

عنوان: عملیه های توابع

صفحه: 103

اهداف آموزشی:

- شاگردان در ختم این درس بتوانند ترکیب توابع را بفهمند.
- شاگردان به فورمول ها و روش های حل سوالات پیرامون درس آشنا گردند.

عملیه های چهار گانه بالای توابع صدق می کند. این چهار عملیه به ترتیب قرار ذیل ارائه می شود.

$$f(x) \pm g(x) = (f + g)(x) \quad : \quad D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) \quad : \quad D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$f(x) \div g(x) = (f \div g)(x) \quad : \quad D_{f \div g} = D_f \cap D_g, \{x / g \neq 0\}$$

مثال اول: عملیه های اساسی را بالا توابع $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 - 4$ انجام دهید.

حل: برای انجام عملیه های اساسی بالای توابع معالات آنها را جمع، تفریق، ضرب و تقسیم می کنیم.

$$f(x) = 2x + 1 \quad , \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = x^2 - 4 \quad , \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$1. f(x) + g(x) = x^2 - 4 + 2x + 1 = x^2 + 2x - 3 \quad D_{f+g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$2. f(x) - g(x) = 2x + 1 - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 5 \quad D_{f-g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$3. f(x) \times g(x) = (x^2 - 4)(2x + 1) = 2x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$D_{f \times g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$4. f(x) \div g(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 4} \quad D_{f/g} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

مثال دوم: اگر توابع $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = 4x + 5$ باشد، $(f + g)(-2)$ را دریافت نمائید.

حل: ابتدا توابع فوق را جمع می کنیم و بعداً قیمت داده شده متحول $(x = -2)$ را در حاصل جمع آنها وضع می نمائیم.

$$f(x) + g(x) = x^2 - 3 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 2$$

$$(f + g)(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$$

فعالیت: اگر $f(x) = x - 5$ و $g(x) = x^2 - 2$ باشند. حاصل جمع، حاصل تفریق، حاصل ضرب و حاصل تقسیم آنها را دریابید.

تمرین: عملیه های اساسی را بالای توابع ذیل انجام دهید.

$$1) \begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x} \\ g(x) = \sqrt{3+x} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} f(x) = 5x - 2 \\ g(x) = 3x^2 \end{cases}$$

عنوان: ترکیب توابع

صفحه: 107

اهداف آموزشی: دریایان این درس شاگردان.

- بتوانند توابع را باهم ترکیب نمایند.
- ترکیب دوگانه و سه گانه را انجام داده بتوانند.
- سوالات مربوط به ترکیب توابع را حل کرده بتوانند.

تعریف: هرگاه معادله یک تابع قسمماً بجای محتول تابع دیگر وضع گردد، این عملیه را ترکیب توابع می نامند. ویا به عبارت دیگر

اگر f و g توابع از متحول x باشند، ترکیب توابع f و g را به شکل $f \circ g = f(g(x))$ را نشان می دهد.

ناحیه تعریف $(f \circ g)(x)$ عبارت از x است که در ناحیه تعریف تابع $g(x)$ باشد و $g(x)$ در ناحیه تعریف f باشد. یعنی

$$(f \circ g): D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_g \text{ and } g(x) \in D_f\}$$

$$3) f(x) = \frac{3x}{x-4}, \quad g(x) = 5x$$

عنوان 3: تابع معکوس

صفحه: 111

اهداف آموزشی: درختم این درس شاگردان قادر گردد تا

- مفهوم تابع معکوس را بدانند
- تابع معکوس یک تابع را دریافت کرده بتوانند
- سوالات مربوط به تابع معکوس را حل کرده بتوانند.

تعریف: اگر در یک تابع جاهای ناحیه تعریف و ناحیه قیمت آنها باهم تبدیل گردد یک تابع جدید بوجود می آید که بنام تابع معکوس تابع اول نامیده می شود.

مثال اول: اگر $f := \{(2,4), (x,3), (a,b), (m,n)\}$ یک تابع باشد درین صورت

$$f^{-1} = \{(4,2), (3,x), (b,a), (n,m)\}$$

در تابع معکوس رابطه ذیل وجود دارد.

$$D_f = R_{f^{-1}} \quad \text{and} \quad D_{f^{-1}} = R_f$$

نکته: تنها توابع یک به یک معکوس پذیر اند.

تابع یک به یک

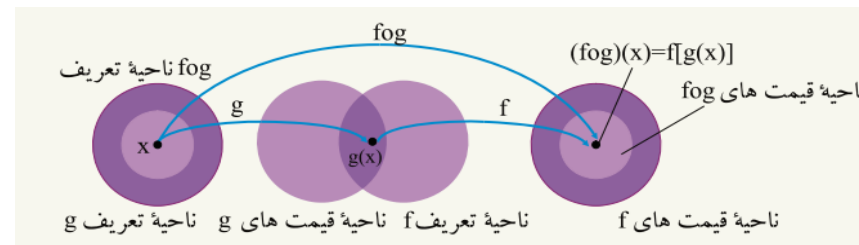
تعریف: تابع $f(x)$ یک به یک است اگر برای $x_1 \neq x_2$ نتیجه شود که $f(x_1) \neq f(x_2)$ است،

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

مثال: کدام یکی از توابع $f(x) = -4x + 12$ و $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ یک به یک است؟

حل: برای دانستن یک به یک بودن تابع دو قیمت اختیاری مختلف در تابع وضع می کنیم، اگر نتیجه مختلف حاصل شد تابع یک به است و اگر نتیجه مشابه حاصل شد تابع یک به یک نیست.

$$f(x) = -4x + 1 : -2 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 20 \\ f(2) = 4 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \neq f(2)$$



مثال اول: اگر $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = x^2 + 6$ باشد درین صورت (fog) و (gof) را دریافت کنید.

حل: برای ترکیب یک تابع معادله همان تابع را قسماً بجای متحول تابع دیگر قرار می دهیم.

$$(gof)(x) = g(f(x)) = (3x - 4)^2 + 6 = 9x^2 - 24x + 22$$

ناحیه تعریف ترکیب توابع فوق تمام اعداد حقیقی اند.

مثال دوم: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 1 - x$ را ترکیب و ناحیه تعریف ترکیب آنها را دریافت کنید.

حل:

$$f(x) = \sqrt{x} : D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = 1 - x : D_g = (-\infty, +\infty)$$

$$fog = f(g(x)) = \sqrt{1-x} : D_{fog} = \{x : x \in \mathbb{R}, 1-x \geq 0 = (-\infty, 1]\}$$

$$gof = g(f(x)) = 1 - \sqrt{x} : D_{gof} = \{x : x \in \mathbb{R}, x \in D_f \text{ and } f(x) \in D_g\}$$

$$\{x : x \geq 0, \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} = [0, \infty)$$

تمرین: توابع ذیل را ترکیب کنید.

$$1) f(x) = 3x, \quad g(x) = \frac{3}{x}$$

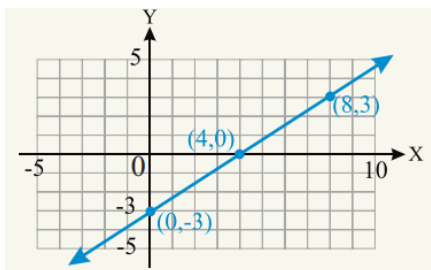
$$2) f(x) = 2x^2 - 3x, \quad g(x) = x - 2$$

تابع خطی: عبارت از تابع است که گراف آن یک خط مستقیم باشد. و معادله آن عبارت اند از.

معادله تابع خطی عبارت اند از $y = ax + b$ و گراف آن یک خط مستقیم است.

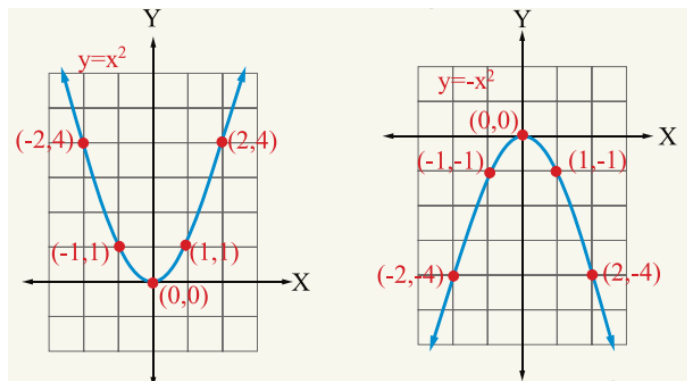
مثال: معادله تابع $y = \frac{3}{4}x - 3$ را در نظر گرفته جزئیات و معادلات آنرا رسم کنید.

حل: در تابع خطی ضریب x همیشه بنام میل خط مستقیم و عدد ثابت بنام نقطه تقاطع با محور y گفته می شود.



تابع درجه دوم و گراف آن

تابع درجه دوم عبارت از تابع اند که توان متحول آن عدد 2 بوده و گراف آن یک پارابول باشد. که به شکل ذیل ترسیم می گردد.



مثال: گراف تابع $y = (x - 4)^2$ را ترسیم نمایید.

حل: برای ترسیم گراف قرار ذیل عمل می کنیم.

• در یک جدول برای x قیمت میدهم و برای y قیمت دریافت می گردد.

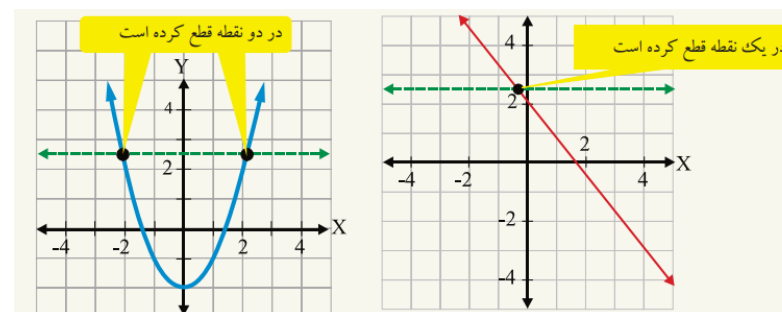
تابع فوق شرط یک به یک بودن را صدق نمود، پس یک به یک است.

$$g(x) = \sqrt{25 - x^2} : -2 \neq 2 \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = \sqrt{21} \\ f(2) = \sqrt{21} \end{cases} \Rightarrow f(-2) = f(2)$$

تابع $g(x)$ شرط یک به یک بودن را صدق نمی کند، پس یک به یک نیست.

تشخیص تابع یک به یک از روی گراف

اگر یک خط افقی موازی با محور x گراف تابع را در یک نقطه قطع کند، تابع یک به یک است و اگر در بیشتر از یک نقطه قطع کند. تابع یک به یک نیست.



دریافت تابع معکوس یک تابع

برای دریافت تابع معکوس یک تابع جاهای x و y را تبدیل نموده دوباره قیمت y را از جنس x دریافت می کنیم، حاصل عملیه تابع معکوس تابع اول است.

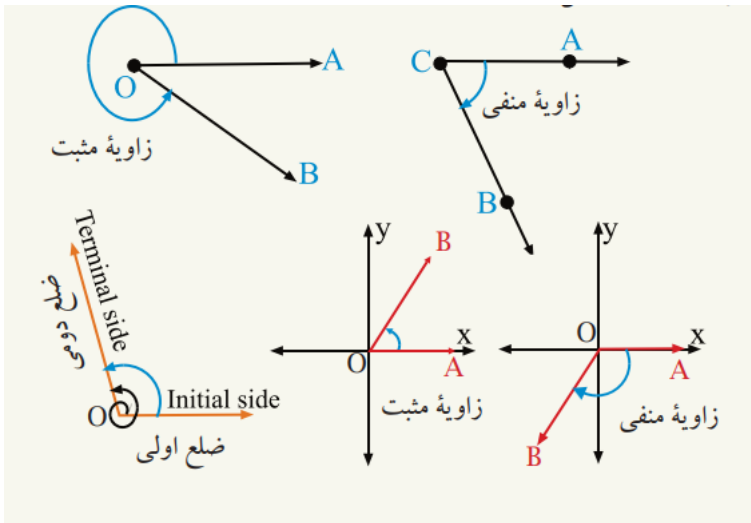
مثال: تابع معکوس تابع $y = 3x + 2$ را دریابید.

حل: جاهای x و y را تبدیل می کنیم.

$$y = 3x + 2 \Rightarrow x = 3y + 2$$

$$x - 2 = 3y : \div (3) \Rightarrow y = \frac{x - 2}{3} = f^{(-1)}(x)$$

عنوان 4: تابع پولینومی



واحد های اندازه گیری زاویه

زاویه را توسط سه واحد (درجه، گراد و رادیان) اندازه می کنند.

الف. درجه: $\frac{1}{360}$ حصه از وسعت یک دایره را درجه می نامند و به حرف D و نشانه $(^\circ)$ نمایش داده می شود. مثلاً بیست درجه را به شکل $20D$ یا بیشتر به شکل 20° نشان می دهد.

واحد های کوچکتر درجه دقیقه و ثانیه است که نشانه دقیقه ($'$) و نشانه ثانیه ($''$) است، یعنی.

$$1^\circ = 60' \quad 1' = 60'' \quad 1^\circ = 3600''$$

مثال: $35^\circ 15' 27''$ را به سیستم اعشاری و $(48,3625)$ را به سیستم DMS بنویسید.

حل:

$$35^\circ 15' 27'' = 35^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ + \left(\frac{27}{3600}\right)^\circ = 35^\circ + 0,25^\circ + 0,0075^\circ = 35,2575^\circ$$

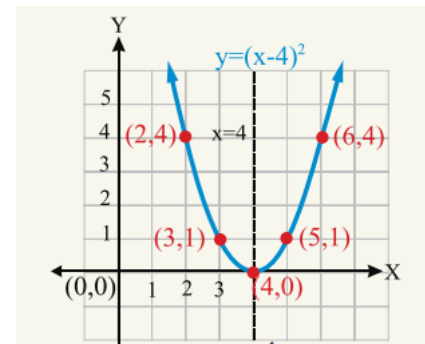
$$48,3625^\circ = 48^\circ + 0,3625^\circ = 48^\circ + (0,3625 \cdot 60)' = 48^\circ + (21,75)' \\ = 48^\circ + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^\circ 21' 45''$$

- تقاطع با محورات را دریافت می کنیم طوری که برای تقاطع با $x = 0$ قرار می دهیم $y = 0$ و برای تقاطع با $y = 0$ قرار می دهیم $x = 0$.

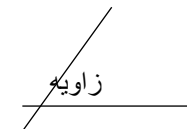
- کمیات وضعیه راس پارابول را تعیین می کنیم. فرمول تعیین راس پارابول عبارت اند از.

$$v = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

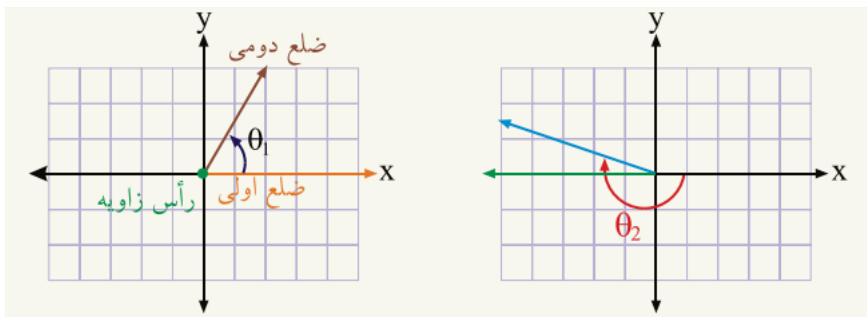
- دهن پارابول را تعیین می کنیم طوری که در اصل معادله اگر $a > 0$ دهن پارابول به طرف پایین است و دارای نقطه اضغری می باشد و اگر $a < 0$ باشد دهن پارابول به طرف بالا بوده و دارای نقطه اعظمی می باشد.



زاویه: کنج است که از تقاطع دو نیم خط بوجود آمده است، یا زاویه از دوران یک خط به حول یک نقطه ایجاد می گردد.



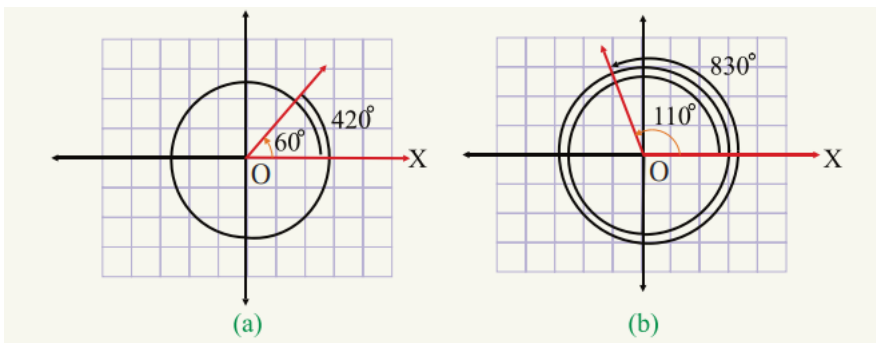
در مثلثات زاویه را دو نوع معرفی می نماید، زاویه که از حرکت ضلع دوار موافق عقربه ساعت به وجود آید را (زاویه منفی) و زاویه که از حرکت ضلع دوار مخالف عقربه ساعت بوجود آید را (زاویه مثبت) می نامند.



زاویه کوترمنل

دو یا چند زاویه که اضلاع دومی آن در حالت معیاری باهم منطبق باشند به نام زاویه های کوترمنل یاد می شود.

مثال: در اشکال ذیل دیده می شوند که اضلاع دومی زاویه های 110 و 830 و در شکل دیگر 60 و 420 باهم منطبق اند. پس گفته می توانیم که زاویه 110 با 830 کوترمنل است، همچنان زاویه 60 با زاویه 420 نیز کوترمنل است.



توابع مثلثاتی:

نسبت های مثلثاتی که از تقسیم اضلاع مقابل، مجاور و وتر بر یکدیگر بدست می آید بنام توابع مثلثاتی نامیده می شود که در مجموع شش نوع اند. که عبارت اند از سین زاویه، کوسین زاویه، تانجانت زاویه، کوتانجنت زاویه، سیکینت زاویه و کوسیکنت زاویه.

ب) گراد: $\frac{1}{400}$ حصه وسعت یک دایره را بنام گراد یاد می کند. که به حرف G نشان داده می شود، واحد های کوچکتر آن دقیقه گراد و ثانیه گراد است.

$$1G = 100G'$$

$$1G' = 100G''$$

ج) رادیان: عبارت از اندازه زاویه مرکزی می باشد که طول قوس مقابل آن مساوی به طول شعاع دایره باشد.

وسعت یک دایره مکمل برابر با 2π رادیان است یعنی.

$$360^\circ = 2\pi^R$$

تبدیل واحدها اندازه گیری زاویه به یک دیگر

برای تبدیل واحدها اندازه گیری زاویه به یک دیگر از رابطه عمومی ذیل استفاده می نمائیم.

$$\frac{D}{360} = \frac{G}{400} = \frac{R}{2\pi} \quad \text{یا} \quad \frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

مثال 1: اندازه 220 درجه را به رادیان تبدیل کنید.

حل 1:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{220}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{220\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \Rightarrow \boxed{R = \frac{11\pi}{9}}$$

مثال 2: اندازه $\frac{5\pi}{6}$ را به گراد تبدیل کنید.

حل 2:

$$\frac{G}{200} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow G = \frac{200 \cdot \frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{1000}{6} \Rightarrow \boxed{G = \frac{1000}{6}}$$

حالت معیاری یک زاویه

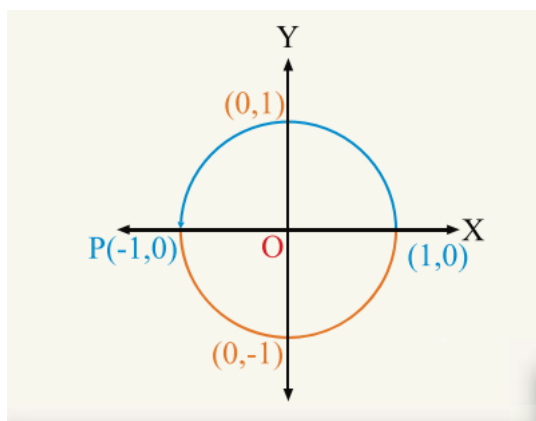
اگر راس زاویه در مبداء کمیات وضعیه و ضلع اولی زاویه بالای جهت مثبت محور X باشد این زاویه در حالت معیاری می باشد.

$\sec \theta, \cos \theta$	$\tan \theta, \cot \theta$	$\sin \theta, \csc \theta$	ربع
+	+	+	I
-	-	+	II
-	+	-	III
+	-	-	IV

$\sin \theta > 0$	$\sin \theta > 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta < 0$	$\tan \theta > 0$
$\cot \theta < 0$	$\cot \theta > 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta > 0$	$\csc \theta > 0$
$\sin \theta < 0$	$\sin \theta < 0$
$\cos \theta < 0$	$\cos \theta > 0$
$\tan \theta > 0$	$\tan \theta < 0$
$\cot \theta > 0$	$\cot \theta < 0$
$\sec \theta < 0$	$\sec \theta > 0$
$\csc \theta < 0$	$\csc \theta < 0$

نسبت های مثلثاتی زاویه های $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ و 360°

برای دریافت نسبت های مثلثاتی زاویه های فوق دایره مثلثاتی با شعاع $r = 1 \text{ unit}$ را در نظر می گیریم و در نظر داشت نقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ ، $(-1,0)$ و $(0,-1)$ می توان نسبت های مثلثاتی آنها را دریافت نمود.



$$\sin \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

بعضی روابط اساسی بین نسبت های مثلثاتی زوایا

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$
- $\tan x = \frac{1}{\cot x}$
- $\sin x = \frac{1}{\csc x}$
- $\cos x = \frac{1}{\sec x}$

اشاره نسبت های مثلثاتی: اشاره نسبت های مثلثاتی زوایا در مختصات قائم قرار ذیل اند.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\cotan(-\theta) = -\cotan\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه (-30°) را تعیین کنید.

حل:

$$\sin(-30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(-30) = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-30) = -\tan(30) = -\sqrt{3}$$

$$\cotan(-30) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ارتباط بین نسبت های مثلثات دو زاویه که مجموع و فرق آنها 180° گردد.

$$\sin(180 - \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(180 - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180 - \theta) = -\tan\theta$$

$$\cotan(180 - \theta) = -\cotan\theta$$

$$\sec(180 - \theta) = -\sec\theta$$

$$\csc(180 - \theta) = \csc\theta$$

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان 180° درجه گردد.

$$\sin(180 + \theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(180 + \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180 + \theta) = \tan\theta$$

$$\cotan(180 + \theta) = \cotan\theta$$

$$\sec(180 + \theta) = -\sec\theta$$

$$\csc(180 + \theta) = -\csc\theta$$

نسبت های مثلثاتی دو زاویه که مجموع شان 90° گردد.

$$\sin(90 - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90 - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90 - \theta) = \cotan\theta$$

$$\cotan(90 - \theta) = \tan\theta$$

$$\sec(90 - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90 - \theta) = \sec\theta$$

$$\sin 0 = 0 \quad \cos 0 = 1 \quad \tan 0 = 0 \quad \cotan 0 = \infty \quad \sec 0 = \infty \quad \csc 0 = 1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 90°

$$\sin 90 = 1, \quad \cos 90 = 0 \quad \tan 90 = \infty, \quad \cotan 90 = 1, \quad \sec 90 = \infty, \quad \csc 90 = 1$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 180°

$$\sin 180 = 0, \quad \cos 180 = -1, \quad \tan 180 = 0, \quad \cotan 180 = -\infty$$

$$\sec 180 = -1, \quad \csc 180 = \infty$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 270°

$$\sin 270^\circ = -1, \quad \cos 270 = 0 \quad \tan 270 = -\infty$$

$$\cotan 270 = 0, \quad \sec 270 = \infty \quad \csc 270 = -1$$

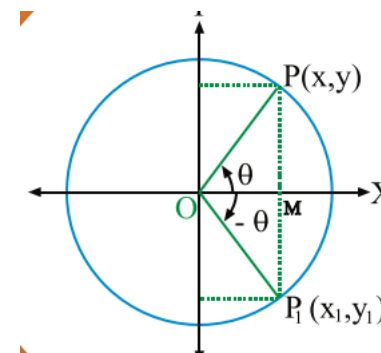
نسبت های مثلثاتی زاویه 360°

زاویه 360 درجه با زاویه صفر درجه کوترمنل است بناً نسبت های مثلثاتی آن نیز برابر با نسبت های صفر است.

ارتباط بین نسبت های مثلثاتی یک زاویه حاده با زاویه های دیگر

رابطه بین نسبت های مثلثاتی زوایای θ و $-\theta$

زاویه حاده مثبت به اندازه θ مخالف عقربه ساعت و زاویه برابر اندازه θ - موافق عقربه ساعت ترسیم می کنیم و مطابق آن نسبت های مثلثاتی آنها را دریافت می نمایم





نسبت های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان 90° گردد.

$$\sin(90 + \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(90 - \theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(90 - \theta) = -\csc\theta$$

$$\cos(90 - \theta) = \sin\theta$$

$$\cot(90 - \theta) = \tan\theta$$

$$\csc(90 - \theta) = \sec\theta$$

فعالیت ها:

1. زاویه چیست؟ و چند نوع می باشد.
2. واحد های اندازه گیری زاویه را به ترتیب تشریح کنید.
3. 25° درجه را به گراد و رادیان تبدیل نمائید.
4. رادیان را به درجه و گراد تبدیل نمائید.
5. نسبت های مثلثاتی زاویه 240 را دریافت نمائید.
6. نسبت های مثلثاتی زاویه (-40) را دریافت نمائید.
7. نسبت های مثلثاتی زاویه 270 را تعیین کنید.