



راهنمای آموزشی

ریاضی

صنف دهم

10

راهنمای آموزشی ریاضی صنف دهم

این مجموعه شامل چهارده دوره، همراه با نمونه ها سوالات می باشد

عدد الجبری

هر عددی که دارای علامه مثبت (+) و منفی (-) باشد به نام عدد الجبری یاد می شود. مانند.

$$-5 \quad -12 \quad +14 \quad -\frac{9}{5} \quad +\frac{23}{8}$$

معکوس جمعی عدد الجبری:

اگر علامه یک عدد الجبری را تغییر دهیم، عدد جدید معکوس جمعی عدد اول می گردد. مثلاً

$$-7 \text{ معکوس جمعی عدد } +7 \text{ اند} \quad +12 \text{ معکوس جمعی عدد } -12 \text{ اند.}$$

نکته: حاصل جمع یک عدد با معکوس جمعی اش مساوی به صفر است.

معکوس ضربی عدد الجبری:

اگر یک عدد الجبری بدون در نظر گرفتن علامه آن معکوس (سرچپه) گردد، معکوس ضربی عدد اول بدست می آید. مثلاً

$$\frac{1}{7} \text{ معکوس ضربی عدد } 7 \text{ اند} \quad -\frac{3}{8} \text{ معکوس ضربی عدد } \frac{8}{3} \text{ اند}$$

نکته: حاصل ضرب عدد با معکوس ضربی اش مساوی به یک است.

مقایسه اعداد الجبری:

جهت مقایسه اعداد الجبری نکات ذیل را در نظر می گیریم.

1. تمام اعداد الجبری دارای علامه مثبت بزرگتر از اعداد دارای علامه منفی است.
2. صفر نظر به تمام اعداد منفی بزرگتر است.

3. عدد منفی طرف چپ (نزدیک به صفر) بزرگتر از عدد منفی طرف چپ (دور تر از صفر) است.

مثالها:

$$1) -0,00001 > -0,001$$

$$2) -7 > -1000$$

$$3) -5 < +5$$

$$4) 0 > -\infty$$

قیمت مطلقه اعداد الجبری

قیمت مطلقه یک عدد الجبری برابر با خود همان عدد بدون در نظر داشت علامه آن است.

طور مثال قیمت مطلقه عدد (-7) برابر با (+7) و در کل قرار ذیل ارائه می گردد.

$$|x| = \begin{cases} x & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

مثالها:

$$|-5| = -(-5) = +5, \quad |7| = +7, \quad |-9| = -(-9) = +9 \quad \text{و} \quad |11| = 11 = +5$$

عملیه های اساسی بالای اعداد الجبری

1. عملیه جمع:

در جمع اعداد الجبری، اعداد هم علامه جمع و اعداد مختلف علامه تفریق می گردد، و در حاصل آن علامه رقم بزرگتر گذاشته می شود. مثلاً

$$-5 + 9 = +4 \quad -3 - 8 = -11 \quad +7 - 11 = -4$$

2. عملیه تفریق:

در تفریق علامه مفروق تغییر می کند، بعداً اعداد هم علامه جمع و مختلف علامه تفریق می گردد و علامه حاصل آن از رقم بزرگتر انتخاب می شود. مانند

$$4 - 9 = 4 \mp 9 = 13 \quad -14 - 8 = 14 \mp 8 = -6$$

3. عملیه ضرب:

در عملیه ضرب ابتداء علامه ها و بعداً اعداد ضرب می شود. طوری که ضرب هم علامه ها مثبت و ضرب مختلف علامه ها منفی می گردد و یعنی:

$$\begin{cases} + \cdot + = + \\ - \cdot - = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \end{cases} \quad \begin{cases} \text{ضرب هم علامه (مثبت) } \\ \text{ضرب مختلف علامه ها (منفی)} \end{cases}$$

مثلاً

$$(-7)(+5) = -35 \quad (+8)(-2) = -16 \quad (-3)(-4) = +12$$

عملیات مشترک در اعداد الجبری:

اگر همزمان از هر چهار عملیه در کار گرفته شود، آنرا عملیات مشترک می نامند. به مثال های ذیل توجه کنید.

$$1) (-1 - 2 - 3) : (-2 + 3) = (-6) : (+1) = -6$$

$$2) (-4) - (-5) : (-10) = (-4) - \left(+\frac{1}{2}\right) = -4 - \frac{1}{2} = \frac{-8-1}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$3) -[(-4 - 3) : (-7) - (-4 - 2)] - 5$$

$$\Rightarrow -[(-7) - (-6)] - 5$$

$$\Rightarrow -[1 + 6] - 5$$

$$\Rightarrow -7 - 5 = -12$$

$$4) \frac{(-4) : (-3+3-2) - (-4)}{(+5-2+3)(-4) - (-2)} = \frac{(-4) : (-2) + 4}{6(-4) - (-2)} = \frac{(+2) + 4}{-24 + 2} = \frac{6}{-22} = \frac{-3}{11}$$

طاقات در اعداد الجبری:

4. عملیه تقسیم:

در عملیه تقسیم ابتداء علامه ها تقسیم می شود. طوری که حاصل تقسیم هم علامه مثبت و حاصل تقسیم مختلف علامه ها منفی می شود. یعنی

$$\left\{ \begin{array}{l} + \div - = - \\ - \div + = - \end{array} \right. \text{ تقسیم مختلف علامه (-)} \quad \left\{ \begin{array}{l} + \div + = + \\ - \div - = + \end{array} \right. \text{ تقسیم هم علامه (+)}$$

مثلاً

$$-3 \div (-11) = -\frac{3}{11} \quad + 12 \div (-3) = -4$$

متحول الجبری:

یک فکتور ریاضیکی است که قیمت های مختلف گرفته می تواند. و دو نوع اند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قیمت اختیاری می گیرد} - (x) - \text{متحول مستقل} \\ \text{قیمت اش مربوط به } x \text{ است} - (y) - \text{متحول مربوط} \end{array} \right. \text{متحول الجبری}$$

در ریاضی متحول ها الجبری را به حروف کوچک انگلیسی $(a, b, c, \dots, x, y, z)$ نشان داده می شود.

حد الجبری:

ترکیب اعداد الجبری با متحول الجبری تحت عملیه های ضرب و تقسیم را حد الجبری می نامند.

$$2x, \frac{2xy}{5}, -6x^3yz, -\frac{4m^7n^2}{2mn}$$

پارامترها (شرایط) حدود الجبری: یک حد الجبری چهار پارامتر (شرط) دارد.

✚ علامه

✚ ضریب عددی

✚ متحول

✚ توان متحول

انواع حدود:

1) حدود مشابه: دو حد الجبری که دارای عین متحول ها و توان متحول ها باشند، حدود مشابه نامیده می شود. مانند

$$-2x^4zp^3 \quad \text{مشابه} \quad 7\sqrt{5}x^4zp^3$$

2) حدود غیرمشابه: حدود که مشابه نباشد را غیر مشابه می نامند.

$$-3xy \quad \text{غیر مشابه} \quad 7x^4yz$$

افاده الجبری:

ترکیب دو یا چند حد الجبری تحت عملیه های جمع و تفریق را افاده الجبری می نامند.

$$6x^2y - 12mn + \sqrt{2x}4xz^3 \quad 3x - 2x^3y + 9mx^2y^5 - 5$$

انواع افاده های الجبری: افاده های الجبری سه نوع اند.

❖ افاده های تام الجبری

❖ افاده های کسری (ناطق) الجبری.

❖ افاده های غیر ناطق (جذری) الجبری.

افاده های تام الجبری:

عبارت از افاده های اند که توان متحول های آنها اعداد تام مثبت (کامل) باشد. مانند.

$$A = 2xy - 5x^3y^5 + 14x - 9yz$$

درجه افاده تام الجبری: به دو روش یک افاده الجبری تعیین درجه می گردد.

را تفریق نمائید.

$$A = 2x + 3x^3y^2 - 7x^5z + 9$$

$$B = \mp 9y \pm 5x^3y^2 \pm 3x^5z \mp 2$$

$$A - B = 2x + 9y - 2x^3y^2 - 10x^5z + 11$$

3. **عملیه ضرب افاده های الجبری:** در عملیه ضرب افاده های الجبری اول علامه، بعدا ضرایب عددی و در اخیر متحول ها را به کمک قوانین طاقت ها ضرب می کنیم.

▪ **ضرب مونوم در مونوم:**

$$1) (2xy)(-3x) = -6x^2y$$

$$2) (-7y^3)(-6m^4y) = +42m^4y^4$$

▪ **ضرب مونوم در پولینوم:**

$$1) (2x)(x - 2y) = 2x^2 - 4xy$$

$$2) (4ab)(3x - 5ay) = 12abx - 20a^2by$$

▪ **ضرب پولنوم در پولینوم:**

برای ضرب پولینوم در پولینوم تمام حدود پولینوم اول را با تمام حدود پولینوم دوم ضرب می نمائیم.

$$(x + 3y - 5)(2x^2 + 4xy + 2z) = 2x^3 + 4x^2y + 2xz + 6x^2y + 12xy^2 + 6yz \\ \dots - 10x^2 - 20xy - 10z$$

4. **تقسیم افاده های الجبری:** در تقسیم افاده های الجبری اولین حد مقسوم را بر اولین حد مقسوم علیه طوری تقسیم می نمائیم که اول علامه، بعدا ضرایب عددی و در اخر متحول ها نظر به قوانین طاقت ضرب می شود.

مثال:

/. **تعیین درجه نظر به هر متحول:** درین صورت بلندترین توان متحول در افاده درجه افاده نظر به همان متحول نامیده می شود. مثلاً

$$A = x^3 - 2x^4y^5 + 5mx^2z^7 + 8$$

$$D(A_x) = 4 \quad D(A_y) = 5 \quad D(A_z) = 7 \quad D(A_m) = 1$$

// **تعیین درجه کلی:** برای تعیین درجه کلی مجموع توان های تمام حدود افاده الجبری را دریافت می نمائیم که بلندترین مجموعه توان ها عبارت از درجه کلی افاده الجبری است

$$A = x^3 - 2x^4y^5 + 5mx^2z^7 + 8$$

$$D(A) = 10$$

در افاده فوق مجموع توان های حدو اول 3 از حد دوم 9 و از حد سوم 10 و از حد آخر 0 است، پس مجموع درین میان 10 بلندترین مجموعه توان های افاده و درجه کلی افاده الجبری A است.

عملیه های اساسی بالای افاده های الجبری:

1. **عملیه جمع افاده های الجبری:** در عملیه جمع دو یا چند افاده الجبری، حدود مشابه را باهم جمع یا تفریق می نمائیم و غیر مشابه را به حالت خودش می گذاریم.

$$\text{مثال: افاده های الجبری } A = 2x + 3x^3y^2 - 7x^5z + 9 \text{ و } B = 5x^3y^2 - 9y + 3x^5z - 2$$

را باهم جمع نمائید.

$$A = 2x + 3x^3y^2 - 7x^5z + 9$$

$$B = -9y + 5x^3y^2 + 3x^5z - 2$$

$$A + B = 2x - 9y + 8x^3y^2 - 4x^5z + 7$$

2. **عملیه تفریق افاده های الجبری:** در عملیه تفریق دو افاده الجبری علامه تمام حدود مفروق را تغییر میدهم و سایر پروسه را مانند عملیه جمع انجام میدهم.

$$\text{مثال: افاده های الجبری } A = 2x + 3x^3y^2 - 7x^5z + 9 \text{ و } B = 5x^3y^2 - 9y + 3x^5z - 2$$

عبارت از یک افاده الجبری منظم اند که توان متحول های آن اعداد کامل یا شمارش باشد. شکل عمومی آن عبارت اند از.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 = \text{constant}$ ثابت

$x \rightarrow$ متحول

مثال:

$$P(x) = 2x^3 - 4x - 11$$

$$P(x) = 3x^5 + 5x^4 + x^3 - 8x^2 + 3x - 9$$

$$P(x) = 2x^2 - 8x + 5$$

انواع پولینوم:

1) پولینوم ثابت: هرگاه در یک پولینوم ضریب تمام حدود آن به جز حد ثابت صفر باشد، پولینوم را ثابت می نامند. یعنی:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = a_{n-3} = \dots = a_1 = 0$$

$$n \in \mathbb{Z}_+$$

مثال: اگر پولینوم $P(x) = (2a + 6)x^2 - (3b - 2)x + 11$ یک پولینوم ثابت باشد، قیمت a و b را دریابید.

$$2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \quad \boxed{a = -3}$$

$$3b - 2 = 0 \Rightarrow 3b = 2 \quad \boxed{b = \frac{2}{3}}$$

2) پولینوم صفری: اگر تمام حدود یک پولینوم صفر گردد آن را پولینوم صفری می نامند. یعنی

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = a_{n-3} = \dots = a_1 = a_0 = 0$$

$$n \in \mathbb{Z}_+$$

$$1) \frac{12x^4 + 8x^2 - 2x}{2x} = \frac{12x^4}{2x} + \frac{8x^2}{2x} - \frac{2x}{2x} = 6x^3 + 4x - 1$$

$$2) \frac{15x^3 - 9xy^2}{3xy} = \frac{15x^3}{3xy} - \frac{9xy^2}{3xy} = 5\frac{x^2}{y} - 3y$$

$$3) \begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 - 6x + 9 \quad |x-2 \\ \underline{\pm 3x^3 \mp 6x^2} \\ + 8x^2 - 6x \\ \underline{\pm 8x^2 \mp 16x} \\ + 10x + 9 \\ \underline{\pm 10x \mp 20} \\ 29 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 13x + 12 \quad |x^2 - 2x + 3 \\ \underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} \\ \mp 7x^3 - 10x^2 + 13x \\ \underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} \\ \mp 4x^2 - 8x + 12 \\ \underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} \\ 0 \end{array}$$

انواع افاده های تام الجبری از نظر حدود:

- مونوم (یک حده) افاده که تنها یک حد داشته باشد مانند $2x$, $6xy$
- بینوم (دوحده): افاده که دارای دو حد باشد مانند $3x + 4$, $2xy - 5z$
- ترینوم (سه حده): افاده که دارای سه حد باشد مانند $2x^2 - 3xy + 7z$
- پولینوم (چندین حده): افاده الجبری که دارای چندین حد باشد مانند $2x - 3a + 5$

11b

پولینوم:

$$x^2 + 3x + 2 = m(x - 1)^2 + n(x + 1) + P$$

$$m = 1$$

$$-2m + n = 3 \Rightarrow n = 5$$

$$m - n + p = 2 \Rightarrow p = 6$$

دریافت قیمت و مجموع ضرایب پولینوم:

برای دریافت قیمت پولینوم در برابر یک عدد حقیقی، عدد حقیقی را بجای متحول در پولینوم قرار می دهیم و قیمت آن دریافت می شود.

مثال: اگر $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 9$ باشد، قیمت $P(2)$ را دریافت نمایید.

حل:

$$P(2) = 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 9$$

$$P(2) = 16 + 12 - 12 + 9$$

$$P(2) = 25$$

و برای دریافت مجموع ضرایب پولینوم بجای متحول های پولینوم عدد (1) را قرار می دهیم.

مثال: مجموع ضرایب پولینوم $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ را دریافت نمایید.

حل: بجای x عدد 1 را قرار می دهیم.

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$$

$$P(1) = 2 + 5 - 3 + 1$$

$$P(1) = 5$$

قضیه باقیمانده

قضیه: اگر پولینوم $P(x)$ را بالای بینوم $(x - a)$ تقسیم کنیم باقیمانده $R = P(a)$ می باشد.

برای تعیین باقیمانده تقسیم یک پولینوم بر بینوم $x - a$ دو مرحله ذیل را در نظر می گیریم.

مثال: اگر پولینوم $P(x) = (m + 4)x^3 + (2n - 8p)x^2 + 9qx - 3p + 12$ یک پولینوم صفری باشد، قیمت های m و n و p و q را دریابید.

$$m + 4 = 0 \Rightarrow m = -4$$

$$9q = 0 \Rightarrow q = 0$$

$$-3p + 12 = 0 \Rightarrow -3p = -12 \Rightarrow p = 4$$

$$2n - 8p = 0 \Rightarrow 2n - 8(4) = 0 \Rightarrow 2n - 32 = 0 \Rightarrow 2n = 32 =$$

$$> n = 16$$

(3) پولینوم متجانس: اگر مجموع توان های حدود یک پولینوم باهم برابر باشد، پولینوم را متجانس گویند. یعنی:

$$P(x) = ax^m + bx^n + cx^p$$

پولینوم فوق متجانس است اگر $m = n = p$ باشند.

مثال: اگر پولینوم $3x^2y + 5x^mz - 7y^{n-3}z^2$ متجانس باشد، قیمت های n و m را دریافت نمایید.

حل:

برای دریافت قیمت های مجهول مجموع توان ها را مساوی به عدد ثابت قرار می دهیم.

$$m + 1 = 3 \Rightarrow m = 2$$

$$n - 3 + 2 = 3 \Rightarrow n = 4$$

(4) پولینوم های معادل: اگر ضرایب حدود مشابه دو پولینوم باهم برابر باشد، پولینوم ها معادل گفته می شود.

مثال: اگر پولینوم های $x^2 + 3x + 2$ و $m(x - 1)^2 + n(x + 1) + P$ معادل باشند، قیمت m ، n و P را دریافت نمائید.

حل:

ضرایب حدود مشابه پولینوم ها را بعد از انکشاف حدود باهم مساوی قرار می دهیم.

$$R = P(2) = 2^5 - 32 = 0$$

$$R = 0$$

چون باقیمانده صفر است پس بینوم فوق یک فکتور پولینوم است.

معکوس قضیه فکتور

اگر باقیمانده تقسیم پولینوم بر بینوم صفر گردد، پس بینوم یک فکتور پولینوم است.

تقسیم ترکیبی

تقسیم ترکیبی یک نوع دیگر از روش های دریافت باقیمانده تقسیم پولینوم بر بینوم است، ابتداء قیمت x را از مساوی قرار دادن بینوم با صفر دریافت می کنیم و بعد در ستون چپ تمام ضرایب پولینوم را می نویسیم و آنرا یک به یک با قیمت x که در جای خارج قسمت قرار دارد ضرب می کنیم و در قسمت پائین آن می نویسیم.

از تقسیم ترکیبی برای اهداف ذیل استفاده می گردد.

1. یافتن قیمت پولینوم ها
2. برای یافتن جذرهای ناطق پولینوم ها
3. برای تجزیه افاده های الجبری.

مثال: اگر پولینوم $4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ بالای بینوم $x + 4$ تقسیم گردد، بدون انجام تقسیم باقیمانده تقسیم پولینوم بر بینوم را دریافت نمائید.

حل:

سطر اول	4	12	-13	-33	18	-4
سطر دوم		-16	16	-12	180	
سطر سوم	4	-4	3	-45	198	

1) قیمت x را تعیین می کنیم.

2) قیمت x را در در پولینوم بجای x وضع میکنیم.

مثال: اگر پولینوم $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7$ بالای $(x - 2)$ تقسیم شود باقیمانده چند خواهد بود؟

حل:

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$R = P(a)$$

$$R = P(2) = 2 \cdot 2^3 - 2^2 - 7$$

$$R = 16 - 4 - 7$$

$$R = 5$$

مثال ۲: اگر پولینوم $4x^4 + 12x^3 - 13x^2 - 33x + 18$ بالای بینوم $x + 4$ تقسیم گردد، باقیمانده را دریافت نمائید.

حل 2:

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$R = P(-4)$$

$$R = P(-4) = 198$$

قضیه فکتور

اگر پولینوم $P(x)$ بالای $x - a$ تقسیم گردد و باقیمانده $R = P(a) = 0$ گردد در نتیجه $x - a$ یک فکتور پولینوم $P(x)$ است.

مثال: به کمک قضیه فکتور نشان دهید که $x - 2$ یک فکتور پولینوم $P(x) = x^5 - 32$ می باشد.

حل:

$$P(x) = x^5 - 32$$

باقیمانده تقسیم عبارت اند از. $R = 198$

خارج قسمت پولینوم عبارت اند از.

$$Q(x) = 4x^3 - 4x^2 + 3x - 45$$

جوره های مرتب (Ordered Pairs)

تعریف:

به دو تایی (a, b) که ترتیب در آن مهم باشد بام جوره های مرتب یاد می شود. که در این جوره a را مختصه اول یا مولفه اول و b را مختصه دوم یا مولفه دوم می گویند.

تساوی جوره های مرتب:

دو جوره مرتب زمانی با هم مساوی است که مولفه اول یک جوره مرتب با مولفه اول جوره مرتب دیگر مساوی باشد.

مانند:

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

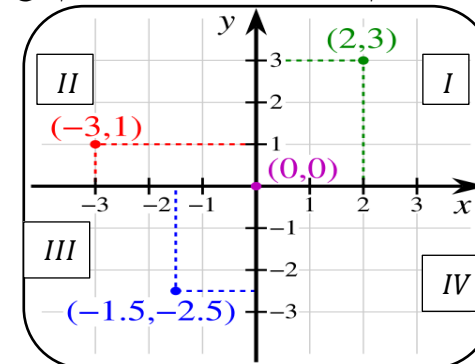
نکته: به طور عموم $(a, b) \neq (b, a)$ می باشد.

مستوی کارتیزی (Cartesian Plane)

تعریف:

مستوی که در آن محور ها بالای همدیگر عمود واقع اند بنام مستوی کارتیزی یاد می شود.

هر دو محور مستوی را به چهار حصه تقسیم می کند که هر حصه آن را بنام ربع یا ناحیه می نامند.



نکته: ناحیه ها مستوی کارتیزی مخالف حرکت عقربه ساعت نامگذاری می شود.

حاصل ضرب کارتیزی و گراف آن:

حاصل ضرب دو ست A و B ($A \times B$) عبارت از ست می باشد که عناصر آن جوره های مرتب (x, y) می باشد.

X عناصر ست A و y عناصر ست B می باشد

برای درک بیشتر مثال زیر را در نظر می گیریم:

مثال: اگر $A = \{0, 1, 2\}$ و $B = \{3, 4\}$ باشد حاصل $B \times A$ ، $A \times B$ مساوی است به:

$$A \times B = \{0, 1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B \times A = \{3, 4\} \times \{0, 1, 2\} = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$$

قابل ذکر: از روی مثال فوق نتیجه می گیریم که حاصل ضرب $A \times B \neq B \times A$ است.

رابطه (Relation)

تعریف:

ستی که از جوره های مرتب اشیا و مفاهیم تشکیل شده باشد بنام رابطه یاد می شود.

جهت درک بیشتر رابطه مثال های زیر را در نظر می گیریم.

شماره	اسم	رابطه	اسم
1	عزت الله	برادر	عطاالله
2	محمود	کاکا	علی
3	حسن	معلم	احمد

- عطاالله برادر عزت الله می باشد
- علی کاکا محمود است
- احمد معلم حسن است

تابع (Function):

تعریف: ست جوره های مرتب است که مولفه اول آن تکرار نباشد.

تابع است $R_1 = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

تابع نیست $R_2 = \{(1, 3), (0, 4), (1, 3), (2, 4), (5, 3), (2, 4)\}$

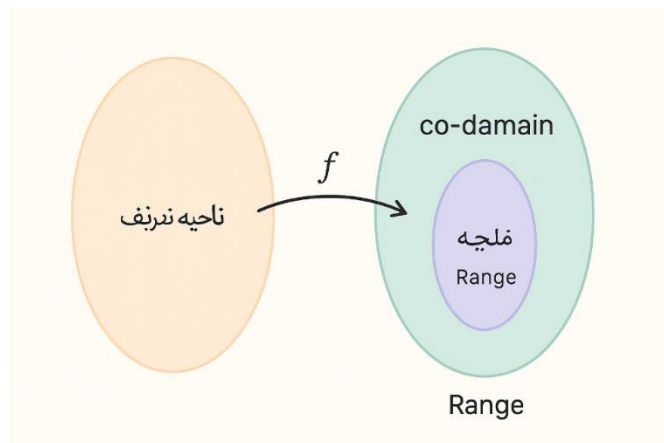
ساحه تعريف تابع	تابع $f(x) = x^2 + 3x - 2$	قيمت هاي تابع
2	$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2$	8
0	$f(0) = 0^0 + 3 \cdot 0 - 2$	-2
-3	$f(-3) = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 2$	-2
a	$f(a) = a^2 + 3 \cdot a - 2$	$a^2 + 3a - 2$

بخش اصطلاحات تابع:

ناحیه تعریف **domain**: همه مقادیر مجاز برای ورودی تابع (x ها)

ناحیه قیمت **Range**: مجموعه مقادیر واقعی که تابع پس از اعمال روی دامنه تولید می کند

Co-domain: مجموعه ای که خروجی تابع می تواند در آن قرار گیرد (ممکن است بزرگتر از ناحیه قیمت باشد)



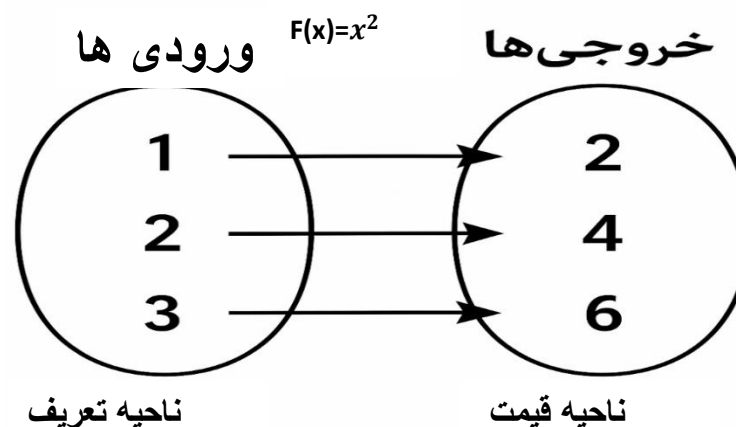
طریق نوشتن یک تابع:

برای اولین بار ریاضی دان سوئسی ایولر Euler این عبارت که y تابع از x است توسط معادل $y = f(x)$ نشان داده است.

بار اول مفهوم تابع توسط لیبنز معرفی شد تابع یک رابطه یا قاعده است که یک قیمت را با کمیت دیگر ارتباط می دهد

1. ارتباط بین ضلع مساحت مربع
2. ارتباط بین نفوس و زمان
3. ارتباط بین شعاع ومساحت دایره
4. ارتباط بین شعاع وحجم کره

نکته: مساحت مربع ، مساحت دایره ، نفوس و حجم را بنام متحول مقید و ضلع مربع ، زمان ، شعاع دایره و شعاع کره را بنام متحول آزاد می نامند.



$$Range f(x) = \{2, 4, 6\}$$

$$Domain f(x) = \{1, 2, 3\}$$

توابع عموماً به چهار نشان داده می شوند:

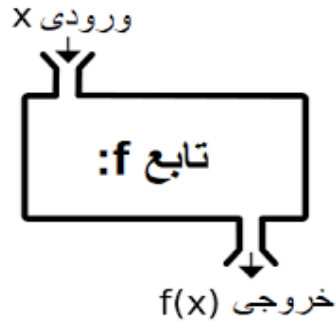
1. به طور شفاهی Verbally توسط عبارات .
2. به طور عددی Numerically توسط یک جدول
3. مشاهده بی (Visually) توسط گراف
4. به شکل الجبری (Algebraically) توسط فرمول صریح (واضح)

دریافت قیمت یک تابع:

برای دریافت قیمت یک تابع (یعنی محاسبه مقدار تابع برای یک ورودی مشخص) کافی است مقدار ورودی را در تابع قرار دهیم و نتیجه را حساب کنیم به این فرایند اصطلاحاً یافتن مقدار تابع یا محاسبه قیمت تابع گفته می شود.
جهت وضاحت بیشتر به مثال های زیر توجه کنید.

1. تعریف تابع

تابع رابطه ای است که به هر عضو از دامنه فقط یک مقدار در برد نسبت می دهد. نماد تابع:



$$f: X \rightarrow Y \text{ به ازای هر } x \\ \in X, f(x) \in Y \text{ یک دقیقاً}$$

مثال $f(x) = x^2$ ، به ازای هر عدد حقیقی، فقط یک خروجی دارد \rightarrow تابع اما رابطه ای مثل $x \rightarrow y^2 = x$ برای بعضی x ها دو مقدار y دارد \rightarrow تابع نیست

توابع و گراف آنها

اهداف یادگیری

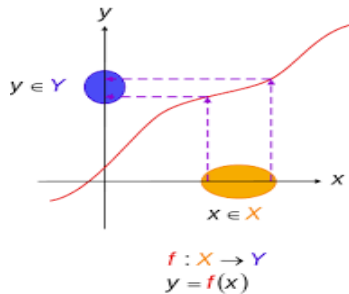
در پایان این درس، دانش آموز باید بتواند:

1. مفهوم تابع را درک کرده و تشخیص دهد چه رابطه ای یک تابع است.
2. ناحیه تعریف تابع (دامنه) را از طریق رابطه جبری یا نمودار گرافیکی مشخص کند.
3. مقدار تابع (قیمت تابع) را برای مقادیر مختلف از دامنه محاسبه کند.
4. گراف توابع پایه ای و خاص را ترسیم و تحلیل کند.
5. رفتار افزایشی (متزايد) یا کاهش (متناقص) تابع را از طریق فرمول یا گراف تعیین کند.
6. تأثیر انتقال های افقی و عمودی را بر گراف تابع بررسی و تابع جدید را بنویسد.
7. از گراف تابع، ویژگی های آن مثل دامنه، برد، تقاطع با محورها، تقارن و نقاط بحرانی را استخراج کند.

2. ناحیه تعریف (دامنه) تابع

دامنه تابع مجموعه ای از مقادیر x است که تابع در آنها تعریف شده است.

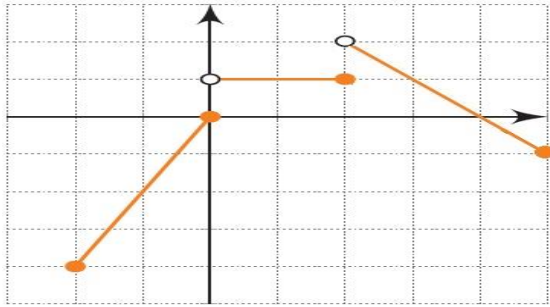
دامنه یافتن برای کلی قواعد



نوع تابع	محدودیت دامنه
چند جمله ای (مثلاً $x^2 + 3x - 1$)	همه ی اعداد حقیقی
کسری (مثلاً $\frac{1}{x-a}$)	مخرج $\neq 0$
جز زوج (مثلاً $\sqrt{x-b}$)	عبارت زیر جز ≥ 0
جز در مخرج (مثلاً $\frac{1}{\sqrt{x}}$)	زیر جز > 0

مثال ۱:

$$\text{تابع } f(x) = \frac{1}{x-3}$$



دامنه : $[-2, +\infty)$

مثال ۴ ✓

اگر گراف فقط از $x = -2$ تا $x = 5$ وجود دارد، آنگاه:

دامنه $[-2, 5]$ ✦

نکته: نقاط پر یا توخالی (دایره باز یا بسته) نشان‌دهنده وجود یا نبود مقدار تابع در آن نقطه هستند.

5. توابع خاص و گراف آنها

فرمول	دامنه	برد	تقارن	رفتار	نام تابع
$f(x) = ax + b$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	ندارد	ثابت یا متزاید یا متناقص	تابع خطی
$f(x) = ax^2 + bx + c$	\mathbb{R}	بستگی به a دارد	نسبت به محور تقارن	متزاید یا متناقص	تابع درجه ۲
$f(x) = \sqrt{x}$	$x \geq 0$	$y \geq 0$	ندارد	متزاید	تابع ریشه دوم
$f(x) = \frac{1}{x}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$	نسبت به مبدأ	کاهنده در هر بازه	سستابع معکوس

محدودیت: مخرج نباید صفر شود

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

دامنه $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ ✦

مثال ۲ ✓

تابع $f(x) = \sqrt{2x + 1}$: برای جز زوج باید:

$$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

دامنه $[-\frac{1}{2}, \infty)$ ✦

3. قیمت تابع (مقدار تابع)

برای محاسبه $f(a)$ ، کافیست مقدار a را در فرمول تابع قرار دهیم.

مثال ۳ ✓

اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، مقدار $f(2)$ چیست؟

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

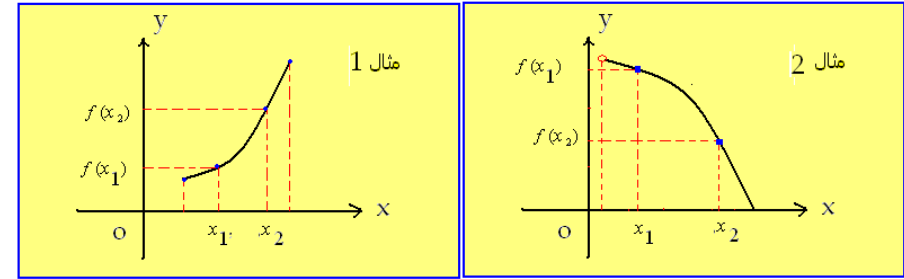
4. یافتن دامنه از روی گراف تابع

گراف تابع را بررسی می‌کنیم و نقاطی از محور x که روی آنها گراف وجود دارد را مشخص می‌کنیم.

6. توابع متزاید و متناقض

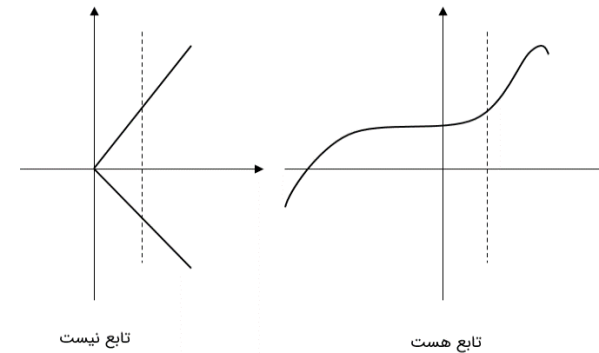
تعریف:

- **متزاید:** اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **متناقض:** اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



روش تشخیص:

1. از روی مشتق تابع (در ریاضی پیشرفته)
2. از روی شیب خط (در توابع خطی)
3. با تحلیل نمودار (در توابع گرافیکی)



7. انتقال گرافها

انتقال افقی:

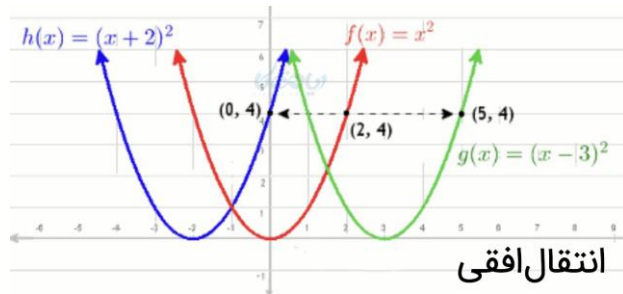
- انتقال به راست به اندازه a واحد: $f(x - a)$
- انتقال به چپ به اندازه a واحد: $f(x + a)$

مثال 5:

تابع پایه $f(x) = x^2$:

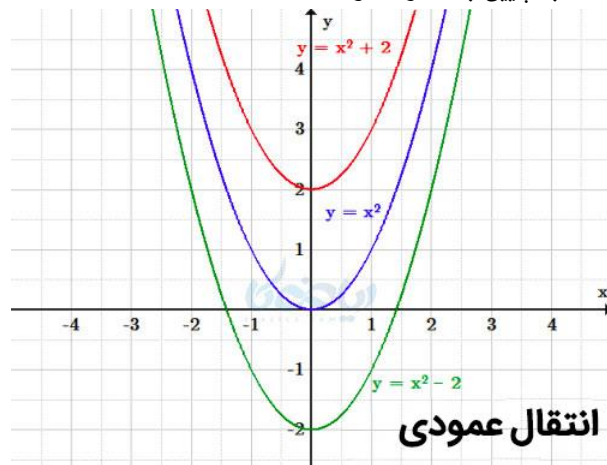
تابع: $g(x) = (x - 3)^2$ انتقال به راست به اندازه 3 واحد

تابع: $h(x) = (x + 2)^2$ انتقال به چپ به اندازه 2 واحد



انتقال عمودی:

- انتقال به بالا به اندازه b واحد: $f(x) + b$
- انتقال به پایین به اندازه b واحد: $f(x) - b$



مثال 6:

تابع پایه $f(x) = x^2$:

تابع جدید $\rightarrow f(x-2) + 3 = (x-2)^2 + 3$ انتقال ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا

تمرین‌های طبقه‌بندی شده

تمرین ۱ - دامنه تابع

دامنه توابع زیر را بیابید:

$$1. f(x) = \frac{1}{x-5}$$

$$2. f(x) = \sqrt{3-x}$$

$$3. f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

تمرین ۲ - مقدار تابع

1. اگر $f(x) = x^2 - x$ ، مقدار $f(-2)$ را بیابید.

2. اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، مقدار $f(8)$ را بیابید.

تمرین ۳ - تحلیل گراف

نمودار تابع $f(x) = x^2$ را رسم کنید و مشخص کنید:

- رأس کجاست؟
- تابع در چه بازه‌ای متناقص است؟
- تابع در چه بازه‌ای متزاید است؟

تمرین ۴ - انتقال گراف

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را:

- ۲ واحد به راست منتقل کنید \rightarrow تابع جدید چیست؟
- ۳ واحد پایین ببرید \rightarrow تابع جدید چیست؟

- سپس هر دو را با هم انجام دهید \rightarrow تابع نهایی چیست؟

فعالیت‌های کلاسی

فعالیت ۱: نمودار و دامنه

معلم گراف تابعی ساده (مثلاً پاره‌خط، سهمی، یا ریشه‌ای) را نشان دهد. دانش‌آموزان باید:

- دامنه و برد تابع را بخوانند
- مقدار تابع را برای چند نقطه دلخواه بیابند

فعالیت ۲: گروهی - طراحی گراف انتقال یافته

گروه‌ها یک تابع پایه مثل $f(x) = x^2$ را انتخاب کنند. به کمک کاغذ میلیمتری یا دیجیتال، انتقال‌هایی مثل $f(x-1) + 2$ را اعمال کنند، تابع جدید بنویسند، و گراف را رسم کنند.

فعالیت ۳: کارت بازی تابع

معلم کارت‌هایی تهیه کند شامل:

- فرمول تابع
- گراف
- دامنه و برد
- نوع انتقال

دانش‌آموزان باید کارت‌هایی را که به هم مربوط هستند، پیدا کرده و تطبیق دهند.

صفحه: 103

اهداف آموزشی:

- شاگردان در ختم این درس بتوانند ترکیب توابع را بفهمند.
- شاگردان به فورمول‌ها و روش‌های حل سوالات پیرامون درس آشنا گردند.

عملیه های چهارگانه بالای توابع صدق می کند. این چهار عملیه به ترتیب قرار ذیل ارائه می شود.

$$f(x) \pm g(x) = (f \pm g)(x) \quad : \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) \quad : \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) \div g(x) = (f \div g)(x) \quad : \quad D_{f \div g} = D_f \cap D_g, \{x / g \neq 0\}$$

مثال اول: عملیه های اساسی را بالا توابع $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 4$ انجام دهید.

حل: برای انجام عملیه های اساسی بالای توابع معاللات آنها را جمع، تفریق، ضرب و تقسیم می کنیم.

$$f(x) = 2x + 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 - 4 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$1. f(x) + g(x) = x^2 - 4 + 2x + 1 = x^2 + 2x - 3 \quad D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$2. f(x) - g(x) = 2x + 1 - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 5 \quad D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$3. f(x) \times g(x) = (x^2 - 4)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$D_{f \times g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$4. f(x) \div g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4} \quad D_{f/g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

مثال دوم: اگر توابع $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = 4x + 5$ باشد، $(f + g)(-2)$ را دریافت نمائید.

حل: ابتدا توابع فوق را جمع می کنیم و بعداً قیمت داده شده متحول $(x = -2)$ را در حاصل جمع آنها وضع می نمائیم.

$$f(x) + g(x) = x^2 - 3 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 2$$

$$(f + g)(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$$

فعالیت: اگر $f(x) = x - 5$ و $g(x) = x^2 - 2$ باشند. حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها را دریابید.

تمرین: عملیه های اساسی را بالای توابع ذیل انجام دهید.

$$1) \begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x} \\ g(x) = \sqrt{3+x} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ g(x) = 3x^2 \end{cases}$$

عنوان 2: ترکیب توابع

صفحه: 107

اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان.

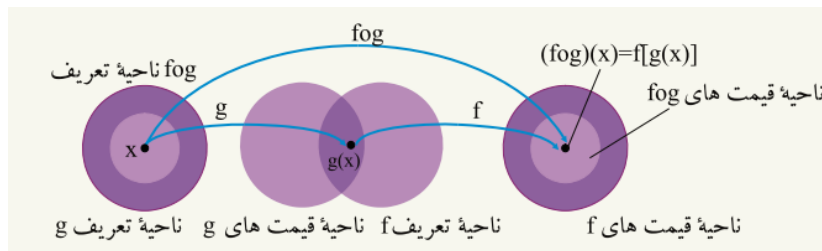
- بتوانند توابع را باهم ترکیب نمایند.
- ترکیب دوگانه و سه گانه را انجام داده بتوانند.
- سوالات مربوط به ترکیب توابع را حل کرده بتوانند.

تعریف: هرگاه معادله یک تابع قسمتاً بجای محتول تابع دیگر وضع گردد، این عملیه را ترکیب توابع می نامند. و یا به عبارت دیگر

اگر f و g توابع از متحول x باشند، ترکیب توابع f و g را به شکل $f \circ g = f(g(x))$ را نشان می دهد.

ناحیه تعریف $(f \circ g)(x)$ عبارت از x است که در ناحیه تعریف تابع $g(x)$ باشد و $g(x)$ در ناحیه تعریف f باشد. یعنی

$$(f \circ g): D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ and } g(x) \in D_f\}$$



مثال اول: اگر $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = x^2 + 6$ باشد درین صورت $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$ را دریافت کنید.

حل: برای ترکیب یک تابع معادله همان تابع را قسماً بجای متحول تابع دیگر قرار می دهیم.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (3x - 4)^2 + 6 = 9x^2 - 24x + 22$$

ناحیه تعریف ترکیب توابع فوق تمام اعداد حقیقی اند.

مثال دوم: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 - x$ را ترکیب و ناحیه تعریف ترکیب آنها را دریافت کنید.

حل:

$$f(x) = \sqrt{x} : D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = 1 - x : D_g = (-\infty, +\infty)$$

$$f \circ g = f(g(x)) = \sqrt{1 - x} : D_{f \circ g} = \{x : x \in \mathbb{R}, 1 - x \geq 0 = (-\infty, 1]\}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = 1 - \sqrt{x} : D_{g \circ f} = \{x : x \in \mathbb{R}, x \in D_f \text{ and } f(x) \in D_g\}$$

$$\{x : x \geq 0, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$$

تمرین: توابع ذیل را ترکیب کنید.

$$1) f(x) = 3x, \quad g(x) = \frac{3}{x}$$

$$2) f(x) = 2x^2 - 3x, \quad g(x) = x - 2$$

$$3) f(x) = \frac{3x}{x - 4}, \quad g(x) = 5x$$

عنوان 3: تابع معکوس

صفحه: 111

اهداف آموزشی: درختم این درس شاگردان قادر گردد تا

- مفهوم تابع معکوس را بدانند
- تابع معکوس یک تابع را دریافت کرده بتوانند
- سوالات مربوط به تابع معکوس را حل کرده بتوانند.

تعریف: اگر در یک تابع جاهای ناحیه تعریف و ناحیه قیمت آنها باهم تبدیل گردد یک تابع جدید بوجود می آید که بنام تابع معکوس تابع اول نامیده می شود.

مثال اول: اگر $f := \{(2,4), (x,3), (a,b), (m,n)\}$ یک تابع باشد درین صورت

$$f^{-1} = \{(4,2), (3,x), (b,a), (n,m)\}$$

در تابع معکوس رابطه ذیل وجود دارد.

$$D_f = R_{f^{-1}} \quad \text{and} \quad D_{f^{-1}} = R_f$$

نکته: تنها توابع یک به یک معکوس پذیر اند.

تابع یک به یک

تعریف: تابع $f(x)$ یک به یک است اگر برای $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود که $f(x_1) \neq f(x_2)$ است.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

مثال: کدام یکی از توابع $f(x) = -4x + 12$ و $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ یک به یک است؟

حل: برای دانستن یک به یک بودن تابع دو قیمت اختیاری مختلف در تابع وضع می کنیم، اگر نتیجه مختلف حاصل شد تابع یک به است و اگر نتیجه مشابه حاصل شد تابع یک به یک نیست.

$$f(x) = -4x + 1 : -2 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 20 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \neq f(2)$$

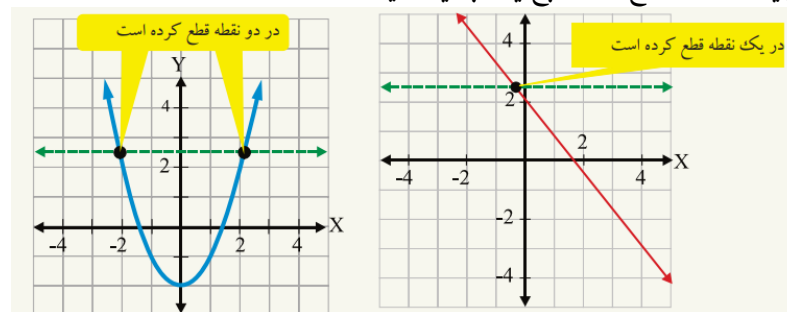
تابع فوق شرط یک به یک بودن را صدق نمود، پس یک به یک است.

$$g(x) = \sqrt{25 - x^2} : -2 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = \sqrt{21} \\ f(2) = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow f(-2) = f(2)$$

تابع $g(x)$ شرط یک به یک بودن را صدق نمی کند، پس یک به یک نیست.

تشخیص تابع یک به یک از روی گراف

اگر یک خط افقی موازی با محور x گراف تابع را در یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک است و اگر در بیشتر از یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک نیست.



دریافت تابع معکوس یک تابع

برای دریافت تابع معکوس یک تابع جاهای x و y را تبدیل نموده دوباره قیمت y را از جنس x دریافت می کنیم، حاصل عملیه تابع معکوس تابع اول است.

مثال: تابع معکوس تابع $y = 3x + 2$ را دریابید.

حل: جاهای x و y را تبدیل می کنیم.

$$y = 3x + 2 \Rightarrow x = 3y + 2$$

$$x - 2 = 3y : \div (3) \Rightarrow y = \frac{x - 2}{3} = f^{(-1)}(x)$$

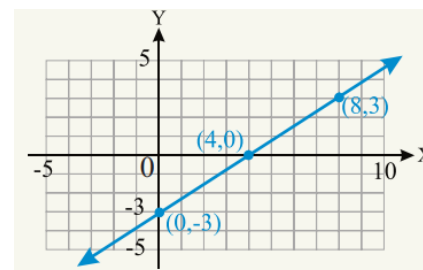
عنوان 4: تابع پولینومی

تابع خطی: عبارت از تابع است که گراف آن یک خط مستقیم باشد. و معادله آن عبارت اند از.

معادله تابع خطی عبارت اند از $y = ax + b$ و گراف آن یک خط مستقیم است.

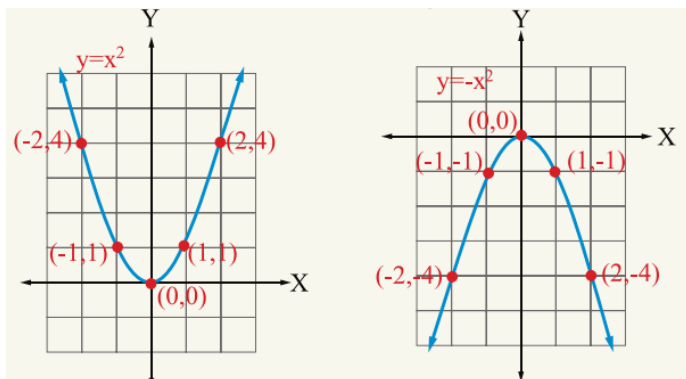
مثال: معادله تابع $y = \frac{3}{4}x - 3$ را در نظر گرفته جزئیات و معادلات آن را رسم کنید.

حل: در تابع خطی ضریب x همیشه بنام میل خط مستقیم و عدد ثابت بنام نقطه تقاطع با محور y گفته می شود.



تابع درجه دوم و گراف آن

تابع درجه دوم عبارت از تابع اند که توان متحول آن عدد 2 بوده و گراف آن یک پارابول باشد. که به شکل ذیل ترسیم می گردد.



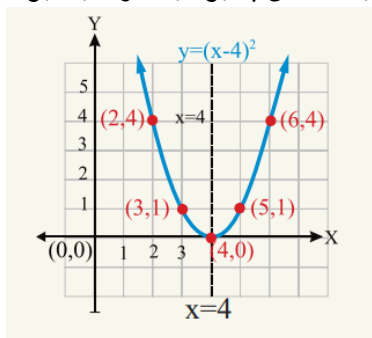
مثال: گراف تابع $y = (x - 4)^2$ را ترسیم نمائید.

حل: برای ترسیم گراف قرار ذیل عمل می کنیم.

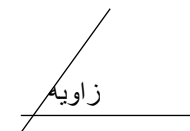
- در یک جدول برای x قیمت میدهم و برای y قیمت دریافت می گردد.
- تقاطع با محورات را دریافت می کنیم طوری که برای تقاطع با x قرار میدهم $y = 0$ و برای تقاطع با y قرار میدهم $x = 0$.
- کمیات وضعیه راس پارابول را تعیین می کنیم. فرمول تعیین راس پارابول عبارت اند از.

$$v = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

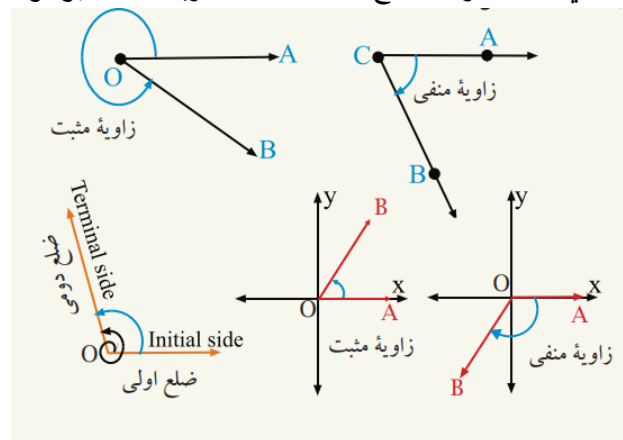
- دهن پارابول را تعیین می کنیم طوری که در اصل معادله اگر $a > 0$ دهن پارابول به طرف پائین است و دارای نقطه اضغری می باشد و اگر $a < 0$ باشد دهن پارابول به طرف بالا بوده و دارای نقطه اعظمی می باشد.



زاویه: کنج است که از تقاطع دو نیم خط بوجود آمده است، یا زاویه از دوران یک خط به حول یک نقطه ایجاد می گردد.



در مثلثات زاویه را دو نوع معرفی می نماید، زاویه که از حرکت ضلع دوار موافق عقربه ساعت به وجود آید را (زاویه منفی) و زاویه که از حرکت ضلع دوار مخالف عقربه ساعت بوجود آید را



(زاویه مثبت) می نامند.

واحد های اندازه گیری زاویه

زاویه را توسط سه واحد (درجه، گراد و رادیان) اندازه می کند.

الف. درجه: $\frac{1}{360}$ حصه از وسعت یک دایره را درجه می نامند و به حرف D و نشانه $(^\circ)$ نمایش داده می شود. مثلاً بیست درجه را به شکل $20D$ یا بیشتر به شکل 20° نشان می دهد. واحد های کوچکتر درجه دقیقه و ثانیه است که نشانه دقیقه ($'$) و نشانه ثانیه ($''$) است، یعنی.

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^\circ = 3600''$$

مثال: $35^\circ 15' 27''$ را به سیستم اعشاری و $(48,3625)^\circ$ را به سیستم DMS بنویسید.

حل:

$$35^\circ 15' 27'' = 35^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{27}{3600}\right)^\circ = 35^\circ + 0,25^\circ + 0,0075^\circ = 35,2575^\circ$$

$$48,3625^\circ = 48^\circ + 0,3625^\circ = 48^\circ + (0,3625 \cdot 60)' = 48^\circ + (21,75)' \\ = 48^\circ + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^\circ 21' 45''$$

(ب) گراد: $\frac{1}{400}$ حصه وسعت یک دایره را بنام گراد یاد می کند. که به حرف G نشان داده می شود، واحد های کوچکتر آن دقیقه گراد و ثانیه گراد است.

$$1G = 100G' \quad 1G' = 100G''$$

(ج) رادیان: عبارت از اندازه زاویه مرکزی می باشد که طول قوس مقابل آن مساوی به طول شعاع دایره باشد.

وسعت یک دایره مکمل برابر با 2π رادیان است یعنی.

$$360^\circ = 2\pi^R$$

تبدیل واحدهای اندازه گیری زاویه به یک دیگر

برای تبدیل واحدهای اندازه گیری زاویه به یک دیگر از رابطه عمومی ذیل استفاده می نمایم.

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \quad \text{یا} \quad \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

مثال 1: اندازه 220 درجه را به رادیان تبدیل کنید.

حل 1:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{220}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{220\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \Rightarrow \boxed{R = \frac{11\pi}{9}}$$

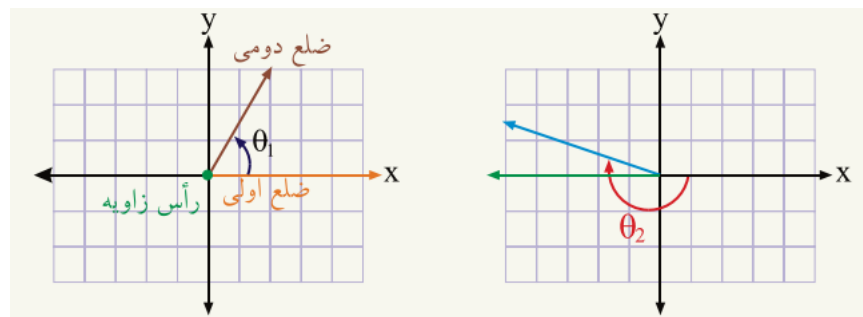
مثال 2: اندازه $\frac{5\pi}{6}$ را به گراد تبدیل کنید.

حل 2:

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow G = \frac{200 \cdot \frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{1000}{6} \Rightarrow \boxed{G = \frac{1000}{6}}$$

حالت معیاری یک زاویه

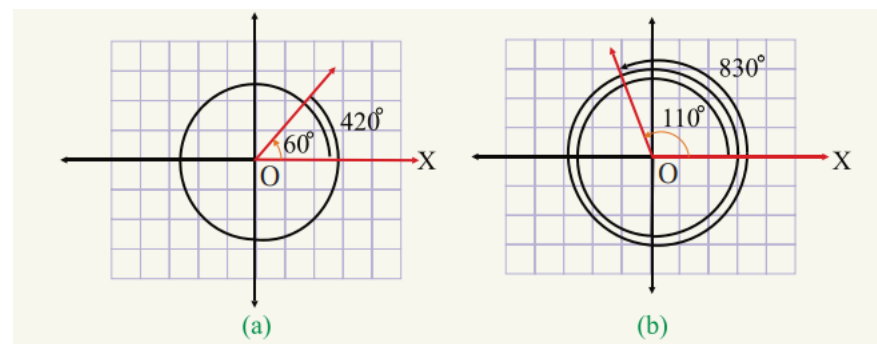
اگر راس زاویه در مبدا کمیات وضعیه و ضلع اولی زاویه بالای جهت مثبت محور X باشد این زاویه در حالت معیاری می باشد.



زاویه کوترمنل

دو یا چند زاویه که اضلاع دومی آن در حالت معیاری باهم منطبق باشند به نام زاویه های کوترمنل یاد می شود.

مثال: در اشکال ذیل دیده می شوند که اضلاع دومی زاویه های 110 و 830 و در شکل دیگر 60 و 420 باهم منطبق اند. پس گفته می توانیم که زاویه 110 با 830 کوترمنل است، همچنان زاویه 60 با زاویه 420 نیز کوترمنل است.



توابع مثلثاتی

نسبت های مثلثاتی که از تقسیم اضلاع مقابل، مجاور و وتر بر یکدیگر بدست می آید بنام توابع مثلثاتی نامیده می شود که در مجموع شش نوع اند. که عبارت اند از سین زاویه، کوساین زاویه، تانجانت زاویه، کوتانجنت زاویه، سیکینت زاویه و کوسیکنت زاویه.

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

بعضی روابط اساسی بین نسبت های مثلثاتی زوایا

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
3. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
4. $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
5. $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
6. $\sin x = \frac{1}{\csc x}$
7. $\cos x = \frac{1}{\sec x}$

اشاره نسبت های مثلثاتی: اشاره نسبت های مثلثاتی زوایا در مختصات قایم قرار ذیل اند.

ربع	$\sin \theta, \csc \theta$	$\tan \theta, \cot \theta$	$\sec \theta, \cos \theta$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	+	-
IV	-	-	+

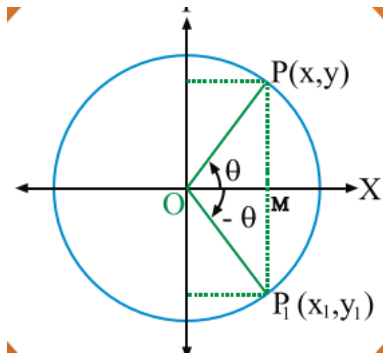
$\sin \theta > 0$	$\sin \theta > 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta < 0$	$\tan \theta > 0$
$\cot \theta < 0$	$\cot \theta > 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta > 0$	$\csc \theta > 0$
$\sin \theta < 0$	$\sin \theta < 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta > 0$	$\tan \theta < 0$
$\cot \theta > 0$	$\cot \theta < 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta < 0$	$\csc \theta < 0$

زاویه 360 درجه با زاویه صفر درجه کوترمنل است بناً نسبت های مثلثاتی آن نیز برابر با نسبت های صفر است.

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده با زاویه های دیگر

رابطه بین نسبت های مثلثاتی زوایای θ و $-\theta$

زاویه حاده مثبت به اندازه θ مخالف عقربه ساعت و زاویه برابر اندابه اندازه $-\theta$ موافق عقربه ساعت ترسیم می کنیم و مطابق آن نسبت های مثلثاتی آنها را دریافت می نمایم



$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cotan(-\theta) = -\cotan\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه (-30°) را تعیین کنید.

حل:

$$\sin(-30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30) = -\tan(30) = -\sqrt{3}$$

$$\cotan(-30) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ارتباط بین نسبت های مثلثات دو زاویه که مجموعه و فرق آنها 180° گردد.

$$\sin(180 - \theta) = \sin\theta$$

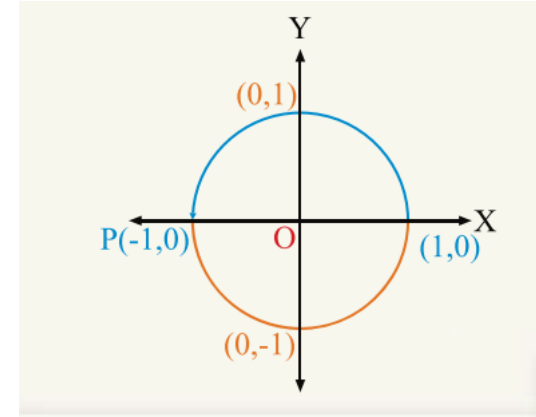
$$\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180 - \theta) = -\tan\theta$$

$$\cotan(180 - \theta) = -\cotan\theta$$

نسبت های مثلثاتی زاویه های $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360°

برای دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه های فوق دایره مثلثاتی با شعاع $r = 1 \text{ unit}$ را در نظر می گیریم و در نظر داشت نقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ ، $(-1,0)$ و $(0,-1)$ می توان نسبت های مثلثاتی آنها را دریافت نمود.



$$\sin 0 = 0 \quad \cos 0 = 1 \quad \tan 0 = 0 \quad \cotan 0 = \infty \quad \sec 0 = \infty \quad \csc 0 = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 90°

$$\sin 90 = 1, \quad \cos 90 = 0 \quad \tan 90 = \infty, \quad \cotan 90 = 1, \quad \sec 90 = \infty, \quad \csc 90 = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 180°

$$\sin 180 = 0, \quad \cos 180 = -1, \quad \tan 180 = 0, \quad \cotan 180 = -\infty$$

$$\sec 180 = -1, \quad \csc 180 = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 270°

$$\sin 270^\circ = -1, \quad \cos 270 = 0 \quad \tan 270 = -\infty$$

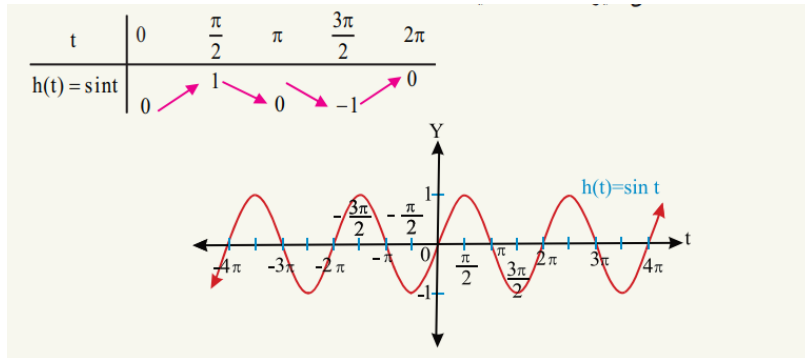
$$\cotan 270 = 0, \quad \sec 270 = \infty \quad \csc 270 = -1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 360°

- مفهوم گراف توابع مثلثاتی را بدانند.
- گراف توابع مثلثاتی را به شکل درست رسم کرده بتوانند.
- اهمیت گراف های توابع مثلثاتی را بدانند.
- روش استفاده از گراف توابع مثلثاتی را یاد بگیرند.

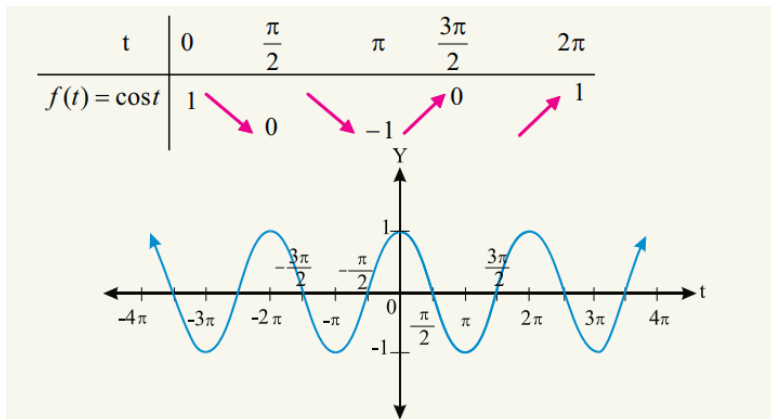
گراف تابع $f(x) = \sin x$

تابع $f(x) = \sin x$ یک تابع همواره متناوب است، ساحه تعریف آن تمام اعداد حقیقی و ساحه قیمت آن $[-1, +1]$ اند که تابع درین انتروال تعریف شده و گراف آن رسم می گردد.



گراف تابع $f(x) = \cos x$

تابع $f(x) = \cos x$ نیز یک تابع همواره متناوب است، ساحه تعریف آن تمام اعداد حقیقی و ساحه قیمت آن $[-1, +1]$ می باشد و گراف تابع درین انتروال ترسیم می گردد.



پریود و دامنه تابع $\sin x$ و $\cos x$

$$\sec(180 - \theta) = -\sec\theta \quad \csc(180 - \theta) = \csc\theta$$

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان 180 درجه گردد.

$$\sin(180 + \theta) = -\sin\theta \quad \cos(180 + \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180 + \theta) = \tan\theta \quad \cotan(180 + \theta) = \cotan\theta$$

$$\sec(180 + \theta) = -\sec\theta \quad \csc(180 + \theta) = -\csc\theta$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه که مجموعه شان 90° گردد.

$$\sin(90 - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90 - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90 - \theta) = \cotan\theta$$

$$\cotan(90 - \theta) = \tan\theta$$

$$\sec(90 - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90 - \theta) = \sec\theta$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان 90° گردد.

$$\sin(90 + \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90 + \theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(90 + \theta) = -\cotan\theta$$

$$\cotan(90 + \theta) = -\tan\theta$$

$$\sec(90 + \theta) = -\csc\theta$$

$$\csc(90 + \theta) = \sec\theta$$

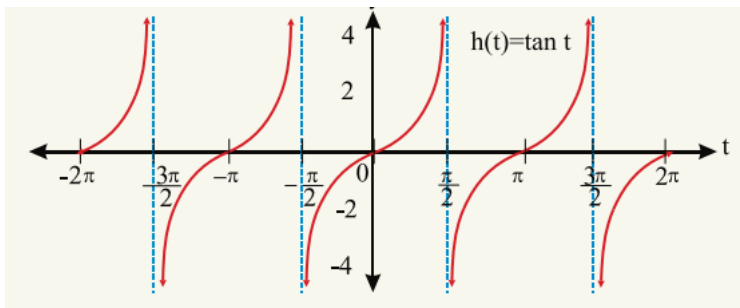
فعالیت ها:

1. زاویه چیست؟ و چند نوع می باشد.
2. واحد های اندازه گیری زاویه را به ترتیب تشریح کنید.
3. 25° درجه را به گراد و رادیان تبدیل نمائید.
4. $\frac{3\pi}{7}$ رادیان را به درجه و گراد تبدیل نمائید.
5. نسبت های مثلثاتی زاویه 240 را دریافت نمائید.
6. نسبت های مثلثاتی زاویه (-40) را دریافت نمائید.
7. نسبت های مثلثاتی زاویه 270 را تعیین کنید.

گراف توابع مثلثاتی

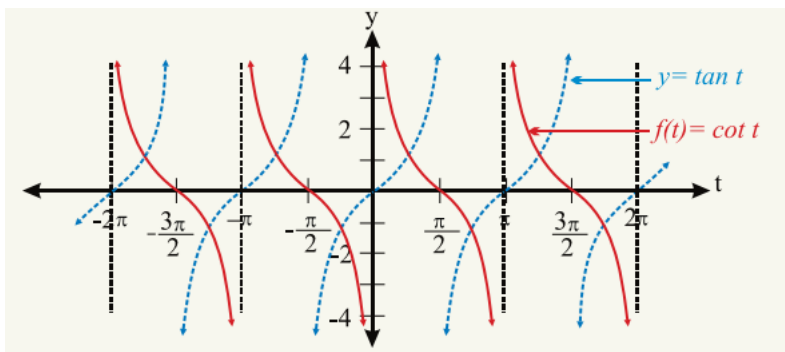
صفحه: 193

اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان قادر گردد تا



گراف تابع $f(x) = \tan x$

ناحیه تعریف این تابع عبارت اند از $\mathbb{R} - \{t, t \in \mathbb{R}, t = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ و ناحیه قیمت آن تمام اعداد حقیقی اند.



گراف تابع $f(x) = \sec x$

گراف تابع سیکانت معکوس گراف تابع کوساین است. یعنی $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

ناحیه تعریف تابع سیکانت عبارت اند از $\mathbb{R} - \left\{t: t = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ و ناحیه قیمت آن عبارت از $\mathbb{R} - [-1, 1]$ و گراف آن قرار ذیل ترسیم می گردد.

پیریود توابع $y = a \cos bx$ و $y = a \sin bx$ از رابطه $\frac{2\pi}{b}$ طوری که $b > 0$ باشد دریافت می شود و دامنه تابع از رابطه $|a|$ دریافت می گردد.

مثال: پیریود و دامنه تابع $y = -2 \sin 4x$ را دریافت نمائید.

حل:

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{پیریود}$$

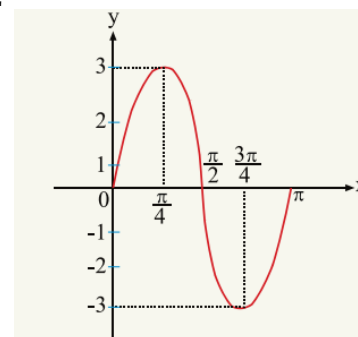
$$|a| = |-2| = 2 \quad \text{دامنه}$$

مثال 2: گراف تابع $y = 3 \sin 2x$ را در انتروال $[0, \pi]$ ترسیم کنید.

حل 2: در ابتداء دامنه و پیریود تابع را دریافت می کنیم.

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \text{پیریود}$$

$$|a| = |3| = 3 \quad \text{دامنه}$$



گراف تابع $f(x) = \tan x$

ناحیه تعریف تابع $y = \tan x$ عبارت اند از $\mathbb{R} - \left\{t, t \in \mathbb{R}, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ و ناحیه قیمت آن تمام اعداد حقیقی اند. تانجنت یک تابع همواره متناوب است که پیریود تابع تانجانت π است و گراف آن قرار ذیل ترسیم می گردد.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

مثال 1: نسبت های مثلثاتی زاویه 120 را دریابید.

حل 1: نظر به فرمول ساین، کوساین دو زاویه عمل می کنیم.

$$\sin 120 = \sin(90 + 30) = \sin 90 \cdot \cos 30 + \cos 90 \cdot \sin 30$$

$$= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \Rightarrow \boxed{\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 120 = \cos(90 + 30) = \cos 90 \cdot \cos 30 - \sin 90 \cdot \sin 30$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 120 = -\frac{1}{2}}$$

❖ نسبت های مثلثاتی تفاضل دو زاویه

محاسبه $\sin(\alpha - \beta)$ ، $\cos(\alpha - \beta)$ و $\tan(\alpha - \beta)$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

مثال 1: ساین 150 را دریابید.

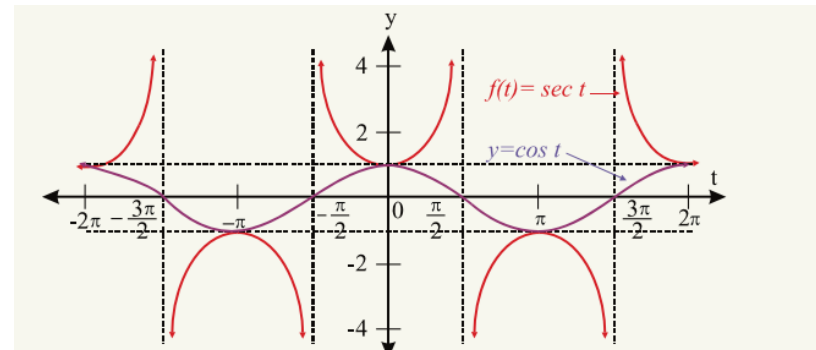
حل 1:

$$\sin 150 = \sin(180 - 30) = \sin 180 \cdot \cos 30 - \cos 180 \cdot \sin 30$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin 150 = \frac{1}{2}}$$

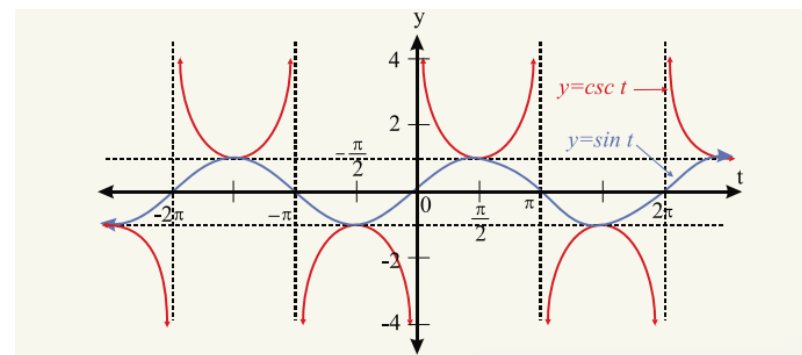
مثال 2: کوساین $\frac{\pi}{12}$ را دریابید.

حل 2:



گراف تابع $f(x) = \csc x$

گراف تابع کوسیگنانت معکوس تابع ساین است یعنی $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ و گراف آن معکوس تابع ساین می باشد. یعنی



قوانین نسبت های مثلثاتی زوایای مرکب

فرمول های جمع و ضرب

❖ نسبت های مثلثاتی مجموع دو زاویه

محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ ، $\cos(\alpha + \beta)$ و $\tan(\alpha + \beta)$

برای محاسبه نسبت های مثلثاتی فوق از فرمول های عمومی آنها استفاده می نمائیم. یعنی

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

نسبت های مثلثاتی 3α از جنس نسبت های مثلثاتی α

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

مثال 1: $\sin 180$ را از جنس $\sin 60$ دریابید.

حل 1:

$$\sin 180 = 3 \sin 60 - 4 \sin^3 60 = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$\sin 180 = 0$$

مثال 2: $\cos 180$ را از جنس $\cos 60$ دریافت نمائید.

حل 2:

$$\cos 180 = 4 \cos^3 60 - 3 \cos 60 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \frac{1}{2} = \frac{4}{8} - \frac{3}{2} = -1$$

مثال 3: قیمت $\tan 135$ را از جنس $\tan 45$ دریافت نمائید.

حل 3:

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan 45 - \tan^3 45}{1 - 3 \tan^2 45} = \frac{3 \cdot 1 - (1)^3}{1 - 3(1)^2} = \frac{3 - 1}{1 - 3 \cdot 1} = -1$$

فعالیت ها:

- تانجانانت 90 را از جنس تانجانانت 30 درجه دریافت نمائید.
- سین 135 درجه را از جنس سین 45 درجه دریافت نمائید.
- کوسین 270 درجه را از جنس کوسین 90 درجه دریافت نمائید.

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی زوایا به شکل حاصل ضرب

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \\ &> \boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \end{aligned}$$

فعالیت ها:

1. گراف تابع سین و کوسین را در یک صفحه ترسیم کنید.

2. دامنه و پیریود تابع $y = -5 \sin 3x$ را دریابید.

3. نسبت های مثلثاتی زاویه 75 را دریابید.

4. نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{5\pi}{12}$ را دریابید.

نسبت های مثلثاتی 2α از جنس α :

در بعضی موارد نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه از جنس همان زاویه ما را در حل مسایل مثلثاتی کمک می کند. بنا فورمول های آن را قرار ذیل مطالعه می نمائیم.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه زاویه 120 درجه را از جنس 60 درجه تعیین کنید.

حل:

$$\sin 120 = \sin 2 \cdot 60 = 2 \sin 60 \cos 60 = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120 = \cos^2 60 - \sin^2 60 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120 = \tan 2 \cdot 60 = \frac{2 \tan 60}{1 - \tan^2 60} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$$

$$\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

مثال 1: نشان دهید که $\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$ است.

حل 1: با استفاده از فرمول های تحویل ضربی داریم که:

$$\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \frac{2 \sin \frac{8x + 2x}{2} \cos \frac{8x - 2x}{2} + \sin 5x}{2 \cos \frac{8x + 2x}{2} \cos \frac{8x - 2x}{2} + \cos 5x}$$

$$= \frac{2 \sin 5x \cos 3x + \sin 5x}{2 \cos 5x \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x(2 \cos 3x + 1)}{\cos 5x(2 \cos 3x + 1)} = \tan 5x$$

مثال 2:

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ - \cos 15^\circ &= -2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

طول قوس

صفحه: 249

اگر اندازه یک قوس θ° و شعاع دایره R و طول قوس مقابل زاویه θ برابر با L و محیط دایره برابر با C باشد، پس داریم که:

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360} \Rightarrow \frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360} \Rightarrow \boxed{L = \pi R \frac{\theta^\circ}{180}}$$

مثال: طول قوس زاویه را که در مقابل زاویه مرکزی 45 درجه قرار دارد دریابید اگر شعاع دایره 14cm باشد.

با استفاده از نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه فرمول های تحویل ضربی در مثلثات قرار ذیل دریافت می شود.

مجموع و تفاضل سین های دو زاویه عبارت اند از:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

مجموع و تفاضل کوسین های دو زاویه عبارت اند از:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

مجموع و تفاضل تانجنت های دو زاویه قرار ذیل دریافت می گردد.

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

مثال: نشان دهید که $\frac{\sin 70^\circ + \sin 30^\circ}{\cos 70^\circ + \cos 30^\circ} = \tan 50^\circ$ است.

حل:

$$\frac{\sin 70^\circ + \sin 30^\circ}{\cos 70^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{2 \sin \frac{70^\circ + 30^\circ}{2} \cos \frac{70^\circ - 30^\circ}{2}}{2 \cos \frac{70^\circ + 30^\circ}{2} \cos \frac{70^\circ - 30^\circ}{2}} = \frac{2 \sin 50^\circ \cos 20^\circ}{2 \cos 50^\circ \cos 20^\circ} = \tan 50^\circ$$

تبدیل حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایا به مجموع و تفاضل

تبدیل حاصل ضرب به جمع و تفاضل را نیز می توان از رابطه عمومی نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه دریافت نمود. این روابط عبارت اند از:

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \cos(A - B)]$$

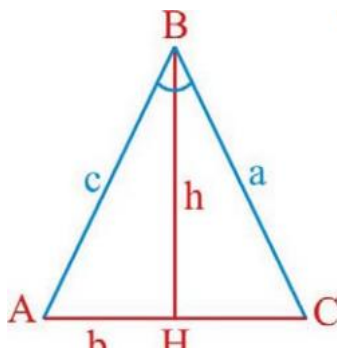
$$S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta)$$

$$- \sin \theta) = \frac{1}{2} (12\text{cm})^2 (60 - \sin 60) = \frac{144\text{cm}^2}{2} (60 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$S_{\text{قطعه}} = 72(60 - \frac{\sqrt{3}}{2})\text{cm}^2.$$

مساحت مثلث از جنس دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع

اگر اندازه دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع برابر معلوم باشد، مساحت مثلث از فرمول ذیل دریافت می گردد.



$$S_{ABC} = b \cdot c \cdot \sin A$$

مثال: مساحت مثلثی را دریابید که طول دو ضلع آن به ترتیب $a = 3.5\text{cm}$ و $b = 6\text{cm}$ و زاویه بین آن $B = 47.5^\circ$ باشد.

حل:

$$S_{ABC} = b \cdot c \cdot \sin A \Rightarrow S = 3.5\text{ cm} \cdot 6\text{cm} \cdot \sin 47.5^\circ$$

$$S = S = 3.5\text{ cm} \cdot 6\text{cm} \cdot 0.73 \approx 7.74\text{cm}^2$$

مثال 2: مساحت مثلثی را دریابید که طول دو ضلع آن به ترتیب $a = 8\text{cm}$ و $b = 13\text{cm}$ بوده و زاویه بین این دو ضلع 130° باشد.

حل:

$$S = 8\text{cm} \cdot 13\text{cm} \cdot \sin 130 = 8\text{cm} \cdot 13\text{cm} \cdot 0.766 = 39.8\text{cm}^2$$

حل: با استفاده از فرمول بالا قیمت ها را وضع می کنیم طول قوس دریافت می گردد.

$$L = \pi R \frac{\theta^0}{180} = \pi \cdot 14\text{cm} \frac{45}{180} = \frac{14}{4} \pi \text{ cm} \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7} \text{ cm} = 11\text{cm}$$

$$\boxed{L = 11\text{cm}}$$

قطاع دایره:

قسمت سطح دایره که توسط دو شعاع و یک قوس احاطه شده باشد را بنام قطاع دایره یاد می کنند.

مساحت قطاع دایره از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

مثال: اگر شعاع یک دایره 10cm باشد مساحت قطاع دایره را دریابید در صورتی که $\theta = 90^\circ$ درجه باشد.

حل:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} (10\text{cm})^2 \cdot 90 = 4500\text{cm}^2$$

یا از جنس رادیان داریم که

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} (10\text{cm})^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 25\pi\text{cm}^2$$

قطعه دایره:

قسمت از دایره که توسط یک وتر و یک قوس جدا گردد، بنام قطعه دایره یاد می گردد. و مساحت قطعه دایره از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$

مثال: مساحت قطعه دایره را دریابید که $R = 12\text{cm}$ و اندازه قوس آن $\widehat{AB} = 60^\circ$ باشد.

حل:

$$P = \frac{a + b + c}{2} = \frac{11cm + 12cm + 13cm}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{18 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = 61.48cm^2$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{4(61.48)} = 6.98cm \Rightarrow \boxed{R = 6.98cm}$$

مثال 2: شعاع دایره محیطی مثلثی را دریابید که اضلاع آن به ترتیب $a = 3cm$ ، $b = 5cm$ و $c = 6cm$ باشد.

حل 2:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{90}{4\sqrt{56}} \approx 3cm \Rightarrow \boxed{R \approx 3cm}$$

شعاع دایره محاطی مثلث

دایره محاطی یک مثلث عبارت از دایره‌ای است که دایره در داخل مثلث واقع بوده و دایره در داخل مثلث با سه ضلع مثلث مماس بوده، مرکز دایره محاطی تقاطع هر سه ناصف الزاویه مثلث باشد.

شعاع دایره محاطی از رابطه ذیل دریافت می‌گردد.

$$r = \frac{s}{p}$$

مثال: شعاع دایره محاطی مثلث را دریافت نمایید طوری که اضلاع آن به ترتیب $7cm$ ، $8cm$ و $9cm$ باشد.

حل:

$$r = \frac{s}{p} = \frac{\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}}{12cm} = \frac{28.83cm^2}{12cm} \approx 2.23cm$$

اعداد موهومی

جزر اعداد منفی با درجه جفت را بنام اعداد موهومی می‌نامند که علامه عدد موهومی $\sqrt{-1} = i$ اند.

فرمول هیرون (مساحت مثلث از روی سه ضلع آن)

یک مثلث کیفی که اضلاع آن a ، b و c باشد را در نظر می‌گیریم. اگر p نصف محیط مثلث یعنی $(p = \frac{a+b+c}{2})$ باشد، درین صورت مساحت مثلث عبارت اند از.

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال: مساحت مثلثی را دریابید که طول اضلاع آن به ترتیب $a = 5cm$ ، $b = 4cm$ و $c = 3cm$ باشد.

حل:

$$p = \frac{3 + 4 + 5}{2} = \frac{12}{2} = 6cm$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

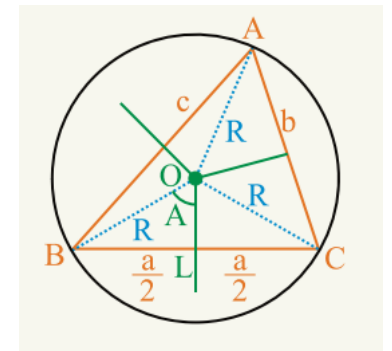
$$S = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)} = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6cm^2$$

شعاع دایره محیطی یک مثلث

دایره محیطی دایره‌ای است که مثلث در داخل دایره قرار داشته باشد، و دایره با هر سه راس مثلث مماس بوده و مرکز دایره محیطی نقطه تقاطع هر سه ناصف عمودی اضلاع مثلث می‌باشد.

شعاع دایره محیطی از رابطه ذیل دریافت می‌گردد.

$$R = \frac{abc}{4s}$$



مثال 1: شعاع دایره محیطی در مثلث ABC را دریافت نمایید طوری که اضلاع مثلث به ترتیب $a = 11cm$ و $b = 12cm$ و $c = 13cm$ باشد.

حل 1:

مثال 1: جذر $\sqrt{-16}$ را دریافت نمائید.

حل 1:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{16} \cdot i = \pm 4i$$

مثال 2: جذر $\sqrt{-5}$ را دریافت کنید.

حل 2:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \pm\sqrt{5} \cdot i$$

توان های i

اگر سمبول اعداد موهومی یعنی (i) را به توان اعداد بالابیریم نتیجه آن همیشه یکی از اعداد $\{-1, -i, +1, +i\}$ خواهد بود.

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (\sqrt{-1})^2 = i \cdot 1 = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = 1$$

$$i^5 = i \cdot i^2 \cdot i^2 = i \cdot (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = i$$

اگر توان i زیاد باشد آنرا بر چهار تقسیم نموده به شکل جارج قسمت ضرب مقسوم علیه + باقی مانده میگیریم.

مثال: i^{1998} را دریابید.

حل: توان i یعنی عدد 1998 را بالای 4 تقسیم می کنیم.

$$1998 \div 4 = 499 \text{ باقی میماند } 2$$

$$i^{1998} = i^{4 \cdot 499} \cdot i^2 = (i^4)^{499} \cdot -1 = 1^{499} \cdot -1 = 1 \cdot (-1) = -1$$

عملیه های چهارگانه در اعداد موهومی

❖ عملیه جمع: حاصل جمع دو عدد موهومی یک عدد موهومی است.

مثال: حاصل جمع $7i$ و $8i$ را دریابید.

حل:

$$7i + 8i = 15i$$

❖ عملیه تفریق: حاصل تفریق دو عدد موهومی نیز یک عدد موهومی اند.

مثال: حاصل تفریق $12i - 7i$ را دریابید.

حل:

$$12i - 7i = 5i$$

❖ عملیه ضرب: حاصل ضرب دو عدد موهومی یک عدد حقیقی اند.

مثال: حاصل ضرب $5i$ و $3i$ را دریابید.

حل:

$$(3i)(5i) = 3 \cdot 5 \cdot i^2 = 15 \cdot (-1) = -15$$

❖ عملیه تقسیم: حاصل تقسیم دو عدد موهومی یک عدد حقیقی اند.

مثال: حاصل تقسیم های $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i}$ و $\frac{12i}{6i}$ را دریافت کنید.

حل:

$$\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{12i}{6i} = \frac{12}{6} = 2$$

جمع و تفریق اعداد مختلط

قرار است درین درس مفاهیم ذیل را بخوانیم

عملیه جمع اعداد مختلط: برای انجام عملیه جمع اعداد مختلط، قسمت های حقیقی را جدا و قسمت های موهومی را جدا جمع می کنیم. حاصل جمع دو عدد مختلط یک عدد مختلط است.

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1i \\ z_2 = a_2 + b_2i \end{cases} \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

مثال:

$$\begin{cases} z_1 = 6 + 2i \\ z_2 = -4 + 5i \end{cases} \Rightarrow z_1 + z_2 = (6 - 4) + (2 + 5)i = 2 + 7i$$

عملیه تفریق اعداد مختلط: برای تفریق اعداد مختلط، قسمت های حقیقی جدا و قسمت های موهومی جدا تفریق می شود. طوریکه تفریق اعداد مختلط بازهم یک عدد مختلط است.

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1i \\ z_2 = a_2 + b_2i \end{cases} \Rightarrow z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

مثال:

$$\begin{cases} z_1 = 12 + 3i \\ z_2 = 7 + 5i \end{cases} \Rightarrow z_1 - z_2 = (12 - 7) + (3 - 5)i = 5 - 2i$$

عملیه ضرب اعداد مختلط: برای ضرب دو عدد مختلط از قانون ضرب بینوم در بینوم استفاده می کنیم و با در نظر داشت $i^2 = -1$ داریم که.

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1i \\ z_2 = a_2 + b_2i \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)$$

$$\Rightarrow a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + b_1a_2)i$$

مثال: حاصل ضرب $(7 - 2i)$ و $(5 - 4i)$ را دریافت نمائید.

حل:

$$(5 - 4i) \cdot (7 - 2i) = (35 - 8) + (-10 - 28)i = -38 - 38i$$

مزدوج یک عدد مختلط: برای دریافت مزدوج یک عدد مختلط، علامه قسمت موهومی آنرا تغییر می دهیم. و آنرا به \bar{z} نشان می دهیم.



اهداف آموزشی:

درختم این بخش شاگردان قادر خواهد بود تا

- ❖ اعداد مختلط را جمع و تفریق کرده بتوانند.
- ❖ مزدوج اعداد مختلط را دریافت نموده و آنرا عملیه بتوانند.
- ❖ اعداد مختلط را جمع و تفریق کرده بتوانند.
- ❖ سوالات مربوط به اعداد مختلط را حل کرده بتوانند.

ماموریت: شاگردان مکلف اند تا به صورت دقیق این بخش را مطالعه و یک یا دو سوال جانبی از هر موضوع کار نمایند، تا بتوانند به بهترین شکل ممکن این بخش را به یاد بسپارند.

تساوی اعداد مختلط: دو عدد مختلط زمانی باهم مساوی است که قسمت های حقیقی و موهومی آنها باهم مساوی باشد یعنی

$$z_1 = a_1 + b_1i \qquad z_2 = a_2 + b_2i$$

اعداد فوق مساوی است اگر $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$ باشد.

مثال: اگر اعداد $z_1 = x + 2yi$ و $z_2 = 2 - 5i$ باهم مساوی باشد، قیمت x و y را دریافت نمائید.

شکل عمومی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ است، برای یافتن ساحه حل آن، قیمت دلتا $\Delta = b^2 - 4ac$ را دریافت می نمایم که نظر به قیمت دلتا سه حالت دارد.

- اگر قیمت دلتا بزرگ از صفر باشد ($\Delta > 0$) معادله در ساحه اعداد حقیقی دو حل دارد.
- اگر قیمت دلتا مساوی به صفر باشد ($\Delta = 0$) معادله یک حل مضاعف دارد.
- اگر قیمت دلتا کوچک از فرگردد، ($\Delta < 0$) معادله در ساحه حقیقی حل دارد بلکه حل موهومی دارد. این حل را می توان با استفاده از اعداد مختلط دریافت نمود.

مثال: معادله دوم مجهوله درجه دوم $3x^2 + 2x + 2 = 0$ را دریافت نمائید.

حل: در قدم نخست قیمت دلتا را دریافت می نمایم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 - 24 = -20 \Rightarrow \Delta = -20 < 0$$

دیده می شود که قیمت دلتا از صفر کوچکتر است، پس حل موهومی دارد. برای دریافت حل آن از فورمول خوارزمی استفاده می کنیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$3x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}i}{6} = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{3} \\ x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}i}{6} = \frac{-1 - \sqrt{5}i}{3} \end{cases}$$

فعالیت ها:

- ✓ گراف عدد مختلط در سیستم کمیات وضعیه را ترسیم کنید.
- ✓ عملیه های اساسی چهارگانه در اعداد مختلط را تعریف نمائید.
- ✓ مزدوج عدد مختلط چیست؟
- ✓ مزدوج عدد $3 - 7i$ را بنویسید.
- ✓ عملیه های اساسی چهارگانه را در اعداد $2 + 9i$ و $7 - 3i$ انجام دهید.
- ✓ از هر عملیه یک یک مثال ایجاد نموده کار نمائید، درست بودن آن را با نتایج بالا مقایسه کنید.
- ✓ معادله دومجهوله درجه دوم $y^2 - 5y + 9 = 0$ را حل نمائید.

$$z = a + bi \xrightarrow{\text{مزدوج}} \bar{z} = a - bi$$

مثال: مزدوج عدد $z = 3 + 7i$ را دریافت نمائید.

حل:

$$z = 3 + 7i \xrightarrow{\text{مزدوج}} \bar{z} = 3 - 7i$$

معکوس ضربي عدد مختلط: معکوس ضربي عدد $(a + bi)$ عبارت اند از

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right)$$

مثال: معکوس ضربي عدد $4 + 7i$ را دریافت نمائید.

حل:

$$4 + 7i \xrightarrow{\text{معکوس ضربي}} \left(\frac{4}{16 + 49} - \frac{7}{16 + 49}i \right) = \frac{4}{65} - \frac{7}{65}i$$

عملیه تقسیم اعداد مختلط: برای تقسیم اعداد مختلط از مزدوج آن کمک می گیریم و صورت و مخرج را ضرب در مزدوج مخرج می کنیم.

$$\frac{a + bi}{c + di} \Rightarrow \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di}$$

$$= \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + (ad + bc)i - bdi}{c^2 + d^2}$$

مثال: عملیه تقسیم $\frac{2-3i}{5+7i}$ را انجام دهید.

حل:

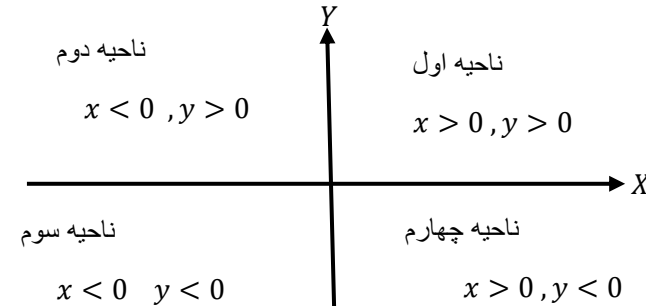
$$\frac{2 - 3i}{5 + 7i} \Rightarrow \frac{2 - 3i}{5 + 7i} \cdot \frac{5 - 7i}{5 - 7i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 7i)}{5^2 + 7^2}$$

$$= \frac{10 - 14i - 15i + 21i^2}{25 + 49} = \frac{-11 - 29i}{74}$$

حل معادله های درجه دوم یک مجهوله در ساحه اعداد مختلط:

سیستم کمیات وضعیه

سیستم کمیات وضعیه قائم از دو خط مستقیم عمود بر هم تشکیل گردیده است که یک مستوی را به چهار بخش تقسیم می نماید، درین مستوی محور افقی را بنام محور فاصله یا محور قیمت یا محور (X) و محور عمودی را بنام محور ترتیب یا محور (Y) یاد می گردد. که نقطه تقاطع محورات را بنام مبدا کمیات وضعیه یاد می شود.

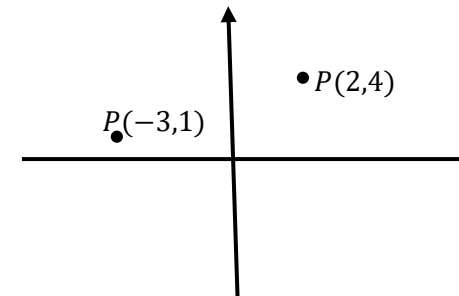


دریافت موقعیت نقطه بر روی سیستم کمیات وضعیه

هر نقطه در سیستم کمیات وضعیه یک جوهر مرتب (x, y) است که آنرا به نام مختصات یک نقطه یاد می نماید و به شکل $P(x, y)$ نشان می دهد.

مثال: موقع نقطه $P(2, 4)$ و $P(-3, 1)$ را روی سیستم کمیات وضعیه نشان دهید.

حل:



فاصله بین دو نقطه

برای دریافت فاصله بین دو نقطه از فرمول ذیل استفاده می نمائیم.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1: فاصله بین نقاط $A(3, 4)$ و $B(6, 5)$ را بدست آورید.

حل 1:

$$d(AB) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

مثال 2: قیمت k را طوری تعیین کنید که طول قطعه خطی که از نقاط $P_1(1, 3)$ و $P_2(5k, 4)$ می گذرد 5 برابر k باشد.

حل 2:

$$\begin{aligned} \overline{P_1P_2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5k - 1)^2 + (4 - 3)^2} \\ &= \sqrt{25k^2 - 10k + 2} \Rightarrow 25k^2 = 25k^2 - 10k + 2 \Rightarrow -10k = -2 \\ \Rightarrow k &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

مختصات نقطه بی که یک قطعه خط را به نسبت معین تقسیم می کند.

برای بدست آوردن موقعیت نقطه $P(x, y)$ که قطعه خط P_1P_2 را به نسبت مشخص تقسیم نموده از رابطه ذیل استفاده می کنیم.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

نکته:

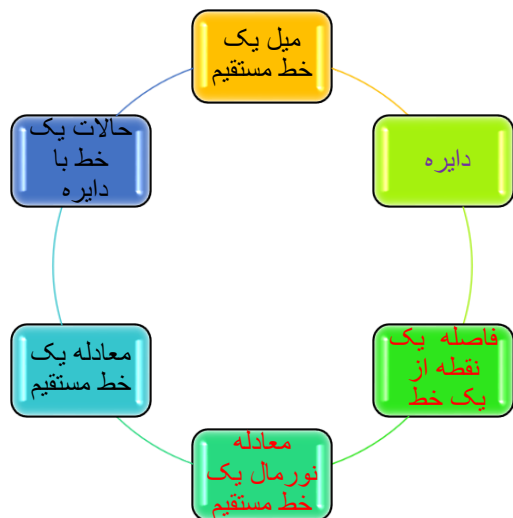
- اگر نقطه P خط P_1P_2 را داخلی به یک نسبت تقسیم کند، درین صورت $r > 0$ است.
- اگر نقطه P خط P_1P_2 را خارجی به یک نسبت معین تقسیم کند در این صورت $r < 0$ است.

- هرگاه P نقطه وسطی (نقطه تنصیف) P_1P_2 باشد درین صورت $r = 0$ شده و پس مختصات نقطه P عبارت اند از.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

مثال 1: هرگاه نقطه $P(x, y)$ قطعه خط را که از نقاط $P_1(3, -4)$ و $P_2(-2, 1)$ می گذرد را به نسبت $r = -\frac{8}{3}$ تقسیم نمائید، کمیات وضعیه نقطه P را دریافت نمائید.

حل 1:



اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان قادر گردد:

- ✓ مفاهیم خط مستقیم و میل خط مستقیم را درک کنند.
- ✓ معادله خط مستقیم را دانسته و آنرا تشکیل داده بتوانند.
- ✓ معادله نورمال خط مستقیم را بدانند و آنرا ترسیم کرده بتوانند.
- ✓ نقطه و فاصله از نقطه از خط مستقیم را دریافت کرده بتوانند.
- ✓ دایره را تعریف و شکل آنرا ترسیم بتوانند.
- ✓ رابطه بین خط و دایره و حالات یک مستقیم با دایره را بدانند.

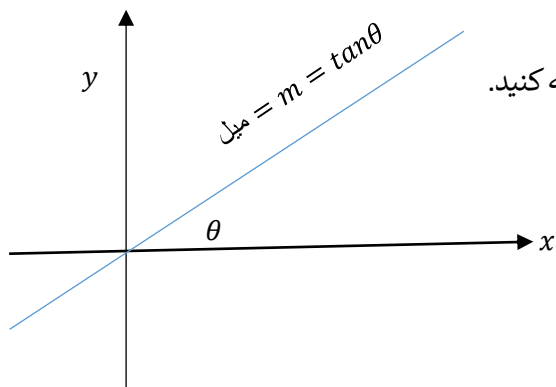
میل یک خط مستقیم

میل در لغت به معنی نشیبی را گویند و خط مستقیم که با افق زاویه حاده یا منفرجه را بسازد آنرا خط مایل گویند، پس این خط مستقیم دارای میل است.

میل یک خط مستقیم عبارت از تانجانت زاویه است که خط مستقیم با محور x می سازد. یعنی

$$m = \tan\theta$$

به شکل ذیل توجه کنید.



$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{-2 + \left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{-2 - 8}{-\frac{5}{3}} = 6 \Rightarrow x = 6$$

$$y = \frac{x_2 + ry_2}{1+r} = \frac{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{1 + \frac{32}{3}}{-\frac{5}{3}} = -7 \Rightarrow y = -7$$

$$\Rightarrow P(6, -7)$$

مثال 2: کمیات وضعیه انجام هقطر یک دایره $A(4,10)$ و $B(2,6)$ است، موقعیت مرکز آن را دریافت نمائید.

حل:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = 3$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow y = 8$$

$$\Rightarrow O(3,8)$$

فعالیت ها:

- ❖ سیستم کمیات وضعیه را ترسیم نمائید.
- ❖ موقعیت نقاط $A(2,6)$ و $B(-3,7)$ و $C(-1,-1)$ را روی سیستم کمیات وضعیه را ترسیم نمائید.
- ❖ فاصله بین نقاط $M(-3,8)$ و $N(3,7)$ را دریافت نمائید.
- ❖ قیمت m را طوری تعیین نمائید که طول قطعه خط $P_1(-1,3)$ و $P_2(m,-1)$ به اندازه 5 واحد باشد.
- ❖ کمیات وضعیه نقطه P را دریابید، در صورتکه خط مستقیم که ارتباط $A(-8,4)$ و $B(2,-4)$ عبور کند و داخلی و خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم کند.

آنچه قرار است درین بخش بخوانیم

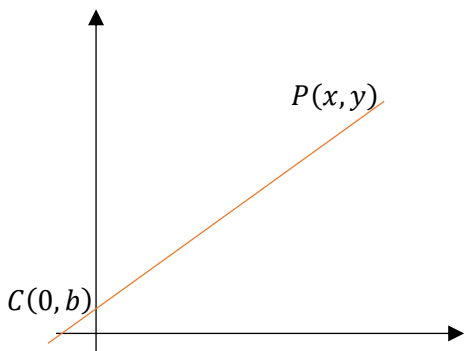
$$x = c$$

مثال: معادله خط مستقیم که از نقطه $P(2,3)$ می‌گذرد و با محور y موازی اند را بنویسید.

$$x = 2$$

3. معادله معیاری خط مستقیم

معادله خط مستقیم است که میل و نقطه تقاطع آن با محور y معلوم باشد، اگر $P(x, y)$ یک نقطه خط مستقیم L باشد و $C(0, b)$ نقطه تقاطع این خط مستقیم با محور Y باشد درین صورت میل خط مستقیم L عبارت اند از.



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y = mx + b, \quad y - b = mx$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریابید که میل $m = 2$ و محور y را در نقطه $b = 5$ قطع نماید.

حل:

$$y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5$$

مثال 2: معادله خط مستقیم که میل $m = \frac{4}{3}$ باشد و محور y را در نقطه $b = -6$ قطع می‌کند بنویسید.

حل 2:

$$y = mx + b$$

$$y = \frac{4}{3}x - 6$$

4. معادله خط مستقیم که میل و یک نقطه آن معلوم باشد.

اگر مختصات انجام های یک خط مستقیم به ترتیب $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ باشد، درین صورت میل خط مستقیم از رابطه ذیل دریافت می‌گردد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: میل خط مستقیم را دریافت نمائید که مختصات انجام های به ترتیب $A(6,4)$ و $B(-3,1)$ باشد.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{6 - (-3)} = \frac{3}{6 + 3} = \frac{3}{9} \Rightarrow m = \frac{1}{3}$$

معادله یک خط مستقیم

معادله هر خط مستقیم از نظر الجبری یک معادله دو مجهوله درجه یک است که به شکل ذیل ارائه می‌شود.

$$Ax + By + C = 0$$

معادله فوق معادله عمومی یک خط مستقیم است. که A ، B و C اعداد ثابت و x و y مجهول ها می‌باشد.

1. معادله خط مستقیم که موازی با محور x باشد.

تمام نقاط که بالای خط مستقیم l واقع باشند از محور X فاصله های مساوی دارند یا به عبارت دیگر مختصه y تمام نقاط که بالای خط مستقیم موازی با محور X واقع باشند باهم موازی اند. اگر فاصله بین محور X و خط l به اندازه b باشد، درین صورت معادله خط عبارت اند از $y = b$.

مثال: معادله خط مستقیم که از نقطه $P(2,3)$ می‌گذرد و با محور X موازی باشد را دریابید.

حل:

$$y = 3$$

2. معادله خط مستقیم که موازی با محور y باشد.

اگر فاصله خط مستقیم Δ از محور y به اندازه c باشد، درین صورت معادله خط مستقیم Δ عبارت اند از.

$$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2) \quad \text{or} \quad 5x + 8y + 2 = 0$$

6. معادله خط مستقیم که نقطه تقاطع آن با محور ها معلوم باشد.

اگر خط مستقیم l محور X را در نقطه $(a, 0)$ و محور Y را در نقطه $(0, b)$ قطع نماید و $P(x, y)$ یک نقطه اختیاری روی آن باشد، معادله آن عبارت اند از.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a} (x - a)$$

$$\Rightarrow -ay = b(x - a) \Rightarrow -ay = bx - ab$$

$$\Rightarrow bx + ay = ab \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریابید که محور X را در نقطه $(2, 0)$ و محور Y را در نقطه $(0, -4)$ قطع می کند.

حل:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1 \quad \text{or} \quad 2x - y = 4$$

7. معادله نورمال یک خط مستقیم

معادله خط مستقیم l که طول عمود از مبدای کمیات وضعیه بالای خط l عبارت از P باشد و θ زاویه میل خط عمود باشد، عبارت اند از.

$$x \cos \theta + y \sin \theta = P \quad \text{or} \quad x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$$

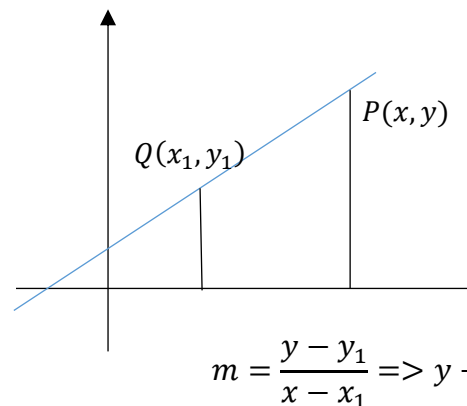
مثال: اگر طول عمود بر یک خط مستقیم l از مبدای کمیات وضعیه مساوی به 5 واحد باشد و زاویه میل خط عمود (نورمال) 120° باشد میل خط مستقیم l و معادله نورمال و نقطه تقاطع با محور Y را دریابید.

حل:

$$x \cos \theta + y \sin \theta - P = 0$$

$$x \cos 120 + y \sin 120 - 5 = 0$$

معادله خط l که میل آن m و از نقطه $Q(x_1, y_1)$ می گذرد.



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریابید که میل آن (-2) و از نقطه $P(5, 1)$ می گذرد.

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2(x - 5)$$

$$y = -2x + 11 \quad \Rightarrow \quad 2x + y - 11 = 0$$

5. معادله خط مستقیم که دو نقطه آن معلوم باشد.

اگر خط l که عمود نباشد و از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد، و نقطه $P(x, y)$ یک نقطه اختیاری روی این خط مستقیم باشد، درین صورت معادله آن قرار ذیل است.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال: معادله خط مستقیم را دریابید که از نقاط $(-2, 1)$ و $(6, -4)$ می گذرد.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)} (x - (-2))$$

مثال: معادله عمومی خط مستقیم $5x - 12y + 39 = 0$ را به شکل معادله خط مستقیمی تبدیل نمائید که میل و یک نقطه آن معلوم باشد.

حل:

$$5x - 12y + 39 = 0, \quad m = \frac{5}{12} \quad \text{and} \quad P\left(\frac{-39}{5}, 0\right)$$

$$y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

❖ تبدیل معادله عمومی به شکل معادله خط مستقیمی که دو نقطه آن معلوم باشد.

خطی که معادله آن $ax + by + c = 0$ است و از نقاط $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ و $\left(0, \frac{-c}{b}\right)$ می گذرد.

$$y_1 = 0 \quad x_1 = \frac{-c}{a} \quad y_2 = \frac{-c}{b} \quad x_2 = 0$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Rightarrow y = \frac{-a}{b} \left(x + \frac{c}{a}\right)$$

مثال: معادله عمومی مستقیم $5x - 12y + 39 = 0$ را به شکل معادله خط مستقیم بنویسید که دو نقطه آن معلوم باشد.

حل: خط مستقیم $5x - 12y + 39 = 0$ از نقاط $\left(0, \frac{39}{12}\right)$ و $\left(-\frac{39}{5}, 0\right)$ می گذرد.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \left(x + \frac{39}{5}\right) \frac{\frac{39}{12} - 0}{0 + \frac{39}{5}}$$

❖ تبدیل معادله عمومی خط مستقیم به شکل معادله خط مستقیمی که نقاط تقاطع آن با محورهای X و Y معلوم باشد.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow \frac{ax}{-c} + \frac{by}{-c} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} = 1$$

$$\begin{cases} \sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 5 = 0 \Rightarrow x - \sqrt{3}y + 10 = 0$$

میل مستقیم فوق قرار ذیل دریافت می گردد.

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مستقیم فوق محور Y را در نقطه $\left(0, \frac{10}{\sqrt{3}}\right)$ قطع می کند.

تبدیل معادلات خط مستقیم از یک حالت به حالت دیگر

❖ تبدیل معادله عمومی خط مستقیم به شکل معادله معیاری آن

برای این تبدیل، از معادله عمومی $ax + by + c = 0$ قیمت y را دریافت می نمائیم.

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

مثال: معادله عمومی خط مستقیم $5x - 12y + 39 = 0$ را به شکل معیاری تبدیل نمائید.

حل:

$$5x - 12y + 39 = 0$$

$$-12y = -5x - 39$$

$$y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12} \quad m = \frac{5}{12} \quad \text{and} \quad b = \frac{39}{12}$$

❖ تبدیل معادله عمومی Y خط مستقیم به شکل معادله خط مستقیمی که میل و یک نقطه آن معلوم باشد.

در معادله $ax + by + c = 0$ که میل آن $\frac{-a}{b}$ و یک نقطه آن $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ می باشد. پس

$$y = \frac{-a}{b} \left(x + \frac{c}{a}\right) \quad m = \tan \theta = \frac{-a}{b}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله نقطه $P(-2,8)$ را از خط مستقیم $4x + 3y - 11 = 0$ دریافت نمائید.

حل:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = d = \frac{|4(-2) + 3(8) - 11|}{\pm\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-8 + 24 - 11|}{\sqrt{25}}$$

$$d = 1$$

فاصله بین دو خط موازی

فاصله بین دو خط موازی عبارت از فاصله در بین یک نقطه بالای یکی از خطوط و خط موازی دیگری می باشد.

مثال: فاصله بین دو خط موازی $2x - 5y + 13 = 0$ و $2x - 5y + 6 = 0$ را دریافت نمائید.

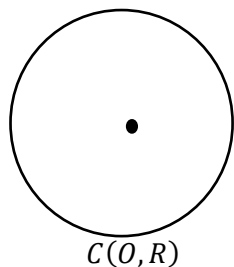
حل: یک نقطه را بالای یکی از خطوط موازی در می یابیم، طور مثال اگر در معادله خط مستقیم $2x - 5y + 13 = 0$ قیمت $x = 1$ باشد، قیمت $y = 3$ می گردد، پس فاصله نقطه $(1,3)$ از خط مستقیم با معادله $2x - 5y + 6 = 0$ عبارت از فاصله بین دو مستقیم موازی است.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(1) - 5(3) + 6|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{7}{\sqrt{29}}$$

در نتیجه فاصله بین دو خط موازی فوق برابر با $d = \frac{7}{\sqrt{29}}$ است.

دایره

عبارت از منحنی بسته است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت فاصله های مساوی داشته باشد.



مثال: معادله $5x - 12y + 39 = 0$ را به شکل معادله خط مستقیمی که نقاط تقاطع آن با محورهای X و Y معلوم باشد، تبدیل نمائید.

$$5x - 12y = -39$$

$$\frac{5x}{-39} - \frac{12y}{-39} = 1$$

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}} + \frac{y}{\frac{39}{12}} = 1$$

در مثال بالا $a = -\frac{39}{5}$ و $b = \frac{39}{12}$ می باشد.

❖ تبدیل معادله عمومی یک خط مستقیم به شکل نورمال آن

$$ax + by + c = 0$$

$$\frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ or } \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}y = -\frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: معادله عمومی $2x - 3y + 6 = 0$ را به شکل نورمال آن تبدیل نمائید.

حل:

$$\pm\sqrt{a^2 + b^2} = \pm\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \pm\sqrt{13}$$

برای اینکه طرف راست مساوات مثبت باشد، علامه $\sqrt{13}$ باید منفی در نظر گرفته شود و داریم که.

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

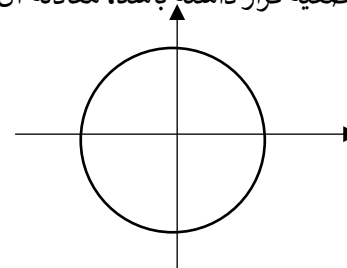
فاصله یک نقطه از یک خط مستقیم

اگر فاصله نقطه P را از خط مستقیم AB ، d در نظر بگیریم طوری که نقطه P بالای خط AB واقع نباشد، درین صورت با استفاده از معادله نورمال خط مستقیم فاصله نقطه $P(x_1, y_1)$ از خط AB از رابطه ذیل دریافت می گردد.

معادله یک دایره

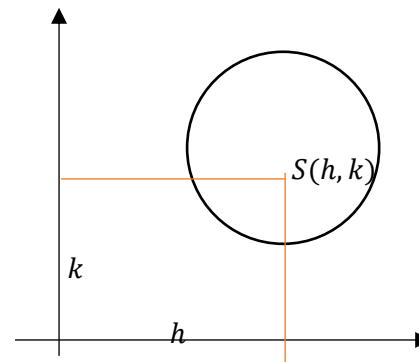
اگر مرکز دایره در مبدا کمیات وضعیه قرار داشته باشد، معادله آن عبارت اند از:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



و اگر مرکز دایره در یک نقطه اختیاری از کمیات وضعیه قرار داشته باشد، معادله آن عبارت اند از:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



مثال: دایره ی را دریابید که مرکز آن $S(-3,5)$ و طول شعاع آن 7 واحد باشد.

حل:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 7^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$$

معادله عمومی یک دایره

اگر معادله معیاری یک دایره یعنی $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ انکشاف دهیم، معادله عمومی دایره بدست می آید. و عبارت اند از:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey - F = 0$$

در رابطه فوق همیشه $A = B$ و هم علامه می باشد.

مثال: معادله عمومی و معیاری دایره را بنویسید که مرکز آن $(-2,3)$ و شعاع آن $r = 6$ است.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 6^2$$

بعد از انکشاف معادله عمومی دایره قرار ذیل بدست می آید.

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$$

حالات یک خط مستقیم با دایره

یک خط مستقیم با دایره سه حالت ممکنه را دارید.

برای دانستن این سه حالت قیمت x یا y را از معادله خط مستقیم دریافت نموده در معادله دایره وضع می نمائیم، یک معادله یک مجهوله درجه دوم بدست می آید، درین معادله

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

را دریافت می نمائیم و نظر به دلتا سه حالت وجود دارد.

- اگر $\Delta = 0$ باشد، خط مستقیم با دایره مماس است.
- اگر $\Delta > 0$ باشد، خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع می کند.
- اگر $\Delta < 0$ باشد، خط مستقیم با دایره نقطه مشترک ندارد.

مثال: خط مستقیم $2x - y = 7$ با دایره $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ چه رابطه دارد.

حل:

$$2x - y = 7 \Rightarrow y = 2x - 7$$

$$x^2 + (2x - 7)^2 - 8x - 2(2x - 7) + 12 = 0$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

چون $\Delta = 4 > 0$ است، پس خط مستقیم دایره را در دو نقطه قطع می کند.

فعالیت ها

➤ خط مستقیم $x + 3y - 5 = 0$ با دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ چه رابطه

دارد؟

➤ فاصله بین دو خط موازی $2x + y + 2 = 0$ و $6x + 3y - 8 = 0$ را دریابید.

معادله نورمال خط مستقیم را دریابید که طول نورمال آن 10 واحد و نورمال با جهت مثبت محور x زاویه 30 درجه را بسازد.
 میل دو خط موازی باهم چه رابطه دارد؟

آنچه قرار است درین بخش بخوانیم



اهداف آموزشی: شاگردان درختم این درس قادر گردند تا:

- معادله مماس دایره را بدانند و طوب مماس را دریافت کرده بتوانند.
- مساحت مثلث را که کمیات وضعیه راس های آن معلوم باشد، دریافت بتوانند.
- علم احصائیه را تعریف کرده بتوانند.
- گراف های احصائیوی را تشریح و توضیح بتوانند.
- با انواع گراف های احصائیوی آشنا شوند و بتوانند داتا ها را در هر یک از گراف ها تنظیم نمایند.
- شاخص های مرکزی را بدانند، و با استفاده از منحنی نارمل شاخص های مرکزی را مقایسه بتوانند.

معادله مماس و طول مماس

اگر یک خط مستقیم با دایره $P_1(x_1, y_1)$ که مرکز آن $C(h, k)$ و در نقطه $P_1(x_1, y_1)$ با دایره مماس باشد، پس میل شعاع مساوی است به $m = \frac{k-y_1}{h-x_1}$ و چون شعاع در نقطه تماس بر مماس عمود است، میل مماس مساوی است به $-\frac{h-x_1}{k-y_1}$ و چون یک نقطه خط مستقیم $P_1(x_1, y_1)$ است.

پس نظر به معادله $y - y_1 = m(x - x_1)$ داریم که

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

معادله فوق به نام معادله مماس یاد می شود. که در نقطه $P_1(x_1, y_1)$ با دایره مماس است. نکته: اگر مرکز دایره در مبداء کمیات وضعیه قرار داشته باشد معادله مماس عبارت اند از.

$$yy_1 + xx_1 = r^2$$

مثال 1: معادله خط مستقیمی را دریابید که در نقطه $(3,4)$ با دایره $x^2 + y^2 = 25$ مماس باشد.

حل 1: چون مرکز دایره در مبداء کمیات وضعیه قرار دارد، پس داریم که.

$$y \cdot 4 + x \cdot 3 = 25 \Rightarrow 3x + 4y = 25$$

مثال 2: معادله خط مستقیم را دریابید که در نقطه $P(3,5)$ با دایره $P_1(3,5)$ که مرکز آن $(1,2)$ است مماس باشد.

حل 2:

$$h = 1, k = 2, x_1 = 3, y_1 = 5$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1) = y - 5 = -\frac{1 - 2}{2 - 5}(x - 3)$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 21$$

اگر راس های یک مثلث به ترتیب $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ و $P_3(x_3, y_3)$ باشند مساحت مثلث از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$S_{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

مثال: اگر $A(4, -5)$ ، $B(5, -6)$ و $C(3, 1)$ راس های یک مثلث باشند مساحت این مثلث را دریابید.

حل:

$$x_1 = 4, y_1 = -5, x_2 = 5, y_2 = -6, x_3 = 3, y_3 = 1$$

$$\begin{aligned} S_{P_1P_2P_3} &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [4(-6 - 1) + 5(1 + 5) + 3(-5 + 6)] \\ &= \frac{1}{2} (-28 + 30 + 3) = \frac{1}{2} 5 = 2.5 \\ &\Rightarrow S_{P_1P_2P_3} = 2,5 \end{aligned}$$

گراف چند ضلعی کثرت

در علم احصائیه که علم تحلیل و تفسیر داتا و معلومات اند، در بعضی موارد برای بهتر نشان دادن داتا ها از روش گراف استفاده می شود، که یکی ازین گراف ها (چند ضلعی کثرت) اند.

در گراف چند ضلعی، مرکز هر دسته روی محور افقی و کثرت مطلق یا کثرت نسبی هر یک از دسته ها روی محور عمودی نشان داده می شود. متقابل با مرکز هر دسته و کثرت آن یک نقطه در مستوی مشخص می گردد که عرض مرکز دسته و طول آن برابر با کثرت آن دسته است. به تعداد دسته های جدول در مستوی سیستم مختصات نقطه بوجود می آید.

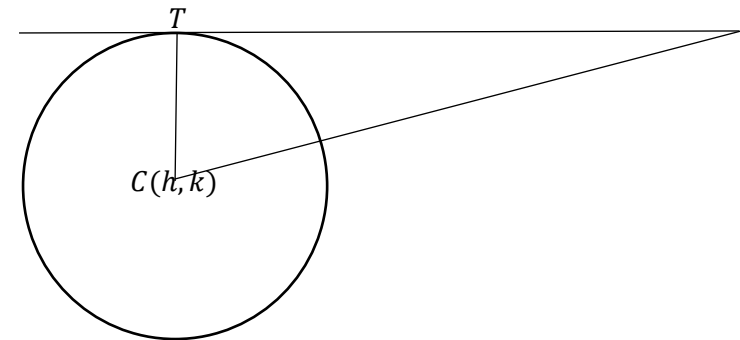
اگر به نقاط مذکور دونقطه اختیاری دیگر $(x_1 - c, 0)$ و $(x_n + c, 0)$ را در اول و آخر دسته ها اضافه کنیم، طوریکه c وسعت هر صنف است. از اتصال این نقاط به یکدیگر، یک گراف حاصل می شود که آنرا گراف چند ضلعی کثرت می نامند.

مثال: گراف های مستطیلی و چند ضلعی داتای جدول زیر را رسم کنید.

حدود دسته	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
کثرت مطلق	3	5	8	7	2
مرکز دسته ها	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

طول مماس: اگر نقطه $P_1(x_1, y_1)$ که در خارج از دایره $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ واقع باشد، مماس P_1T به این دایره رسم شود و نقطه T را به مرکز دایره وصل می کنیم درین صورت طول مماس از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$\overline{P_1T} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2}$$



نکته: به یادداشته باشید برای یافتن طول فاصله از یک نقطه خارج دایره به امتداد مماس کفایت می کند که قیمت های x و y نقطه را در معادله دایره وضع کنیم.

مثال: طول مماس را از نقطه $(-5, 10)$ بر دایره $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ دریابید.

حل:

$$5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$$

$$L = \sqrt{(-5)^2 + 10^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133} \quad \text{طول مماس}$$

دریافت مساحت مثلث در صورتکه کمیات وضعیه راس های آن داده شده باشد.

3 8 8 9 9
 4 0 1 4 5 6 6
 5 2 7 8
 6 5

چارک ها

اعداد که داتای مرتب را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند آن ها را چارک های اول، دوم و سوم می نامند و با Q_1 ، Q_2 و Q_3 نشان داده می شود.

چارک اول مقداری است که 25% داتا جامعه پائین تر از آن و 75% داتای جامعه بالاتر از آن قرار می گیرند.

چارک دوم مقداری است که 50% داتای جامعه پائین تر از آن و 50% داتای جامعه بالاتر از آن قرار دارد.

چارک سوم عبارت از مقداری است که 75% داتای جامعه پائین تر از آن و 25% داتای جامعه بالاتر از آن قرار دارد.

نکته 1:

اگر داتا را به صورت صعودی مرتب کنیم میانه داتا مساوی به Q_2 و میانه نیمه اول داتا مساوی به Q_1 و میانه نیمه دوم داتا مساوی به Q_3 می باشد.

نکته 2:

محل P - ام طوریکه $p = 1, 2, 3, \dots$ را با استفاده از رابطه ذیل بدست می آوریم.

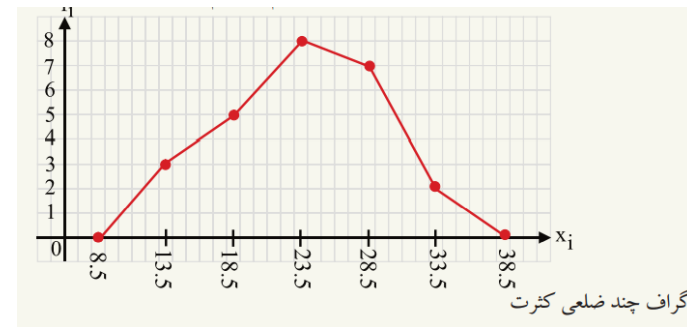
$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

با استفاده از محل چارک مقدار چارک را تعیین کرده می توانیم.

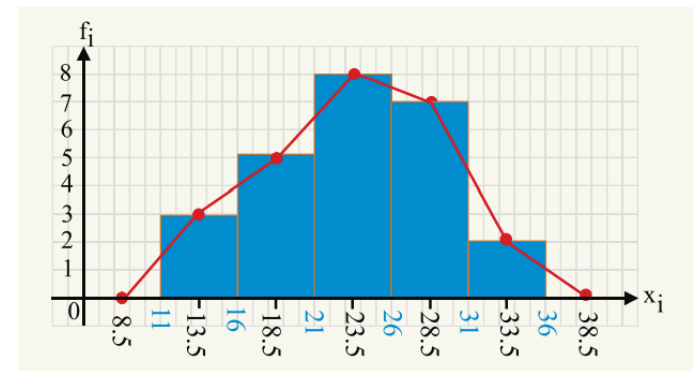
مثال: فرض کنید مشاهدات بدست آمده از یک بررسی قرار ذیل باشد

140 100 120 80 85 90

- محل چارک اول و سوم را دریافت کنید.
- مقادیر چارک های اول و سوم را دریافت کنید.



نمایش گراف مستطیلی و چند ضلعی کثرت باهم قرار ذیل است.



گراف ساقه و برگ

برای تجزیه و تحلیل داتای عددی از گراف ساقه و برگ استفاده می گردد، این گراف برای داتای که تفاوت کوچکترین و بزرگترین داتای از نظر تعداد رقم ها اندک باشد مناسب است.

مثال: دریک کتاب فروشی از 20 نوع کتاب که تعداد هر کدام در جدول زیر تذکر داده شده است موجود است، گراف ساقه و برگ را برای این داتا ترسیم کنید.

حل:

برگ ساقه

1	0	1	5
2	3	7	8

حل: اول داتای متذکره را شماره گذاری می نمایم.

داتا	140	100	120	80	85	90
شماره	6	5	4	3	2	1

محل چارک ها را با استفاده از فرمول فوق دریافت می نمایم.

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow C_{Q_1} = 2$$

$$C_{Q_2} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow C_{Q_2} = 5$$

پس با در نظر داشت شماره داتا ها مقدار داتا ها عبارت اند از.

$$Q_1 = 85$$

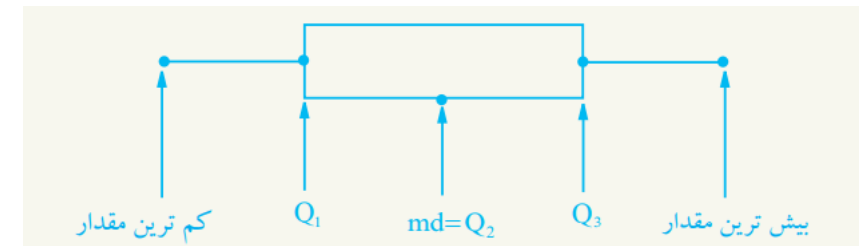
$$Q_3 = 120$$

گراف صندوقچه بی

گراف تصویری است که پراکندگی داتا را نسبت به گراف های دیگر بهتر نشان می دهد. این گراف، داتای را بر اساس مقادیر زیر نمایش می دهند.

- کمترین داتا
- چارک اول
- میانه
- چارک سوم
- بیشترین داتا

گراف صندوقچه بی نشان دهنده چارک ها، حد اقل و حد اکثر داتا است.



مراحل تهیه گراف صندوقچه بی عبارت اند از.

- کوچکترین داتا را پیدا کنید.

- بیشترین داتا را پیدا کنید.
- میانه را پیدا کنید.
- چارک اول را دریافت کنید
- چارک سوم را دریافت کنید
- گراف را رسم کنید.

مثال: اگر تعداد تصادفات ترافیکی یک شهر طی 15 روز قرار زیر داده شده باشد،

12 10 15 23 14 27 16 34 41 43 32 18 25 31 19

گراف صندوقچه بی آنرا ترسیم کنید.

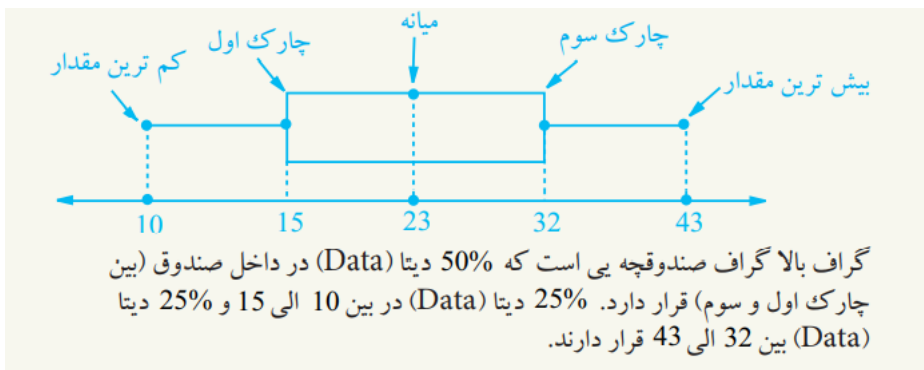
حل:

داتای فوق را مرتب می کنیم

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

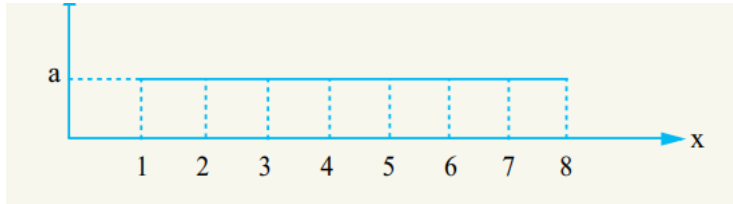
کمترین داتا = 10 بیشترین داتا = 43 میانه = 23

چارک اول = 15 چارک سوم = 32



مقایسه شاخص های مرکزی توسط منحنی نارمل

شاخص های مرکزی عبارت از (اوسط، مود و میانه) می باشد، و منحنی نارمل یکی از جمله منحنی های معروف در علم احصائیه اند که اکثر پدیده های طبیعی را می توان توسط آن نمایش داد، این منحنی یک منحنی متناظر و مشابه یک زنگوله است.



حل:

$$\text{میانہ} = med = \frac{4 + 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

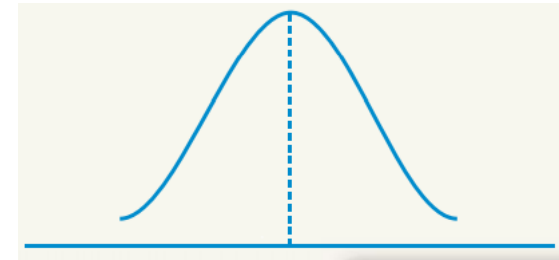
$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

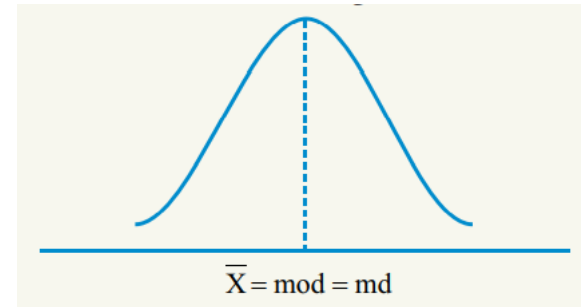
فعالیت ها

- ❖ معادله مماس چیست؟ بنویسید.
- ❖ طول مماس از کدام رابطه بدست می آید شرح داده و یک مثال کار کنید.
- ❖ احصائیه چیست؟ مفصلاً تشریح کنید.
- ❖ گراف چندضلعی کثرت چیست؟
- ❖ فرق گراف چند ضلعی کثرت و گراف مستطیلی چیست؟
- ❖ گراف ساقه و برگ چگونه داتا را نمایش می دهند؟ یک مثال کار کنید.
- ❖ از چارک ها در چه موارد استفاده می شود.
- ❖ چارک چگونه داتا های اطلاعات احصائیوی را تشریح می کند؟
- ❖ شاخص های مرکزی چیست و در احصائیه چه نقش دارد؟

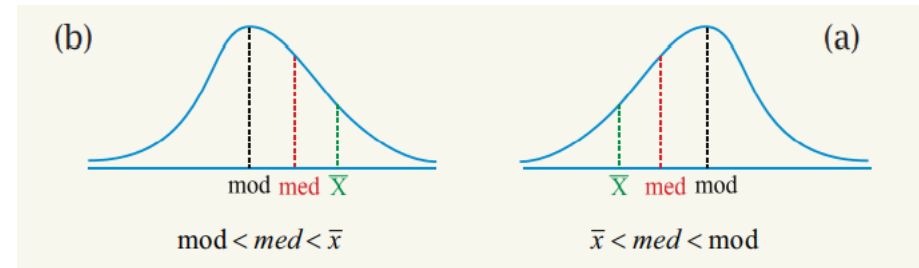
آنچه درین بخش است قرار است بیاموزیم



چون منحنی نارمل متناظر است پس؛ در منحنی نارمل موقعیت اوسط، مود و میانه باهم برابر است و در نقطه اعظمی منحنی نارمل موقعیت دارد. یعنی:



اگر منحنی نارمل متناظر نباشد درین صورت داریم که:



- اگر اوسط و میانه مساوی باشند، تعداد داتای که قبل و بعد از اوسط و میانه قرار دارند، مساوی می باشند.

- اگر اوسط در سمت چپ میانه واقع باشند، داتای که در سمت راست اوسط قرار دارند بیش تر از تعداد داتای اند که در سمت چپ اوسط قرار دارند. مانند شکل a

- اگر اوسط در سمت راست میانه قرار داشته باشند، تعداد داتای که در سمت راست اوسط قرار دارند کمتر از تعداد داتای اند که در سمت چپ اوسط قرار گرفته اند.

مثال: در گراف ذیل اوسط و میانه را دریافت نمائید.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال: انحراف چارک های اعداد ذیل را دریافت نمائید.

35 29 30 31 25 24 23 22 22 20 36

حل: نخست داتای داده شده را ترتیب می کنیم.

$\underbrace{20}_1 \quad \underbrace{22}_2 \quad \underbrace{22}_3 \quad \underbrace{23}_4 \quad \underbrace{24}_5 \quad \underbrace{25}_6 \quad \underbrace{29}_7 \quad \underbrace{30}_8 \quad \underbrace{31}_9 \quad \underbrace{35}_{10} \quad \underbrace{36}_{11}$

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$\Rightarrow C_{Q_3} = 8.75 \Rightarrow Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$\Rightarrow C_{Q_1} = 3.25 \Rightarrow Q_1 = 22.25$$

انحراف چارک ها عبارت اند از.

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس

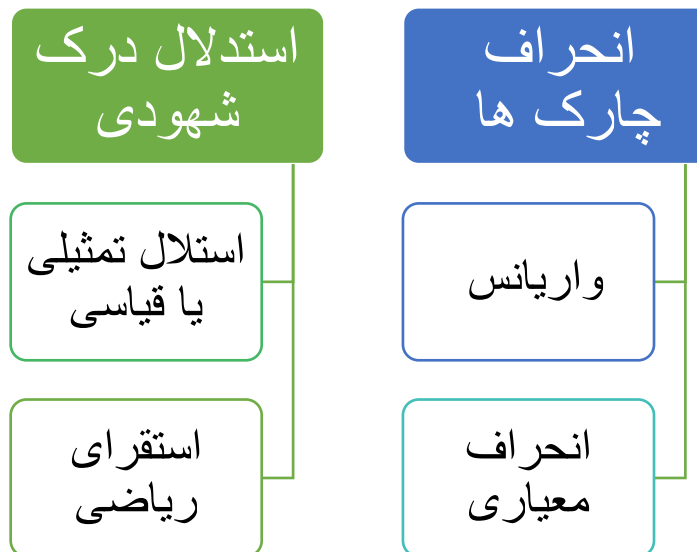
واریانس عبارت از اوسط جذر مربع انحراف ها از اوسط اند.

برای دریافت واریانس مراحل ذیل را باید انجام داد.

➤ اگر داتا ها $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ باشند، اوسط داتا ها را دریافت می کنیم. یعنی

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

➤ مجموع مربع های انحراف را دریافت می کنیم. یعنی



اهداف آموزشی: در ختم این بخش شاگردان باید قادر گردد تا

- ❖ انحراف چارک ها شناخته و آنرا تعریف کرده بتوانند.
- ❖ واریانس را تعریف بتوانند.
- ❖ انحراف معیاری را بشناسند.
- ❖ استدلال درک شهودی را تعریف کرده بتوانند.
- ❖ استدلال تمثیلی یا قیاسی را تعریف کرده بتوانند.
- ❖ در مورد استقرای ریاضی معلومات کافی بدست بیاورند.
- ❖ مثال های مربوط به موضوعات درسی را حل کرده بتوانند.

انحراف چارک ها

انحراف چارک ها یکی از شاخص های نشان دهنده پراکندگی داتا است، زیرا از روی تعریف چارک اول و سوم بر می آید که 50% جامعه در فاصله $Q_3 - Q_1$ قرار دارند. هر قدر این فاصله کوچک تر باشد، داتا جمع تر و به عبارت دیگر پراکندگی آن ها کم تر است.

$$Q = Q_3 - Q_1 \quad \text{انحراف چارک ها}$$

گاهی انحراف چارک ها را به شکل ذیل نیز نشان می دهد.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

واحد انحراف معیاری یا پراکندگی مطلق همان واحد متحول است.

مثال: درجه حرارت بدن 5 مریض در زیر داده شده است.

38 39 39 40 41

انحراف معیاری آن را حساب کنید.

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980 \quad \text{انحراف معیاری}$$

استدلال درک شهودی

تعریف: فهم غریزه وی یا احساس که به وسیله آن صحت و یا حقیقت یک موضوع و یا یک مفهوم را بدون استدلال قبول می کنیم عبارت از درک شهودی بوده که در مواقع مختلف زمان، می تواند از هم متفاوت باشد.

نتیجه گیری حاصل از درک شهودی نمی تواند همواره نتیجه گیری صحیح را به دنبال داشته باشد، اما می تواند پایه گذار احکام و قضایای درست باشد.

مثال: با استدلال درک شهودی به سهولت می توان حکم کرد که دو خط موازی یک دیگر را قطع نمی کنند، بپذیریم.

چون در پذیرش این مساله استدلالی بکار نرفته است و در واقع یک احساس است که بر اساس آن این حکم صورت می پذیرد. این گونه نتیجه گیری را بنام درک شهودی یاد می نماید.

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$

➤ واریانس را به S^2 نشان می دهد از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

مثال: واریانس داتای ذیل را دریافت نمائید.

1 5 6 7 9

حل:

$$\bar{x} = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

$$S^2 = 7.04 \quad \text{واریانس}$$

نکته: اگر داتا دسته بندی شده با مرکز دسته های $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ و با کثرت های $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ داده شده باشند، برای محاسبه واریانس بهتر است از فورمول زیر استفاده نمائیم.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

انحراف معیاری

انحراف معیاری که با سمبول S نشان داده می شود، برابر به جذر مربع واریانس است. یعنی

حل: به خاطر ثبوت مساله فرض می کنیم که با وجود جفت بودن n^2 عدد n تاق باشد؛ پس می توان آن را به شکل $n = 2k + 1$ بنویسیم؛ در حالیکه k یک عدد تاق است، در نتیجه برای مربع عدد مذکور داریم که.

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

رابطه بالا نشان می دهد که n^2 یک عدد تاق است. در حالیکه خلاف فرضیه بوده در نتیجه فرضیه بالا برای این که عدد n یک عدد تاق است نادرست بوده و به این نتیجه می رسیم که n یک عدد جفت است.

منطق ریاضی و استنتاج بیان

یک جمله خبری به نام بیان یاد می گردد، هرگاه نتیجه آن به درست؛ یا نادرست به انجامد.

اگر یک بیان را P بنامیم، در این صورت طرز نوشته $P \equiv T$ برای بیان درست و طرز نوشته $P \equiv F$ برای بیان نادرست استعمال می گردد.

بر علاوه آن $\sim P$ نفی بیان P می باشد.

ترکیب بیان ها

اگر P و q دو بیان باشد، روابط ذیل بین آنها را در نظر داشته باشید.

1. ترکیب $p \wedge q$ را بنام ترکیب عطفی بیان ها می نامند. این (\wedge) علامه (و) عطفی است.
2. ترکیب $p \vee q$ را بنام ترکیب فصلی بیان ها می نامند. این (\vee) علامه (یا) فصلی است.
3. ترکیب $p \Rightarrow q$ بنام ترکیب مشروط بیان ها یاد می شود. این (\Rightarrow) علامه مشروط است.
4. ترکیب $p \Leftrightarrow q$ بنام ترکیب مشروط دو طرفه یاد می گردد.

مثال: هرگان بیان های $p \equiv (2 + 4 = 6)$ و $q \equiv$ (مربع عدد که منفی نباشد) داده شده باشد، نتیجه بیان های $p, q, \sim p, \sim q, p \wedge q, p \vee q, \sim(p \wedge q), \sim(p \vee q)$

را دریافت کنید.

حل:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

به عبارت دیگر استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایق است که درستی آن ها را ثبوت و یا پذیرفته باشیم.

از استدلال استنتاجی زمانی استفاده می گردد که مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است. مثال: به جدول ترتیب شده ذیل توجه کنید.

12	7	4	یک عدد را به صورت اختیاری انتخاب کنید.
17	12	9	به عدد مذکور عدد 5 را اضافه کنید
34	24	18	نتیجه را دو چند نمائید.
30	20	14	از نتیجه حاصله عدد 4 را کم کنید
15	10	7	عدد را بر 2 تقسیم نمائید
3	3	3	عددی که در اول انتخاب کرده بودید از عدد کم کنید

نکته اساسی که به نظر می خورد این است که ما در حقیقت بر مبنای عباراتی که درستی آن ها را قبول داریم، نتیجه بعدی را به دست آوردیم.

استدلال مثال نقض

هرگاه مثالی نشان دهیم که نتیجه گیری کلی نادرست و یا غلط است، نادرستی ادعا را نشان داد که به نام مثال نقض یاد می شود.

مثال: برای اثبات مساله کافی است نشان دهیم که اعداد x و y وجود دارد که غیر ناطق بوده؛ اما مجموع آنها $x + y$ ناطق است.

حل: اعداد $x = 1 + \sqrt{2}$ و $y = 1 - \sqrt{2}$ را انتخاب نمائیم داریم که

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 1 + 1 = 2$$

$$x + y = 2$$

دیده می شود که حاصل جمع آنها، یعنی عدد 2 یک عدد ناطق است.

برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم

هرگاه با فرضیه یا قبولی عکس ادعا یک قضیه یا مساله، به نتیجه خلاف فرضیه برسیم؛ در این صورت فرض ما درست بوده که خلاف آن درست است، این گونه استدلال را بنام برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم می نامند.

مثال: نشان دهید که اگر n^2 یک عدد جفت طبیعی باشد، عدد n نیز جفت است؟

فعالیت ها:

- انحراف چارک ها چیست؟
- یک مثال از انحراف چارک ها کار نمائید.
- واریانس چیست؟ و تفاوت واریانس با انحراف معیاری چیست؟
- انحراف معیاری چیست؟
- تفاوت بین چارک ها، واریانس و انحراف معیاری را مشخص کنید.
- استدلال یعنی چه؟
- استدلال درک شهودی روی کدام قضیه ها کار می شود؟
- استدلال استقرایی چیست؟
- منطق ریاضی چیست؟