت کنید.

حل 2:

$$\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = 2i + 3j + k - 4i - 6j - 2k - 6i - 9j + 3k = -8i - 12j + 2k$$

$$|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = |-8i - 12j + 2k| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + (2)^2} = \sqrt{212}$$

زوایای جهت و کوساین های جهت یک وکتور

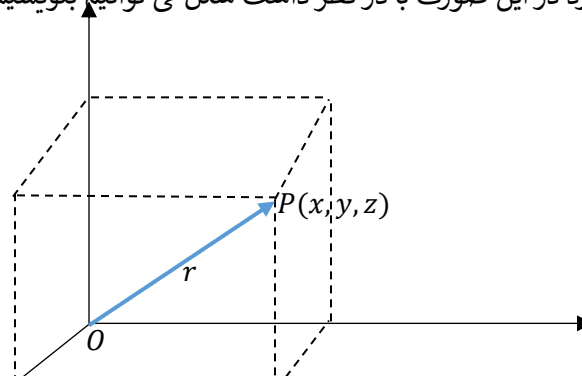
تعریف: هرگاه وکتور شعاع r با محورهای مختصات قائم به ترتیب زاویه های α ، β و γ را بسازد در این صورت با در نظر داشت شکل می‌توانیم بنویسیم که:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_z$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_x$$

$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_y$$



$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

مثال: هرگاه $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد، $v + w$ و $v - w$ و $|v - 2w|$ را دریافت نمایید.

حل:

$$1) \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = i + 5j + 3k$$

$$2) \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3i - 3j + 3k$$

$$3) |\vec{v} - 2\vec{w}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74}$$

نکته: وکتور واحد ها در فضای سه بعدی عبارت اند از:

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

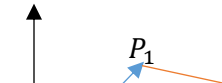
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

برای یک وکتور $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ در فضای سه بعدی داریم که:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

فاصله بین دو نقطه در فضا

هرگاه $\overrightarrow{op_1}$ و $\overrightarrow{op_2}$ دو شعاع وکتور نقاط $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ باشند، درین صورت با در نظر داشت فاصله بین نقاط P_1 و P_2 داریم که:





$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|} \\ \frac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|} \\ \frac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}$$

فعالیت‌ها

- وکتور را تعریف کنید.
- در کتابچه‌های یک وکتور ترسیم نموده سه پارامتر آن را مشخص کنید.
- اگر $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ باشند. $u + 2v$ و $u - 2v$ و $2u + 4v$ را دریافت کنید.
- نقاط $A(2,4,3)$ و $B(-2, -3,3)$ را در فضای سه بعدی نشان دهید.
- واحد وکتور را تعریف و واحد وکتورها را در فضای دو بعدی و سه بعدی نشان دهید.

کوساین‌های جهت وکتور r را قرار ذیل دریافت می‌نمائیم.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma$$

اگر اطراف سه رابطه فوق را طرف به طرف مربع نموده جمع نمائیم داریم که:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

یعنی اگر v یک وکتور خلاف صفر در فضا، $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ داده شده باشد. درین صورت

بین کوساین‌های جهت آن رابطه

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

برقرار است.

از طرف دیگر، وکتور واحد جهت یا مسیر $\vec{v} = \overline{OP}$ عبارت اند از.