

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

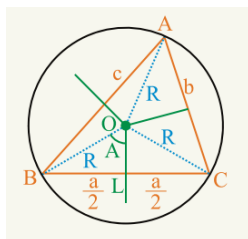
$$S = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)} = \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}^2$$

شعاع دایره محیطی یک مثلث

دایره محیطی دایره است که مثلث در داخل دایره قرار داشته باشد، و دایره با هر سه راس مثلث مماس بوده و مرکز دایره محیطی نقطه تقاطع هر سه ناصف عمودی اضلاع مثلث می باشد.

شعاع دایره محیطی از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$R = \frac{abc}{4s}$$



مثال 1: شعاع دایره محیطی در مثلث ABC را دریافت نمایید طوری که اضلاع مثلث به ترتیب $a = 11 \text{ cm}$ و $b = 12 \text{ cm}$ و $c = 13 \text{ cm}$ باشد.

حل 1:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{11 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 13 \text{ cm}}{2} = 18 \text{ cm}$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{18 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = 61.48 \text{ cm}^2$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{4(61.48)} = 6.98 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{R = 6.98 \text{ cm}}$$

مثال 2: شعاع دایره محیطی مثلثی را دریابید که اضلاع آن به ترتیب $a = 3 \text{ cm}$ ، $b = 5 \text{ cm}$ و $c = 6 \text{ cm}$ باشد.

حل 2:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{90}{4\sqrt{56}} \approx 3 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{R \approx 3 \text{ cm}}$$

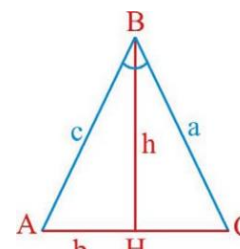
شعاع دایره محاطی مثلث

دایره محاطی یک مثلث عبارت از دایره ی است که دایره در داخل مثلث واقع بوده و دایره در داخل مثلث با سه ضلع مثلث مماس بوده، مرکز دایره محاطی تقاطع هر سه ناصف الزاویه مثلث باشد.

راهنمایی آموزشی ریاضی - تسریعی ب

مساحت مثلث از جنس دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع

اگر اندازه دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع برابر معلوم باشد، مساحت مثلث از فرمول ذیل دریافت می گردد.



$$S_{ABC} = b \cdot c \cdot \sin A$$

مثال: مساحت مثلثی را دریابید که طول دو ضلع آن به ترتیب $a = 3.5 \text{ cm}$ و $b = 6 \text{ cm}$ و زاویه بین آن $B = 47.5^\circ$ باشد.

حل:

$$S_{ABC} = b \cdot c \cdot \sin A \Rightarrow S = 3.5 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot \sin 47.5^\circ$$

$$S = S = 3.5 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} \cdot 0.73 \approx 7.74 \text{ cm}^2$$

مثال 2: مساحت مثلثی را دریابید که طول دو ضلع آن به ترتیب $a = 8 \text{ cm}$ و $b = 13 \text{ cm}$ بوده و زاویه بین این دو ضلع 130° باشد.

حل 2:

$$S = 8 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} \cdot \sin 130 = 8 \text{ cm} \cdot 13 \text{ cm} \cdot 0.766 = 39.8 \text{ cm}^2$$

فرمول هیرون (مساحت مثلث از روی سه ضلع آن)

یک مثلث کیفی که اضلاع آن a ، b و c باشد را در نظر می گیریم. اگر p نصف محیط مثلث یعنی $(p = \frac{a+b+c}{2})$ باشد، درین صورت مساحت مثلث عبارت اند از.

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

مثال: مساحت مثلثی را دریابید که طول اضلاع آن به ترتیب $a = 5 \text{ cm}$ ، $b = 4 \text{ cm}$ و $c = 3 \text{ cm}$ باشد.

حل:

$$p = \frac{3 + 4 + 5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ cm}$$

$$i^{1998} = i^{4 \cdot 499} \cdot i^2 = (i^4)^{499} \cdot -1 = 1^{499} \cdot -1 = 1 \cdot (-1) = -1$$

عملیه های چهارگانه در اعداد موهومی

❖ عملیه جمع: حاصل جمع دو عدد موهومی یک عدد موهومی است.

مثال: حاصل جمع $7i$ و $8i$ را دریابید.

حل:

$$7i + 8i = 15i$$

❖ عملیه تفریق: حاصل تفریق دو عدد موهومی نیز یک عدد موهومی اند.

مثال: حاصل تفریق $12i - 7i$ را دریابید.

حل:

$$12i - 7i = 5i$$

❖ عملیه ضرب: حاصل ضرب دو عدد موهومی یک عدد حقیقی اند.

مثال: حاصل ضرب $5i$ و $3i$ را دریابید.

حل:

$$(3i)(5i) = 3 \cdot 5 \cdot i^2 = 15 \cdot (-1) = -15$$

❖ عملیه تقسیم: حاصل تقسیم دو عدد موهومی یک عدد حقیقی اند.

مثال: حاصل تقسیم های $\frac{12i}{6i}$ و $\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i}$ را دریافت کنید.

حل:

$$\frac{\sqrt{13}i}{\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{12i}{6i} = \frac{12}{6} = 2$$

شعاع دایره محاطی از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$r = \frac{s}{p}$$

مثال: شعاع دایره محاطی مثلث را دریافت نمائید طوری که اضلاع آن به ترتیب $7cm$ ، $8cm$ و $9cm$ باشد.

حل:

$$r = \frac{s}{p} = \frac{\sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}}{12cm} = \frac{28.83cm^2}{12cm} \approx 2.23cm$$

اعداد موهومی

جذر اعداد منفی با درجه جفت را بنام اعداد موهومی می نامند که علامه عدد موهومی $i = \sqrt{-1}$ اند.

مثال 1: جذر $\sqrt{-16}$ را دریافت نمائید.

حل 1:

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{16} \cdot i = \pm 4i$$

مثال 2: جذر $\sqrt{-5}$ را دریافت کنید.

حل 2:

$$\sqrt{-5} = \sqrt{5(-1)} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \pm \sqrt{5} \cdot i$$

توان های i

اگر سمبول اعداد موهومی یعنی (i) را به توان اعداد بالابرییم نتیجه آن همیشه یکی از اعداد $\{-1, -i, +1, +i\}$ خواهد بود.

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (\sqrt{-1})^2 = i \cdot 1 = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (\sqrt{-1})^2 (\sqrt{-1})^2 = 1$$

$$i^5 = i \cdot i^2 \cdot i^2 = i \cdot (\sqrt{-1})^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 = i$$

اگر توان i زیاد باشد آنرا بر چهار تقسیم نموده به شکل جارج قسمت ضرب مقسوم علیه + باقی مانده میگیریم.

مثال: i^{1998} را دریابید.

حل: توان i یعنی عدد 1998 را بالای 4 تقسیم می کنیم.

$$1998 \div 4 = 499 \text{ باقی میماند } 2$$

جمع و تفریق اعداد مختلط

قرار است درین درس مفاهیم ذیل را بخوانیم

عملیه جمع اعداد مختلط: برای انجام عملیه جمع اعداد مختلط، قسمت های حقیقی را جدا و قسمت های موهومی را جدا جمع می کنیم. حاصل جمع دو عدد مختلط یک عدد مختلط است.

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{cases} \Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

مثال:

$$\begin{cases} z_1 = 6 + 2i \\ z_2 = -4 + 5i \end{cases} \Rightarrow z_1 + z_2 = (6 - 4) + (2 + 5)i = 2 + 7i$$

عملیه تفریق اعداد مختلط: برای تفریق اعداد مختلط، قسمت های حقیقی جدا و قسمت های موهومی جدا تفریق می شود. طوریکه تفریق اعداد مختلط بازهم یک عدد مختلط است.

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{cases} \Rightarrow z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

مثال:

$$\begin{cases} z_1 = 12 + 3i \\ z_2 = 7 + 5i \end{cases} \Rightarrow z_1 - z_2 = (12 - 7) + (3 - 5)i = 5 - 2i$$

عملیه ضرب اعداد مختلط: برای ضرب دو عدد مختلط از قانون ضرب بینوم در بینوم استفاده می کنیم و با در نظر داشت $i^2 = -1$ داریم که.

$$\begin{cases} z_1 = a_1 + b_1 i \\ z_2 = a_2 + b_2 i \end{cases} \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i)$$

$$\Rightarrow a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + b_1 a_2)i$$

مثال: حاصل ضرب $(7 - 2i)$ و $(5 - 4i)$ را دریافت نمائید.

حل:

$$(5 - 4i) \cdot (7 - 2i) = (35 - 8) + (-10 - 28)i = -38 - 38i$$

مزدوج یک عدد مختلط: برای دریافت مزدوج یک عدد مختلط، علامه قسمت موهومی آنرا تغییر می دهیم. و آنرا به \bar{z} نشان می دهیم.

$$z = a + bi \xrightarrow{\text{مزدوج}} \bar{z} = a - bi$$

مثال: مزدوج عدد $z = 3 + 7i$ را دریافت نمائید.

حل:

$$z = 3 + 7i \xrightarrow{\text{مزدوج}} \bar{z} = 3 - 7i$$

جمع و تفریق اعداد مختلط

ضرب اعداد مختلط

مزدوج اعداد مختلط

تقسیم اعداد مختلط

حل سیستم معادلات خطی درجه دوم توسط اعداد مختلط

سیستم کمیات وضعیه

دریافت کمیات وضعیه خط که توسط یک نقطه به دو بخش تقسیم می شود.

اهداف آموزشی:

درختم این بخش شاگردان قادر خواهد بود تا

- ❖ اعداد مختلط را جمع و تفریق کرده بتوانند.
- ❖ مزدوج اعداد مختلط را دریافت نموده و آنرا عملیه بتوانند.
- ❖ اعداد مختلط را جمع و تفریق کرده بتوانند.
- ❖ سوالات مربوط به اعداد مختلط را حل کرده بتوانند.

ماموریت: شاگردان مکلف اند تا به صورت دقیق این بخش را مطالعه و یک یا دو سوال جانبی از هر موضوع کار نمایند، تا بتوانند به بهترین شکل ممکن این بخش را به یاد بسپارند.

تساوی اعداد مختلط: دو عدد مختلط زمانی باهم مساوی است که قسمت های حقیقی و موهومی آنها باهم مساوی باشد یعنی

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

اعداد فوق مساوی است اگر $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$ باشد.

مثال: اگر اعداد $z_1 = x + 2yi$ و $z_2 = 2 - 5i$ باهم مساوی باشد، قیمت x و y را دریافت نمائید.

حل: در قدم نخست قیمت دلتا را دریافت می نمایم.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 - 24 = -20 \Rightarrow \Delta = -20 < 0$$

دیده می شود که قیمت دلتا از صفر کوچکتر است، پس حل موهومی دارد. برای دریافت حل آن از فورمول خوارزمی استفاده می کنیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$3x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{6} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}i}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}i}{6} = \frac{-1 + \sqrt{5}i}{3} \\ x_2 = \frac{-2 - 2\sqrt{5}i}{6} = \frac{-1 - \sqrt{5}i}{3} \end{cases}$$

فعالیت ها:

- ✓ اعداد مختلط را تعریف نمایید.
- ✓ استفاده از اعداد مختلط را بیان نمایید.
- ✓ گراف عدد مختلط در سیستم کمیات وضعیه را ترسیم کنید.
- ✓ عملیه های اساسی چهار گانه در اعداد مختلط را تعریف نمایید.
- ✓ مزدوج عدد مختلط چیست؟
- ✓ مزدوج عدد $3 - 7i$ را بنویسید.
- ✓ عملیه های اساسی چهارگانه را در اعداد $2 + 9i$ و $7 - 3i$ انجام دهید.
- ✓ از هر عملیه یک مثال ایجاد نموده کار نمایید، درست بودن آن را با نتایج بالا مقایسه کنید.
- ✓ معادله دومجهوله درجه دوم $y^2 - 5y + 9 = 0$ را حل نمایید.

سیستم کمیات وضعیه

سیستم کمیات وضعیه قایم از دو خط مستقیم عمود بر هم تشکیل گردیده است که یک مستوی را به چهار بخش تقسیم می نماید، درین مستوی محور افقی را بنام محور فاصله یا محور قیمت یا محور (X) و محور عمودی را بنام محور ترتیب یا محور (Y) یاد می گردد. که نقطه تقاطع محورات را بنام مبدا کمیات وضعیه یاد می شود.

معکوس ضربی عدد مختلط: معکوس ضربی عدد $(a + bi)$ عبارت اند از

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right)$$

مثال: معکوس ضربی عدد $4 + 7i$ را دریافت نمایید.

حل:

$$4 + 7i \xrightarrow{\text{معکوس ضربی}} \left(\frac{4}{16 + 49} - \frac{7}{16 + 49} i \right) = \frac{4}{65} - \frac{7}{65} i$$

عملیه تقسیم اعداد مختلط: برای تقسیم اعداد مختلط از مزدوج آن کمک می گیریم و صورت و مخرج را ضرب در مزدوج مخرج می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{c + di} &\Rightarrow \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + (ad + bc)i - bdi}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

مثال: عملیه تقسیم $\frac{2-3i}{5+7i}$ را انجام دهید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{2 - 3i}{5 + 7i} &\Rightarrow \frac{2 - 3i}{5 + 7i} \cdot \frac{5 - 7i}{5 - 7i} = \frac{(2 - 3i)(5 - 7i)}{5^2 + 7^2} \\ &= \frac{10 - 14i - 15i + 21i^2}{25 + 49} = \frac{-11 - 29i}{74} \end{aligned}$$

حل معادله های درجه دوم یک مجهوله در ساحه اعداد مختلط:

شکل عمومی معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ است، برای یافتن ساحه حل آن، قیمت دلتا $\Delta = b^2 - 4ac$ را دریافت می نمایم که نظر به قیمت دلتا سه حالت دارد.

○ اگر قیمت دلتا بزرگ از صفر باشد ($\Delta > 0$) معادله در ساحه اعداد حقیقی دو حل دارد.

○ اگر قیمت دلتا مساوی به صفر باشد ($\Delta = 0$) معادله یک حل مضاعف دارد.

○ اگر قیمت دلتا کوچک از فرگردد، ($\Delta < 0$) معادله در ساحه حقیقی حل دارد بلکه حل موهومی دارد. این حل را می توان با استفاده از اعداد مختلط دریافت نمود.

مثال: معادله دوم مجهوله درجه دوم $3x^2 + 2x + 2 = 0$ را دریافت نمایید.

حل 2:

$$\begin{aligned} \overline{P_1 P_2} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5k - 1)^2 + (4 - 3)^2} \\ &= \sqrt{25k^2 - 10k + 2} \Rightarrow 25k^2 = 25k^2 - 10k + 2 \Rightarrow -10k = -2 \\ &\Rightarrow k = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

مختصات نقطه بی که یک قطعه خط را به نسبت معین تقسیم می کند.

برای بدست آوردن موقعیت نقطه $P(x, y)$ که قطعه خط $P_1 P_2$ را به نسبت مشخص تقسیم نموده از رابطه ذیل استفاده می کنیم.

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \quad y = \frac{y_1 + ry_2}{1+r}$$

نکته:

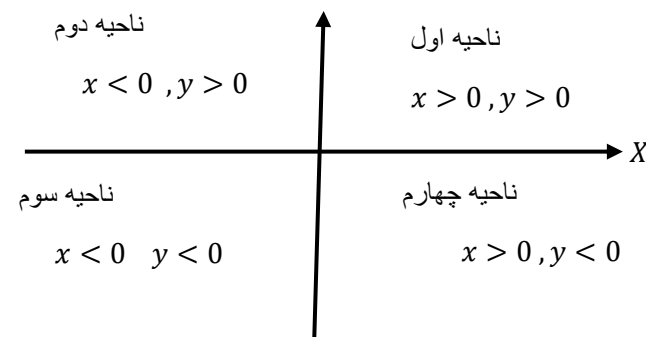
- اگر نقطه P خط $P_1 P_2$ را داخلی به یک نسبت تقسیم کند، درین صورت $r > 0$ است.
- اگر نقطه P خط $P_1 P_2$ را خارجاً به یک نسبت معین تقسیم کند در این صورت $r < 0$ است.
- هرگاه P نقطه وسطی (نقطه تنصیف) $P_1 P_2$ باشد درین صورت $r = 0$ شده و پس مختصات نقطه P عبارت اند از.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

مثال 1: هرگاه نقطه $P(x, y)$ قطعه خط را که از نقاط $P_1(3, -4)$ و $P_2(-2, 1)$ می گذرد را به نسبت $r = -\frac{8}{3}$ تقسیم نمائید، کمیات وضعیه نقطه P را دریافت نمائید.

حل 1:

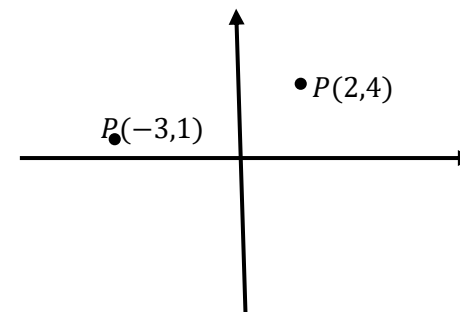
$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + rx_2}{1+r} = \frac{-2 + \left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{-2 - 8}{-\frac{5}{3}} = 6 \Rightarrow x = 6 \\ y &= \frac{y_1 + ry_2}{1+r} = \frac{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)(-4)}{1 + \left(-\frac{8}{3}\right)} = \frac{1 + \frac{32}{3}}{-\frac{5}{3}} = -7 \Rightarrow y = -7 \\ &\Rightarrow P(6, -7) \end{aligned}$$



دریافت موقعیت نقطه بر روی سیستم کمیات وضعیه

هر نقطه در سیستم کمیات وضعیه یک جوره مرتب (x, y) است که آنرا به نام مختصات یک نقطه یاد می نماید و به شکل $P(x, y)$ نشان می دهد.مثال: موقعیت نقطه $P(2, 4)$ و $P(-3, 1)$ را روی سیستم کمیات وضعیه نشان دهید.

حل:



فاصله بین دو نقطه

برای دریافت فاصله بین دو نقطه از فرمول ذیل استفاده می نمائیم.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال 1: فاصله بین نقاط $A(3, 4)$ و $B(6, 5)$ را بدست آورید.

حل 1:

$$d(AB) = \sqrt{(6 - 3)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

مثال 2: قیمت k را طوری تعیین کنید که طول قطعه خطی که از نقاط $P_1(1, 3)$ و $P_2(5k, 4)$ می گذرد 5 برابر k باشد.

مثال 2: کمیات وضعیه انجام هقطر یک دایره $A(4,10)$ و $B(2,6)$ است، موقعیت مرکز آن را دریافت نمائید.

حل:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = 3$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow y = 8$$

$$\Rightarrow O(3,8)$$

فعالیت ها:

- ❖ سیستم کمیات وضعیه را ترسیم نمائید.
- ❖ موقعیت نقاط $A(2,6)$ و $B(-3,7)$ و $C(-1,-1)$ را روی سیستم کمیات وضعیه را ترسیم نمائید.
- ❖ فاصله بین نقاط $M(-3,8)$ و $N(3,7)$ را دریافت نمائید.
- ❖ قیمت m را طوری تعیین نمائید که طول قطعه خط $P_1(-1,3)$ و $P_2(m,-1)$ به اندازه 5 واحد باشد.
- ❖ کمیات وضعیه نقطه P را دریابید، در صورتکه خط مستقیم که ارتباط $A(-8,4)$ و $B(2,-4)$ عبور کند و داخل و خارجاً به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم کند.

موفق باشید.