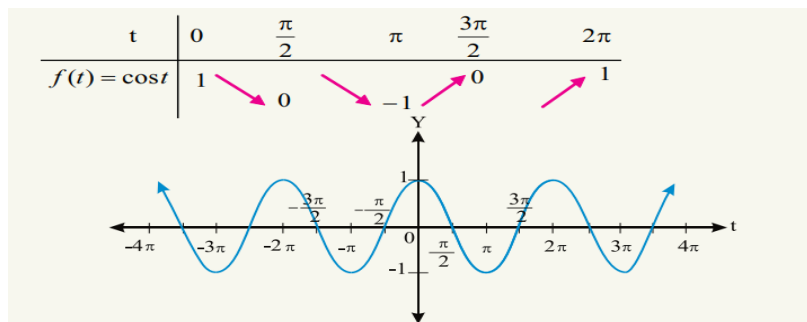


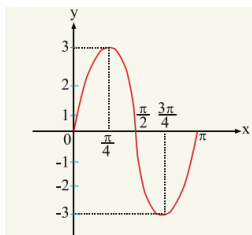
$$|a| = |-2| = 2 \text{ دامنه}$$



مثال 2: گراف تابع $y = 3 \sin 2x$ را در انتروال $[0, \pi]$ ترسیم کنید.

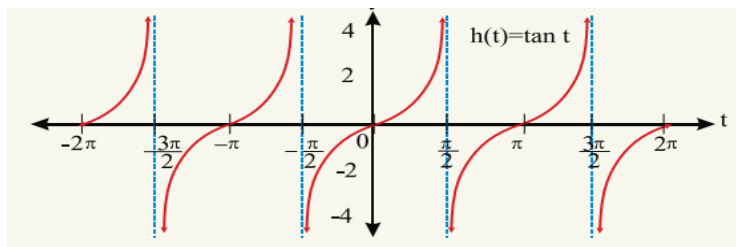
حل 2: در ابتداء دامنه و پیریود تابع را دریافت می کنیم.

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ پیریود} \quad |a| = |3| = 3 \text{ دامنه}$$



گراف تابع $f(x) = \tan x$

ناحیه تعریف تابع $y = \tan x$ عبارت اند از $\mathbb{R} - \left\{t, t \in \mathbb{R}, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$ و ناحیه قیمت آن تمام اعداد حقیقی اند. تانجنت یک تابع همواره متزايد است که پیریود تابع تانجانت π است و گراف آن قرار ذیل ترسیم می گردد.



راهنمایی آموزشی ریاضی - تسریعی ب

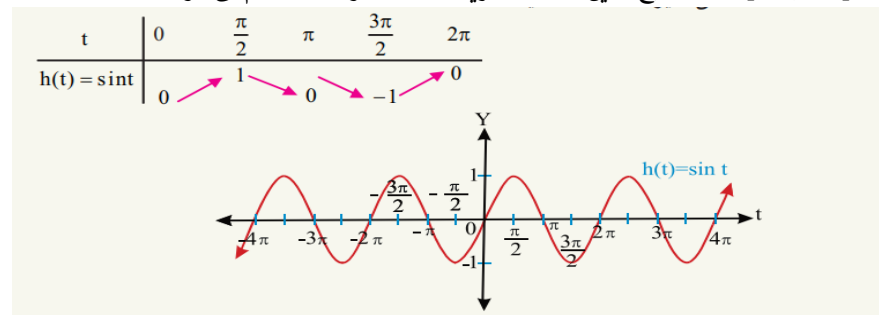
گراف توابع مثلثاتی

اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان قادر گردد تا

- مفهوم گراف توابع مثلثاتی را بدانند.
- گراف توابع مثلثاتی را به شکل درست رسم کرده بتوانند.
- اهمیت گراف های توابع مثلثاتی را بدانند.
- روش استفاده از گراف توابع مثلثاتی را یاد بگیرند.

گراف تابع $f(x) = \sin x$

تابع $f(x) = \sin x$ یک تابع همواره متناوب است، ساحه تعریف آن تمام اعداد حقیقی و ساحه قیمت آن $[-1, +1]$ اند که تابع درین انتروال تعریف شده و گراف آن رسم می گردد.



گراف تابع $f(x) = \cos x$

تابع $f(x) = \cos x$ نیز یک تابع همواره متناوب است، ساحه تعریف آن تمام اعداد حقیقی و ساحه قیمت آن $[-1, +1]$ می باشد و گراف تابع درین انتروال ترسیم می گردد.

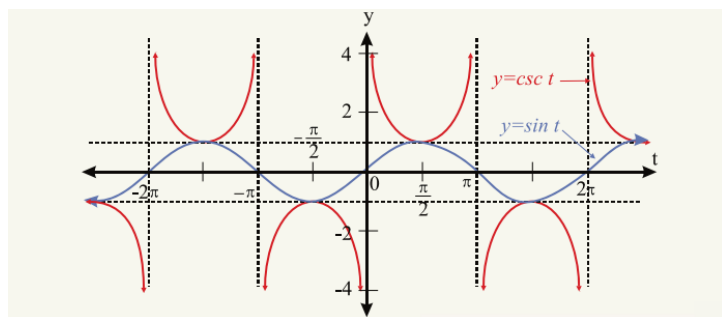
پیریود و دامنه تابع $\sin x$ و $\cos x$

پیریود توابع $y = a \sin bx$ و $y = a \cos bx$ از رابطه $\frac{2\pi}{b}$ طوری که $b > 0$ باشد دریافت می شود و دامنه تابع از رابطه $|a|$ دریافت می گردد.

مثال: پیریود و دامنه تابع $y = -2 \sin 4x$ را دریافت نمائید.

حل:

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ پیریود}$$



قوانین نسبت های مثلثاتی زوایای مرکب

فورمول های جمع و ضرب

❖ نسبت های مثلثاتی مجموع دو زاویه

محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ ، $\cos(\alpha + \beta)$ و $\tan(\alpha + \beta)$

برای محاسبه نسبت های مثلثاتی فوق از فورمول های عمومی آنها استفاده می نمائیم. یعنی

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

مثال 1: نسبت های مثلثاتی زاویه 120 را دریابید.

حل 1: نظر به فورمول سین، کوساین دو زاویه عمل می کنیم.

$$\sin 120 = \sin(90 + 30) = \sin 90 \cdot \cos 30 + \cos 90 \cdot \sin 30$$

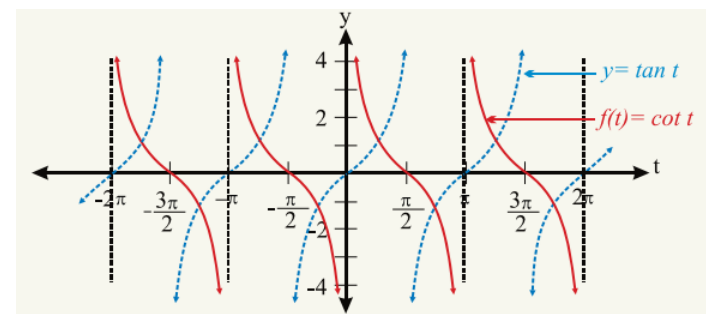
$$= 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \Rightarrow \boxed{\sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 120 = \cos(90 + 30) = \cos 90 \cdot \cos 30 - \sin 90 \cdot \sin 30$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \cdot \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 120 = -\frac{1}{2}}$$

گراف تابع $f(x) = \cot x$

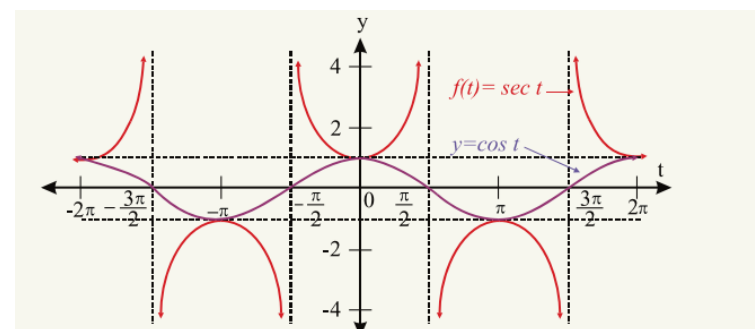
ناحیه تعریف این تابع عبارت اند از $\mathbb{R} - \{t, t \in \mathbb{R}, t = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ و ناحیه قیمت آن تمام اعداد حقیقی اند.



گراف تابع $f(x) = \sec x$

گراف تابع سیکننت معکوس گراف تابع کوساین است. یعنی $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

ناحیه تعریف تابع سیکننت عبارت اند از $\mathbb{R} - \left\{t: t = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ و ناحیه قیمت آن عبارت از $\mathbb{R} - [-1 + 1]$ و گراف آن قرار ذیل ترسیم می گردد.



گراف تابع $f(x) = \csc x$

گراف تابع کوسیکننت معکوس تابع سین است یعنی $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ و گراف آن معکوس تابع سین می باشد. یعنی

❖ نسبت های مثلثاتی تفاضل دو زاویه

محاسبه $\sin(\alpha - \beta)$ ، $\cos(\alpha - \beta)$ و $\tan(\alpha - \beta)$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

مثال 1: سین 150 را دریابید.

حل 1:

$$\sin 150 = \sin(180 - 30) = \sin 180 \cdot \cos 30 - \cos 180 \cdot \sin 30$$

$$= 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\sin 150 = \frac{1}{2}}$$

مثال 2: کوسین $\frac{\pi}{12}$ را دریابید.

حل 2:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

فعالیت ها:

1. گراف تابع سین و کوسین را در یک صفحه ترسیم کنید.
2. دامنه و پیریود تابع $y = -5 \sin 3x$ را دریابید.
3. نسبت های مثلثاتی زاویه 75 را دریابید.
4. نسبت های مثلثاتی زاویه $\frac{5\pi}{12}$ را دریابید.

نسبت های مثلثاتی 2α از جنس α :

در بعضی موارد نسبت های مثلثاتی دوچند یک زاویه از جنس همان زاویه ما را در حل مسایل مثلثاتی کمک می کند. بنا فورمول های آن را قرار ذیل مطالعه می نمائیم.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

مثال: نسبت های مثلثاتی زاویه 120 درجه را از جنس 60 درجه تعیین کنید.
حل:

$$\sin 120 = \sin 2 \cdot 60 = 2 \sin 60 \cos 60 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120 = \cos^2 60 - \sin^2 60 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120 = \tan 2 \cdot 60 = \frac{2 \tan 60}{1 - \tan^2 60} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = -\sqrt{3}$$

نسبت های مثلثاتی 3α از جنس نسبت های مثلثاتی α

$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3 \tan^2\alpha}$$

مثال 1: سین 180 را از جنس $\sin 60$ دریابید.
حل 1:

$$\sin 180 = 3 \sin 60 - 4 \sin^3 60 = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8} = 0$$

$$\sin 180 = 0$$

مثال 2: کوس 180 را از جنس $\cos 60$ دریافت نمائید.
حل 2:

مثال: نشان دهید که $\frac{\sin 70 + \sin 30}{\cos 70 + \cos 30} = \tan 50$ است.

حل:

$$\frac{\sin 70 + \sin 30}{\cos 70 + \cos 30} = \frac{2 \sin \frac{70+30}{2} \cos \frac{70-30}{2}}{2 \cos \frac{70+30}{2} \cos \frac{70-30}{2}} = \frac{2 \sin 50 \cos 20}{2 \cos 50 \cos 20} = \tan 50$$

تبدیل حاصل ضرب نسبت های مثلثاتی زوایا به مجموع و تفاضل

تبدیل حاصل ضرب به جمع و تفاضل را نیز می توان از رابطه عمومی نسبت های مثلثاتی مجموع و

تفاضل دو زاویه دریافت نمود. این روابط عبارت اند از.

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(A-B)]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A+B) - \cos(A-B)]$$

مثال 1: نشان دهید که $\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \tan 5x$ است.

حل 1: با استفاده از فرمول های تحویل ضربی داریم که:

$$\frac{\sin 8x + \sin 5x + \sin 2x}{\cos 8x + \cos 5x + \cos 2x} = \frac{2 \sin \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \sin 5x}{2 \cos \frac{8x+2x}{2} \cos \frac{8x-2x}{2} + \cos 5x}$$

$$= \frac{2 \sin 5x \cos 3x + \sin 5x}{2 \cos 5x \cos 3x + \cos 5x} = \frac{\sin 5x (2 \cos 3x + 1)}{\cos 5x (2 \cos 3x + 1)} = \tan 5x$$

مثال 2:

$$\cos 75 - \cos 15 = -2 \sin \frac{75+15}{2} \sin \frac{75-15}{2} = -2 \sin 45 \sin 30 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

طول قوس

صفحه: 249

$$\cos 180 = 4 \cos^3 60 - 3 \cos 60 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \frac{1}{2} = \frac{4}{8} - \frac{3}{2} = -1$$

مثال 3: قیمت $\tan 135$ را از جنس $\tan 45$ دریافت نمائید.

حل 3:

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan 45 - \tan^3 45}{1 - 3 \tan^2 45} = \frac{3 \cdot 1 - (1)^3}{1 - 3(1)^2} = \frac{3-1}{1-3 \cdot 1} = -1$$

فعالیت ها:

- تانجان 90 را از جنس تانجان 30 درجه دریافت نمائید.
- ساین 135 درجه را از جنس ساین 45 درجه دریافت نمائید.
- کوساین 270 درجه را از جنس کوساین 90 درجه دریافت نمائید.

تبدیل مجموع و تفاضل نسبت های مثلثاتی زوایا به شکل حاصل ضرب

با استفاده از نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه فرمول های تحویل ضربی در مثلثات قرار ذیل دریافت می شود.

مجموع و تفاضل ساین های دو زاویه عبارت اند از:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

مجموع و تفاضل کوساین های دو زاویه عبارت اند از:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

مجموع و تفاضل تانجنت های دو زاویه قرار ذیل دریافت می گردد.

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

مثال: مساحت قطعه دایره را دریابید که $R = 12cm$ و اندازه قوس آن $\widehat{AB} = 60^\circ$ باشد.
حل:

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} (12cm)^2 (60 - \sin 60) = \frac{144cm^2}{2} (60 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$S_{\text{قطعه}} = 72(60 - \frac{\sqrt{3}}{2})cm^2$$

اگر اندازه یک قوس θ° و شعاع دایره R و طول قوس مقابل زاویه θ برابر با L و محیط دایره برابر با C باشد، پس داریم که.

$$\frac{L}{\theta^\circ} = \frac{C}{360} \Rightarrow \frac{L}{\theta^\circ} = \frac{2\pi R}{360} \Rightarrow \boxed{L = \pi R \frac{\theta^\circ}{180}}$$

مثال: طول قوس زاویه را که در مقابل زاویه مرکزی 45 درجه قرار دارد دریابید اگر شعاع دایره $14cm$ باشد.

حل: با استفاده از فرمول بالا قیمت ها را وضع می کنیم طول قوس دریافت می گردد.

$$L = \pi R \frac{\theta^\circ}{180} = \pi \cdot 14cm \frac{45}{180} = \frac{14}{4} \pi cm \approx \frac{14}{4} \cdot \frac{22}{7} cm = 11cm$$

$$\boxed{L = 11cm}$$

قطاع دایره:

قسمت سطح دایره که توسط دو شعاع و یک قوس احاطه شده باشد را بنام قطاع دایره یاد می کند.

مساحت قطاع دایره از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta$$

مثال: اگر شعاع یک دایره $10cm$ باشد مساحت قطاع دایره را دریابید در صورت که $\theta = 90$ درجه باشد.

حل:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} (10cm)^2 \cdot 90 = 4500cm^2$$

یا از جنس رادیان داریم که

$$S = \frac{1}{2} R^2 \theta = \frac{1}{2} (10cm)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = 25\pi cm^2$$

قطعه دایره:

قسمت از دایره که توسط یک وتر و یک قوس جدا گردد، بنام قطعه دایره یاد می گردد. و مساحت قطعه دایره از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$S_{\text{قطعه}} = \frac{1}{2} R^2 (\theta - \sin \theta)$$