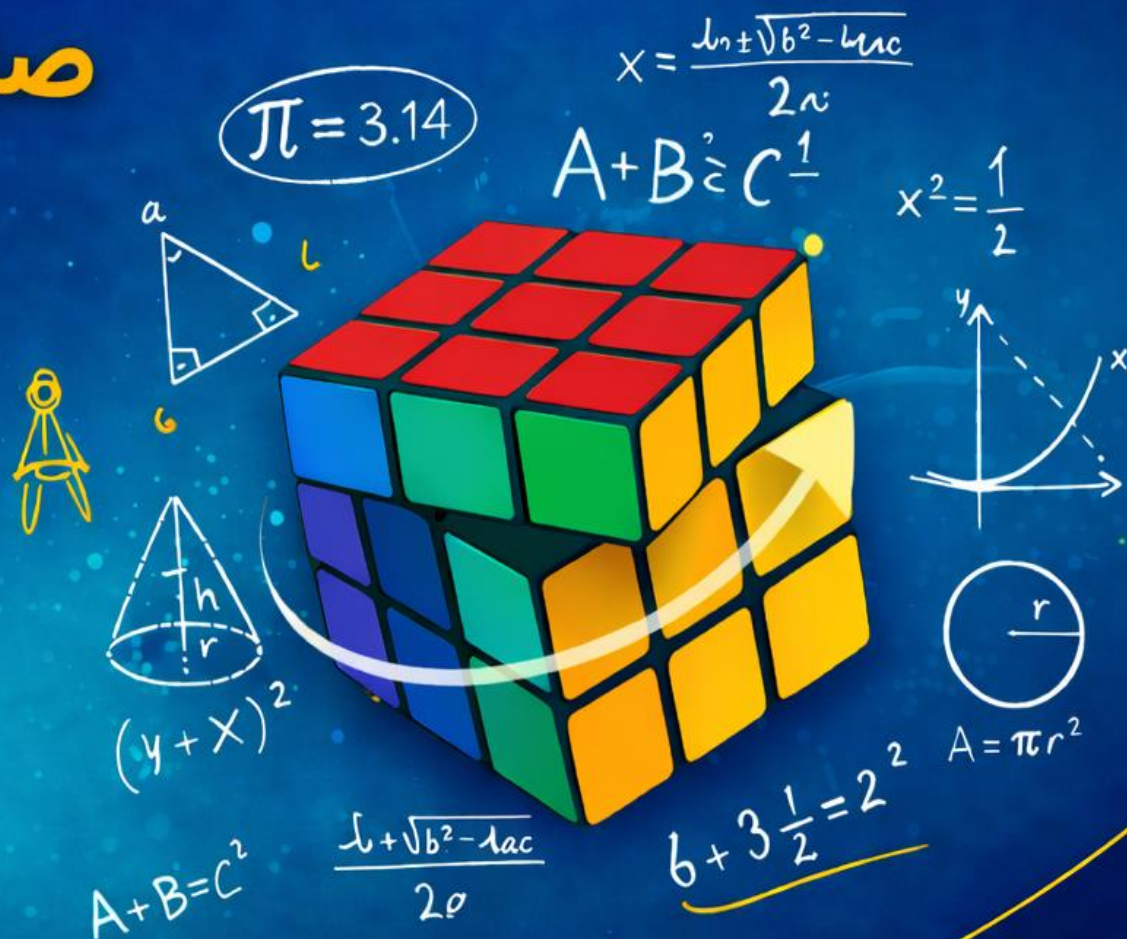




راهنمای آموزشی ریاضی

صنف دوازدهم



راهنمای آموزشی ریاضی صنف دوازدهم

این مجموعه شامل چهارده دوره، همراه با نمونه ها سوالات می باشد

مفاهیم کلیدی درس (مفهوم لمیت)

تعریف لمیت:

مفهوم لمیت به ما می‌گوید که وقتی متحول (مثلاً متغیر x) به یک عدد خاص (مثلاً A) نزدیک می‌شود، تابع y چه رفتاری دارد. به عبارت دیگر، لمیت نشان‌دهنده رفتار تابع در نزدیکی یک نقطه خاص است، حتی اگر آن نقطه تعریف نشده باشد.

مثال ساده از لمیت:

فرض کنید تابعی به نام $y = x^2 - 1$ داریم. اگر x به عدد 2 نزدیک شود، مقدار تابع y به عدد 3 نزدیک می‌شود. به این می‌گوییم که «لمیت تابع $x^2 - 1$ وقتی که x به 2 نزدیک می‌شود، برابر 3 است.»

اما شاید بخواهید بدانید که چطور یک تابع می‌تواند به یک عدد نزدیک شود بدون اینکه در آن نقطه دقیقاً به همان مقدار برسد. اینجاست که مفهوم لمیت وارد می‌شود!

معمای دویدن خرگوش و سنگ‌پُشت

قصه مسابقه خرگوش و سنگ‌پُشت را شاید شنیده باشید. می‌خواهیم آنرا به شکل دیگری بازگو کنیم که به زبان ریاضی نزدیک‌تر باشد. فرض کنید خرگوش، قهرمان دُوش در جنگل با سرعتی بسیار بالا، در حال دویدن به سمت خط پایان مسابقه است. حالا در این مسابقه، سنگ‌پُشت (که یک موجود بسیار کند است) هم حضور دارد. سنگ‌پُشت به‌طور طبیعی خیلی کندتر از خرگوش حرکت می‌کند.

اما داستان جالب اینجاست:

در ابتدا، سنگ‌پُشت چند قدم جلوتر از خرگوش قرار دارد. یعنی وقتی خرگوش شروع به دویدن می‌کند، درست وقتی که به نقطه‌ای که سنگ‌پُشت در لحظه آغاز دویدن او قرار داشته می‌رسد، سنگ‌پُشت که در حال حرکت است در این لحظه در آن نقطه نیست و کمی جلوتر رفته است. پس با وجود آنکه خرگوش به سرعت حرکت می‌کند و قصد دارد به سنگ‌پُشت برسد، اما در این مسابقه عجیب، هر زمان که خرگوش به یک نقطه می‌رسد، سنگ‌پُشت کمی بیشتر جلو می‌رود. به عبارت دیگر، هر وقت خرگوش یک مسافت را طی می‌کند، سنگ‌پُشت هم مقداری جلوتر می‌رود.

این اتفاق به‌طور مداوم ادامه پیدا می‌کند. حالا سوال اینجاست: آیا خرگوش به سنگ‌پُشت می‌رسد یا خیر؟!

پاسخ معما و ارتباط با لمیت:

اگر دقت کنید، این معما نشان می‌دهد که خرگوش هرگز نمی‌تواند به سنگ‌پُشت برسد، حتی اگر سرعت خرگوش بسیار زیاد باشد. چرا؟ چون همیشه وقتی خرگوش به نقطه‌ای می‌رسد، سنگ‌پُشت هم مقداری بیشتر جلو رفته است!

اما نکته‌ی جالب اینجاست که در دنیای واقعی، خرگوش قطعاً به سنگ‌پُشت می‌رسد. چرا؟ چون در هر مرحله، فاصله بین خرگوش و سنگ‌پُشت به‌طور تدریجی کاهش پیدا می‌کند، حتی اگر در ابتدا به نظر برسد که خرگوش نمی‌تواند به او برسد.

مفهوم لمیت:

این معما دقیقاً مفهوم لمیت در ریاضیات را توضیح می‌دهد. در حقیقت، به جای اینکه بگوییم خرگوش به‌طور واقعی به سنگ‌پُشت نمی‌رسد، می‌گوییم که «خرگوش به سمت سنگ‌پُشت می‌دود» و این نزدیکی‌ها با گذر زمان بیشتر می‌شود.

لمیت یعنی اینکه چیزی به یک نقطه نزدیک می‌شود، حتی اگر هرگز دقیقاً به آن نقطه نرسد. در این معما، خرگوش به‌طور مداوم به سمت سنگ‌پُشت نزدیک‌تر می‌شود ولی وقتی که مسافه و زمان را به واحدهای کوچک و کوچکتر تقسیم کنیم، خرگوش هرگز به سنگ‌پُشت نمی‌رسد.

نتیجه‌گیری:

در دنیای واقعی، خرگوش به سنگ‌پُشت می‌رسد، اما در ریاضیات، ما از لمیت استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که هرچه خرگوش به جلو می‌رود، به سنگ‌پُشت نزدیک‌تر می‌شود، حتی اگر در ابتدا فاصله زیادی باشد.

این مثال به ما نشان می‌دهد که لمیت در ریاضیات به‌طور ساده به معنی «تقریب» و یا «نزدیک شدن» به یک نقطه است، ولی هیچ‌وقت دقیقاً به آن نقطه نمی‌رسیم.

چالش شایستگی:

1. اگر فاصله اولیه بین خرگوش و سنگ‌پُشت d_0 باشد و در هر مرحله این فاصله نصف شود، فاصله‌ای که خرگوش باید طی کند تا به سنگ‌پُشت برسد را به صورت یک تابع از تعداد خیزهای خرگوش (تعداد دفعاتی که خرگوش به نقطه قبلی سنگ‌پُشت می‌رسد) بنویسید.

2. زمان لازم برای هر پرش خرگوش را به عنوان تابعی از تعداد پرش‌ها بنویسید. اگر زمان هر پرش به نسبت فاصله‌ای که طی می‌شود کاهش پیدا کند، زمان کلی پرش‌های خرگوش را به صورت یک تابع از تعداد پرش‌ها بیان کنید.
3. چه لمیتی برای این توابع وجود دارد؟ چه زمانی خرگوش می‌تواند به سنگ پُشت برسد؟

معمای پرواز پرنده بین دو موتر:

فرض کنید دو موتر از دو سمت جاده به سمت یکدیگر حرکت می‌کنند و یک پرنده از روی یکی از آن‌ها به روی دیگری می‌پرد و بدون توقف، فوراً به سوی موتر قبلی برمی‌گردد. پرنده این کار را به طور مداوم ادامه می‌دهد در حالیکه موترها به هم نزدیک‌تر می‌شوند، پرنده بی‌وقفه از روی یکی به سوی دیگری می‌پرد و برمی‌گردد، سؤال این است که پرنده چند بار این کار را انجام می‌دهد؟ آیا برای پاسخ به این سوال نیاز به دانستن فاصله دقیق بین دو موتر داریم؟

جواب ساده و مفهوم لمیت:

در این نوع معما، تعداد دفعاتی که پرنده از روی یکی از موترها به روی دیگری می‌پرد، به مفهوم "تقریب" نزدیک می‌شود و لمیت را نشان می‌دهد.

چرا به فاصله نیاز نداریم؟

برای حل این مسئله، نیازی به دانستن دقیق فاصله بین دو موتر نیست، بلکه مفهوم لمیت به ما کمک می‌کند که بفهمیم چگونه پرنده به طور بی‌پایان در حال پریدن از یک موتر به دیگری است، هرچند که هر بار فاصله‌ای که باید ببرد کمتر و کمتر می‌شود.

چطور؟

در ابتدا، پرنده مسافتی طولانی می‌پرد، اما با نزدیک شدن موترها به هم، هر بار که پرنده از یک موتر به دیگری می‌پرد، فاصله کمتر و کمتر می‌شود، اما وقتی ما زمان و مسافت را به واحدهای کوچک و کوچک‌تر تقسیم نمائیم، پرنده دائم در حال رفت و آمد باقی می‌ماند. در ریاضیات، این به این معناست که پرنده هرگز به طور کامل متوقف نمی‌شود، بلکه هر بار کمتر و کمتر پرش می‌کند، ولی در نهایت، به صورت تئوریک، این فرایند به بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند. یعنی تعداد پرش‌ها به سمت بی‌نهایت می‌رود، اما مسافه هر پرواز و زمان پرواز به یک قیمت بسیار بسیار کوچک نزدیک می‌شود.

نتیجه‌گیری:

پرنده به طور نظری تعداد پرش‌های بی‌پایانی انجام می‌دهد، اما چون هر بار که از یک موتر به دیگری می‌پرد، فاصله کمتر و کمتر می‌شود، در عمل پرنده تنها تعداد محدودی پرش انجام می‌دهد که البته در بی‌نهایت به صفر نزدیک می‌شود.

این سوال دقیقاً همان مفهوم لمیت را نشان می‌دهد، که نشان می‌دهد وقتی دو موتر به هم نزدیک می‌شوند (و پرنده از یکی به دیگری می‌پرد)، تعداد دفعاتی که پرنده این کار را انجام می‌دهد به بی‌نهایت نزدیک می‌شود، اما هر پرش فاصله‌ای کمتر از قبل خواهد داشت و در نتیجه فاصله پرواز و نیز زمان پرواز به سمت صفر تقرب می‌کند.

آیا به فاصله بین دو موتر نیاز داریم؟

خیر، برای پاسخ دادن به این سوال از نظر ریاضی و استفاده از مفهوم لمیت، نیازی به دانستن فاصله دقیق بین دو موتر نیست. مهم این است که موترها چه یک کیلومتر فاصله داشته باشند و یا فقط چند متر، فقط زمانی که به یکدیگر بسیار نزدیک می‌شوند و فاصله بین آن‌ها به صفر تقرب می‌کند، در آن زمان است که تعداد پرش‌ها به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

چالش شایستگی:

1. اگر فاصله اولیه بین دو موتر d_0 باشد و در هر مرحله این فاصله نصف شود، فاصله‌ای که پرنده باید طی کند تا بین دو موتر به طور مداوم پرش کند را به صورت یک تابع از تعداد پرش‌ها بنویسید.
2. اگر زمان لازم برای هر پرش پرنده به نسبت فاصله‌ای که طی می‌کند کاهش پیدا کند، زمان کل پرش‌های پرنده را به صورت یک تابع از تعداد پرش‌ها بنویسید.
3. چه لمیتی برای این توابع وجود دارد؟ در نهایت، پرنده به کجا می‌رسد و چه زمانی به طور نظری به طور کامل به پایان می‌رسد؟

درس دوم

هدف کلی درس:

هدف از این درس این است که دانش‌آموزان درک دقیق‌تری از رفتار تابع در نزدیکی یک نقطه خاص به دست آورند و با مفاهیم «لمیت سمت راست»، «لمیت سمت چپ»، «خواص لمیت» و «لمیت توابع نسبی» آشنا شوند تا بتوانند تحلیل دقیق‌تری از تغییرات و رفتار توابع ارائه دهند.

1. مفاهیم کلیدی درس

1.1 لمیت سمت راست و سمت چپ

تعریف:

فرض کنید تابعی به نام $f(x)$ داریم و می‌خواهیم بدانیم وقتی که x به یک عدد خاص مثلاً a نزدیک می‌شود، تابع چه رفتاری دارد.

- لمیت سمت راست: وقتی x از سمت بزرگ‌تر از a به سمت a نزدیک شود، نماد آن:

- $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$
- $\lim_{x \rightarrow 1} [5 \cdot f(x)]$

1.3.3. لمیت توابع نسبی (گویا)

توابع نسبی به شکل زیر هستند:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چندجمله‌ای هستند.

مسائل رایج:

- صورت و مخرج هر دو به صفر میل می‌کنند: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ ایجاد می‌شود.
- باید ساده‌سازی کنیم، تجزیه یا فاکتورگیری کنیم.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

ساده‌سازی:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

حالا لمیت را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 4$$

2. معمای مفهومی

معمای پل متحرک و قطار:

فرض کنید قطاری به سمت یک پل متحرک در حال حرکت است. پل به آرامی باز می‌شود. قطار به نزدیکی پل می‌رسد، ولی هر لحظه که قطار به نقطه‌ای از پل نزدیک می‌شود، آن نقطه در حال بالا رفتن است و دیگر در آن مکان نیست. اما با اینکه پل باز می‌شود، قطار همچنان به حرکت ادامه می‌دهد و به نظر می‌رسد به پل نزدیک‌تر و نزدیک‌تر می‌شود.

لمیت چطور توصیف می‌کند؟

- موقعیت قطار نسبت به پل هر لحظه به یک مقدار خاص نزدیک می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

- لمیت سمت چپ: وقتی x از سمت کوچک‌تر از a به سمت a نزدیک شود، نماد آن:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

نکته مهم: اگر لمیت سمت راست و سمت چپ برابر باشند، می‌گوییم که لمیت کلی در آن نقطه وجود دارد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{اگر تنها و اگر} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

مثال تصویری: در گراف تابعی مانند تابع پله‌ای یا قدم‌مطلق، رفتار تابع از سمت چپ و راست متفاوت است. در این حالت، لمیت ممکن است از دو سمت وجود داشته باشد ولی متفاوت باشد و بنابراین لمیت کلی وجود نداشته باشد.

تمرین عملی: رسم گراف تابعی مانند

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$$

و بررسی اینکه لمیت از سمت راست و چپ در $x = 2$ برابر است یا نه.

1.2. خواص لمیت‌ها

لمیت‌ها مانند عملیات جبری رفتار می‌کنند. یعنی:

1. جمع و تفریق:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

2. ضرب:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

3. تقسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{به شرطی که} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

4. ضریب عددی:

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

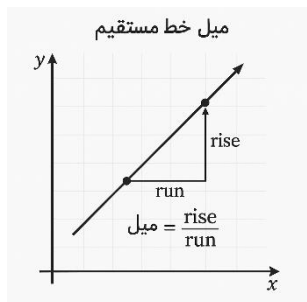
تمرین: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$ باشد، مقادیر زیر را بیابید:

کاربردهای اصلی مشتق عبارت‌اند از - محاسبه سرعت و شتاب در فیزیک - تحلیل روندها در اقتصاد - بهینه سازی مسائل (کمینه/بیشینه کردن توابع) - مدل سازی تغییرات لحظه‌ای در علوم مهندسی و پزشکی
میل یک منحنی:

تعریف: میل عبارت تانجانت زاویه است که گراف یک تابع با محور مثبت x می سازد. اگر گراف تابع یک خط مستقیم باشد میل آن دارای خصوصیات زیر است:

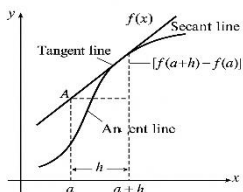
میل آن در تمام نقاط ثابت است

اگر بخواهیم میل خط مستقیم را دریافت کنید از رابطه زیر استفاده می کنیم.



$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

اگر تابع دارای درجه بزرگتر از یک باشد گراف آن شکل خط منحنی را دارا است و میل آن در هر نقطه در اثر تغییر مسیر منحنی، تغییر می نماید بنا آن میل آن را در هر نقطه باید مطالعه کنیم. برای دریافت میل در هر نقطه یک مماس بالای منحنی در همان نقطه ترسیم نموده که میل منحنی در یک نقطه در حقیقت مساوی با میل مماس بالای منحنی در همان نقطه می باشد.



$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

جهت وضاحت بیشتر مثال زیر را در نظر می گیریم:

مثال 1: میل منحنی $y = x^2$ را دریافت نموده و آنرا در $x = 3$ محاسبه نمایید.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) \\ &= 2x + 0 \end{aligned}$$

$$= 2x \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

- از یک سو می توان گفت قطار به «لمیت موقعیت بسته شدن پل» نزدیک می شود.
- اما از سوی دیگر، پل هر لحظه کمی بیشتر باز می شود و قطار به موقعیتی که وجود خارجی ندارد نزدیک می شود.

لمیت یک تابع نسبی و جهت دار:

اگر تابع

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

را در نظر بگیریم، بررسی کنید:

- لمیت سمت راست $x \rightarrow 3^+$
- لمیت سمت چپ $x \rightarrow 3^-$
- لمیت کلی در $x = 3$

پاسخ: تابع را ساده می کنیم:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3 \quad (x \neq 3)$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

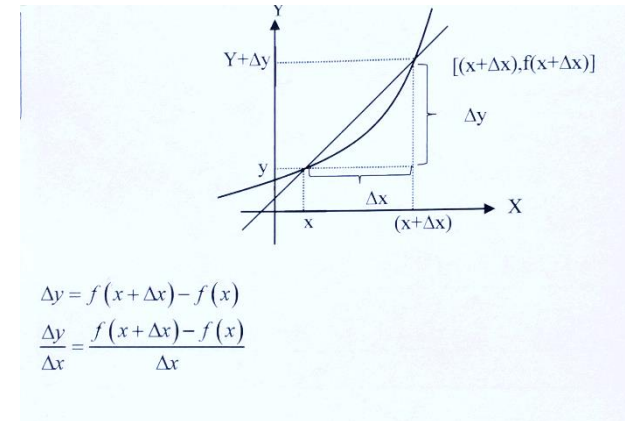
خلاصه درس

در این درس، دانش آموزان:

- تفاوت بین لمیت سمت راست و چپ را یاد می گیرند.
 - خواص پایه ای لمیت ها را به صورت عملی تمرین می کنند.
 - با تحلیل توابع نسبی، مهارت ساده سازی و یافتن لمیت را به دست می آورند.
 - از طریق معماها و مثال های جذاب، مفهوم نزدیکی و تقریب در لمیت را عمیق تر درک می کنند. (مشتقات، مشتق یک تابع، تعبیر هندسی مشتق، قوانین مشتق)
- هدف کلی درس:**

در اینجا یک توضیح کامل و خلاصه از مفاهیم اصلی مرتبط با مشتق در ریاضیات آمده است مشتقات اصلی مشتق گرفتن، بررسی و تحلیل (نرخ تغییرات) یک تابع است. به عبارت دیگر، مشتق به ما می گوید که یک تابع چگونه و با چه سرعتی تغییر می کند.

تغییرات متوسط تابع: هرگاه تغییرات تابع را در هر واحد تغییرات متحول محاسبه نماییم تغییر متوسطه تابع حاصل می شود و یا تغییرات تابع در فی واحد تغییر متحول ، تغییر متوسطه تابع می نامیده می شود



مشتق یک تابع:
 برای مشتق یک تابع دو نوع تعریف ارایه می کنیم:
تعریف الجبری مشتق: تزايد لحظه ای تابع را مشتق می نامند و یا مشتق عبارت از لیمت نسبت تغییرات تابع و تغییرات متحول بوده زمانی که تغییرات متحول به صفر تقرب نماید.

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

جهت وضاحت بیشتر مثال زیر را در نظر می گیریم.
 مثال: مشتق تابع $f(x) = 2x$ را دریابید.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

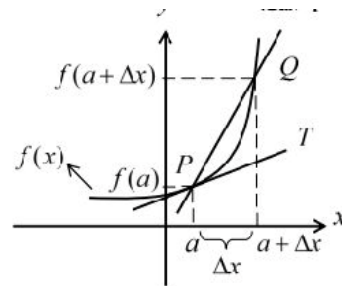
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(x + \Delta x) - 2x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + 2\Delta x - 2x}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

تعریف هندسی مشتق: مشتق عبارت از میل مماس در نقطه تماس بالای منحنی می باشد.
 در گراف تابع $f(x)$ اگر نقاط $p(a, f(a))$ و نقطه $Q((a + \Delta x), f(a + \Delta x))$ دو نقطه روی گراف باشند میل خط عبور کننده از دو نقطه P و Q از رابطه زیر بدست می آید.

$$m_{PQ} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{(a + \Delta x) - a} \Rightarrow m_{PQ} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

اگر نقطه Q به سمت نقطه P میل کند ($Q \rightarrow P \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$) در این صورت مستقیم قاطع PQ به خط مماس T بر منحنی گراف در نقطه P تبدیل می شود که میل این خط مماس همان مشتق تابع در نقطه P است

$$m = f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



مثال:

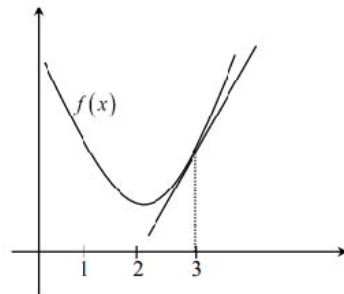
$$f(x) = x^2 + 4x$$

$$f'(x) = 2x + 4$$

$$f'(3) = 10$$

$$f'(-3) = -2$$

$$f'(4) = 12$$



قوانین مشتقات:

$$y = 3 \Rightarrow \dot{y} = 0$$

$$y = 7x \Rightarrow \dot{y} = 7$$

$$y = 2x^3 \Rightarrow \dot{y} = 6x^2$$

$$y = 3x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \dot{y} = 6x - 5$$

$$y = (2x^2)(4x) \Rightarrow \dot{y} = 4x \cdot 4x + 4 \cdot 2x^2 = 16x^2 + 8x^2$$

$$y = m \cdot 4x \Rightarrow \dot{y} = 4m$$

ساده ولی اثبات آن کمی پیچیده می باشد. فرض کنیم f و g دوتابع باشند، بطوریکه f در g و $f(x)$ ، یعنی مقدار f در x ، مشتق پذیر باشد. بزودی نشان می دهیم که تابع مرکب $g(f(x))$ نیز در x مشتق پذیر بوده و دارای مشتق

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x) (I)$$

می باشد که در آن پریم مشتق نسبت به شناسه تابع را نشان می دهد، مثلاً هرگاه $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ، آنگاه $g(f(x)) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ به علاوه، برای f هر x مشتق پذیر است حال آنکه g برای هر $x > 0$ و در نتیجه برای هر قیمت از f زیرا $1 \geq x^2 + 1$ مشتق پذیر می باشد، در این حالت $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ و $f'(x) = 2x$ ، در نتیجه قاعده زنجیره ای (I) شکل زیر را بخود میگیرد.

1) $y = a$	$y' = 0$
2) $y = ax$	$y' = a$
3) $y = ax^n$	$y' = a \cdot nx^{n-1}$
4) $y = u + v + \dots$	$y' = u' + v'$
5) $y = u \times v$	$y' = u' \cdot v + v' \cdot u$
6) $y = au$	$y' = a \cdot u'$
7) $y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$
8) $y = \frac{a}{u}$	$y' = \frac{-a \cdot u'}{u^2}$
9) $y = \frac{a}{u}$	
10) $y = au^m$	$y' = m \cdot a \cdot u' \cdot u^{m-1}$
11) $y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
12) $y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{n \cdot u'}{m \sqrt[m]{u^{m-n}}}$

$$\frac{d}{dx} (\sqrt[3]{x^2 + 1}) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$$

قضیه 2 (قاعده زنجیره ای). فرض کنیم f در g و $f(x)$ در g مشتق پذیر باشد، در این صورت تابع مرکب $f \circ g$ در x مشتق پذیر است و مشتقش از رابطه ذیل بدست می آید.

$$y = \frac{3x^2}{4x} \Rightarrow y' = \frac{6x \cdot 4x - 4 \cdot 3x^2}{16x^2} = \frac{12x^2}{16x^2}$$

$$y = \frac{2x^2}{8} \Rightarrow y' = \frac{4x}{8}$$

$$y = \frac{3}{5x} \Rightarrow y' = \frac{-15}{25x^2}$$

$$y = 3 \cdot 2x^2 \Rightarrow y' = 2 \cdot 3 \cdot 4x \cdot 2x = 48x^2$$

$$y = \sqrt{2x} \Rightarrow y' = \frac{2}{2\sqrt{2x}}$$

$$y = \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow y' = \frac{3 \cdot 3x^2}{5 \sqrt[5]{x^{5-3}}} = \frac{9x^2}{5 \sqrt[5]{x^2}}$$

قضیه 1. مشتق تابع جذری درجه دوم مساوی است به مشتق تابع مجذور بر دو چند همان تابع

$$y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

جذری در مخرج یعنی

ثبوت.

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} \right)$$

میدانیم که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ است، بنا بر این $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$ می باشد، فلذا $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

$$y' = u' \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال 1. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{6x^2 - 7x}$ در $x = 3$ محاسبه کنید.

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 7x)'}{2\sqrt{6x^2 - 7x}} = \frac{12x - 7}{2\sqrt{6x^2 - 7x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{29}{2\sqrt{54 - 21}} = \frac{29}{2\sqrt{33}} \quad \text{حل-}$$

مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره ای

هیچیک از قواعد مشتقگیری که تاکنون ثابت شده اند طرز مشتقگیری از توابع مرکب نظیر $\sqrt[3]{x^2 + 1}$ و یا $\sin(\sin x)$ را به ما نمی گوید، لذا اینک به اثبات قاعده دیگری می پردازیم که مشتق تابع مرکب را بر حسب مشتقات توابع مؤلفه آن بیان می کند، قاعده زنجیره ای موسوم است، به قدر کافی

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

در صورتیکه تابع مرکب از سه تابع تشکیل شده باشد، پس مشتق آن مساوی است به

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x \vee (g(f(h(x))))' = g'(f(h(x))) \cdot f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

مثال 1. مشتق تابع $y = \sqrt{x^5 - 6x + 7}$ را دریابید.

حل- در اینجا $u = x^5 - 6x + 7$ و $y = \sqrt{u}$ است، پس $u'_x = 5x^4 - 6$ پس می نویسیم که

$$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{(5x^4 - 6)}{2\sqrt{x^5 - 6x + 7}}$$

مثال 2. مشتق $y' = 5(x^2 - 4x)^4 \cdot (2x - 4) \Rightarrow y'(2) = 5 \cdot (0) \cdot (4 - 8)^4 = 0$ تابع $y = (x^2 - 4x)^5$ را در $x = 2$ دریابید.

حل-

قضیه 7. مشتق تابع $y = \sqrt[m]{u^n}$ مساوی است به:

$$y' = \frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

ثبوت. ابتدا تابع مذکور را به شکل تابع طاقه دارنوشته و نظر به قاعده زنجیره ای مشتق می گیریم،

$$y = u^{\frac{n}{m}} \Rightarrow y' = \frac{n}{m} u^{\frac{n}{m}-1} \cdot u' = \frac{u'n}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

یعنی

مثال 1. مشتق تابع $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 4)^2}$ را در $x = 3$ دریابید.

$$y' = \frac{2 \cdot (x^2 - 4)'}{5\sqrt[5]{(x^2 - 4)^{5-2}}} = \frac{2 \cdot 2x}{5\sqrt[5]{(x^2 - 4)^3}} \Rightarrow f'(3) = \frac{12}{5\sqrt[5]{125}}$$

مثال 2. مشتق تابع $y = \sqrt[6]{10x^2 - 8}$ را دریابید.

$$y' = \frac{(10x^2 - 8)'}{6\sqrt[6]{(10x^2 - 8)^{6-1}}} = \frac{20x}{6\sqrt[6]{(10x^2 - 8)^5}} = \frac{10x}{3\sqrt[6]{(10x^2 - 8)^5}}$$

حل-

مثال 3. مشتق تابع $f(x) = \frac{-5}{\sqrt{2x+5}}$ را در $x = 2$ محاسبه کنید.

حل-

$$f'(x) = \frac{5 \cdot (\sqrt{2x+5})'}{(\sqrt{2x+5})^2} = \frac{5}{\sqrt{2x+5}} \cdot \frac{1}{2x+5} = \frac{5}{(2x+5)\sqrt{2x+5}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{27}$$

مشتقات توابع مثلثاتی

1. مشتق تابع $y = \sin x$ مساوی به $y' = \cos x$ است.

ثبوت. با در نظر داشت تحلیل الجبری مشتق داریم

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \Rightarrow \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

حالا با استفاده از فرمول $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ داریم که

$$\frac{d}{dx} (g \circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) (I)$$

ثبوت (اختیاری). چون $y = f(x)$ در $y = f(x)$ مشتق پذیر است، داریم

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y} = g'(y) \vee \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta y}$$

$$= g'(y) + \varepsilon(\Delta y) (II)$$

که در آن $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$ بنا به (وقتی که $f(x) \rightarrow L, x \rightarrow a$ اگر فقط اگر $f(x) = L +$

$e(x)$ ، که در آن وقتی $e(x) \rightarrow 0, x \rightarrow a$) با ضرب رابطه (II) در Δy درمیابیم

$$g(y + \Delta y) - g(y) = [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \Delta y (III)$$

مهم است توجه کنیم که اگرچه (II) با فرض $\Delta y \neq 0$ نوشته شده است، فرمول (III) حاصل از (II)

برای $\Delta y \neq 0$ ، حتی در صورت $\Delta y = 0$ نیز درست است، زیرا افزایش $g(y + \Delta y) - g(y)$ صرف نظرازانتخاب $\varepsilon(0)$ ، برای $\Delta y = 0$ صفر است. تا ب حال $\varepsilon(\Delta y)$ فقط برای $\Delta y \neq 0$ تعریف شده است، ولی اکنون قلمرو $\varepsilon(\Delta y)$ را با فرض $\varepsilon(0) = 0$ وسیع ساخته $\varepsilon(\Delta y)$ را در $\Delta y = 0$ پیوسته می سازیم. حال (III) را به Δx یعنی نمو متحول مستقل، تقسیم کرده و لیمت آن را وقتی $\Delta x \rightarrow 0$ می گیریم. این کار نتیجه می دهد که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g'(y) + \varepsilon(\Delta y)] \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} (IV)$$

که در آن

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) (V)$$

تزايد متحول مستقل y است. به علاوه، چون f در x مشتق پذیر است و لذا در x پیوسته است $\Delta x \rightarrow 0$ ایجاب می کند که $\Delta y \rightarrow 0$ در نتیجه

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = 0 (VI)$$

این امر که $\varepsilon(0) = 0$ و در نتیجه $\varepsilon(\Delta y) = 0$ در $\Delta y = 0$ پیوسته است در این نتیجه گیری اهمیت دارد

زیرا برقراری $\Delta y \neq 0$ را نمی توان تضمین کرد (به یاد آورید که Δy دلخواه نیست بلکه با مقدار Δx معین می شود) از روابط (IV) تا (VI) نتیجه می شود که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(y + \Delta y) - g(y)}{\Delta x} = g'(y) \cdot f'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x + \Delta x)) - g(f(x))}{\Delta x} = g'(f(x)) \cdot f'(x) (VII)$$

زیرا $y = f(x)$ و $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ حال ثبوت قاعده زنجیره ای (I) یا (II) کامل است،

زیرا لیمت (VII) چیزی جز مشتق تابع مرکب $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ نیست. [1]

اگر $f(x) = u$ و $g(f(x)) = y$ فرض کنیم پس مشتق تابع مرکب را می نویسیم

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \text{ثبوت.}$$

4- مشتق تابع $y = \cot x$ مساوی است به: $y' = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(-\sin x) \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x \quad \text{ثبوت.}$$

5- مشتق تابع $y = \sec x$ مساوی است به: $y' = \sec x \cdot \tan x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$$y = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{(-1) \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \text{ثبوت.}$$

6- مشتق تابع $y = \csc x$ مساوی است به: $y' = \csc x \cdot \cot x = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$$y = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(-1) \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad \text{ثبوت.}$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتقات توابع مرکب مثلثاتی را قرار ذیل داریم. [2]

اهداف آموزشی

در ختم این درس شاگردان قادر گردد تا

✓ در مورد مشتقات مرتبه بلند آشنایی حاصل کنند.

✓ سوالات مربوط به مشتقات مرتبه بلند حل بتوانند.

✓ به روش های حل سوال های مشتقات مرتبه بلند آشنا شوند.

عنوان 1: مشتقات مرتبه بلند

صفحه: 77

تعریف: اگر از معادله یک تابع نظر یک متحول چندین مرتبه مشتق گرفته شود، آنرا مشتق مرتبه بلند می نامند. طوریکه مشتق اول را به y' مشتق دوم را به y'' مشتق سوم را به y''' مشتق چهارم را به $y^{(4)}$ و مشتق پنجم را به $y^{(5)}$... نشان می دهد.

نکته: هرگاه تابع چند جمله ای $f_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$ داده شده باشد مشتق n -ام آن قرار ذیل دریافت می گردد.

$$f_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_nx^n$$

$$f_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \dots c_n = n! c_n$$

مثال اول: مشتق پنج تابع $y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$ را دریافت نمایید.

حل: از تابع فوق نظر به متحول x پنج مرتبه مشتق می گیریم.

$$y = 2x^6 - 3x^5 - 2x^3 - 3x^2 - 1$$

$$y' = 12x^5 - 15x^4 - 6x^2 - 6x$$

$$y'' = 60x^4 - 60x^3 - 12x - 6$$

$$y''' = 240x^3 - 180x^2 - 12$$

$$y^{(4)} = 720x^2 - 360x$$

$$\Delta y = 2 \sin \left(\frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} \right) \cdot \cos \left(\frac{x + \Delta x + x}{2} \right) = \frac{\sin \frac{\Delta x}{x} \cdot \cos \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right)$$

نظریه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ داریم که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ پس: $y' = 1 \cdot \cos \left(1 + \frac{0}{2} \right) = \cos x$

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 \sin \frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin \frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\sin \left(1 + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \Rightarrow y' = -\sin x \cdot 1$$

$$= -\sin x$$

2- مشتق تابع $y = \cos x$ مساوی است به $y' = -\sin x$ ثبوت. طبق معمول به ثبوت می رسانیم

3- مشتق تابع $y = \tan x$ مساوی است به: $y' = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$$1. y = \sin u \Rightarrow y' = \cos u \cdot u'$$

$$2. y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \sin^{n-1} u \cdot \cos u \cdot u'$$

$$3. y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u \cdot u'$$

$$4. y = \cos^n u \Rightarrow y' = -n \cos^{n-1} u \cdot \sin u \cdot u'$$

$$5. y = \tan u \Rightarrow y' = \sec^2 u \cdot u'$$

$$6. y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \tan^{n-1} u \cdot \sec^2 u \cdot u'$$

$$7. y = \cot u \Rightarrow y' = -\csc^2 u \cdot u'$$

$$8. y = \cot^n u \Rightarrow y' = n \cot^{n-1} u \cdot \csc^2 u \cdot u'$$

$$9. y = \sec u \Rightarrow y' = \sec u \cdot \tan u \cdot u'$$

$$10. y = \sec^n u \Rightarrow y' = n \sec^{n-1} u \cdot \tan u \cdot u'$$

$$11. y = \csc u \Rightarrow y' = -\csc u \cdot \cot u \cdot u'$$

$$12. y = \csc^n u \Rightarrow y' = -n \csc^{n-1} u \cdot \csc u \cdot \cot u \cdot u'$$

$$y = 4x - 2$$

$$y' = 4 > 0$$

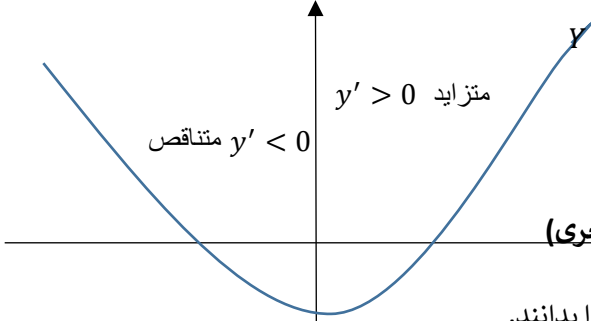
چون مشتق اول تابع بزرگ از صفر است، پس تابع متزاید است.

مثال دوم: نظر به گراف تابع $y = x^2$ نشان دهید که در انتروال متزاید و در کدام انتروال متناقص است؟

حل: با در نظر داشت مشتق اول و گراف تابع انتروال تزاید و تناقص آن را می توان قرار ذیل دریافت نمود.

$$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$$

$$y' = 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \rightarrow \text{متزاید } (0, +\infty) \\ 2x < 0 \Rightarrow x < 0 \rightarrow \text{متناقص } (-\infty, 0) \end{cases}$$



عنوان 3: نقاط بحرانی تابع (اعظمی و اصغری)

اهداف آموزشی (دانشی، مهارتی و ذهنیتی)

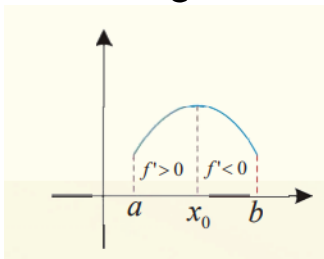
شاگردان مفهوم نقاط بحرانی یک تابع را بدانند.

شاگردان نقاط اعظمی و اصغری یک تابع را دریافت کرده بتوانند.

شاگردان از حل سوالات مربوط به دریافت نقاط بحرانی تابع احساس خوشی نمایند.

تعریف: نقاط بحرانی تابع عبارت از نقاط اند که تابع در آن تحول داشته باشد. که بیشتر در گراف توابع متصور است، نقاط بحرانی تابع شامل (نقاط اعظمی، نقاط اصغری، نقاط انعطاف) می باشد. که هر کدام را با ذکر مثال به بحث می گیریم.

❖ نقطه اعظمی: هر گاه یک تابع $y = f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از حالت تزاید به حالت تناقص تبدیل می شود یا به عباره دیگر اشاره مشتق در همین نقطه معین x_0 از مثبت به منفی تبدیل گردد، نقطه معین x_0 را نقطه اعظمی تابع می نامند.



$$y^{(5)} = 1440x - 360$$

مثال دوم: مشتق هفتم تابع $y = \sin x$ را دریافت نمائید.
حل: در تابع فوق هفت مرتبه نظر به متحول x مشتق می گیریم.

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y'' = -\sin x$$

$$y''' = -\cos x$$

$$y^{(4)} = \sin x$$

$$y^{(5)} = \cos x$$

$$y^{(6)} = -\sin x$$

$$y^{(7)} = -\cos x$$

فعالیت:

1. فورمول دریافت مشتق مرتبه بلند را ساده سازید.

2. مشتق سوم تابع $y = 3\tan x$ را دریافت نمائید.

تمرین:

1. مشتق ششم تابع $y = 4x^7 - 7x^5 + 2x$ را دریافت نمائید.

2. مشتق سوم تابع $y = 12x^3 - 2\cos x$ را دریافت نمائید.

عنوان 2: موارد استعمال مشتق

صفحه: 85

اهداف:

- شاگردان مفهوم، کاربرد و استعمال مشتق را بدانند.
- شاگردان عملاً مشتق را بکار برده و سوالات مربوط به آن را حل کرده بتوانند.
- شاگردان از کاربرد عملی مشتق در زندگی روزمره احساس خوشی نمایند.

تحولات تابع:

1. تابع متزاید: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر در انتروال داده شده $f'(x) > 0$ (مشتق اول تابع مثبت باشد)، درین صورت تابع در همان انتروال متزاید است.

2. تابع متناقص: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی و در انتروال (a, b) مشتق پذیر باشد، اگر در انتروال داده شده $f'(x) < 0$ (مشتق اول تابع منفی باشد)، درین صورت تابع در همان انتروال متناقص است.

مثال اول: تابع $y = 4x - 2$ متزاید است یا متناقص.

حل: از تابع فوق نظر به متحول x یک مرتبه مشتق می گیریم، در صورت مشتق اول تابع بزرگ از صفر گردد تابع متزاید است و اگر کوچک از صفر گردد متناقص است.

$$\Rightarrow 3x(x-2) - 1(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(3x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ 3x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

پس تابع دارای دو نقطه بحرانی اند این نقاط عبارت از $(2, -2)$ و $(\frac{1}{3}, \frac{17}{54})$ است. برای تعیین نقاط اعظمی و اصغری از جدول تعیین اشاره استفاده می کنیم.

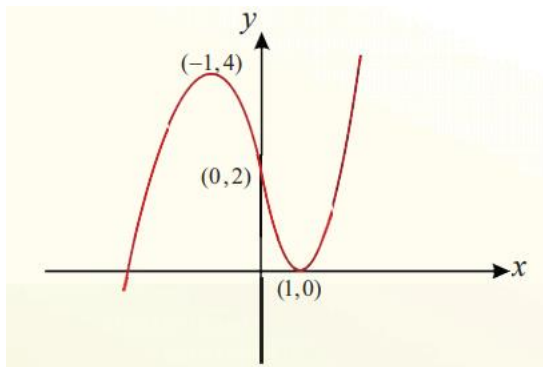
$f'(x) = 0$	x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$	
$3x-1=0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$	$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$x-2=0 \Rightarrow x_2 = 2$	$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$	-2	-2	$+\infty$	
			Max		Min		

مثال دوم: نقطه بحرانی را در جدول تعیین اشاره استفاده می کنیم. ترسیم نمائید.

حل: برای دریافت نقاط اعظمی و اصغری مشتق اول را دریافت نموده و مساوی به صفر قرار میدهیم.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

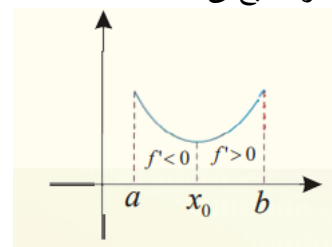
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



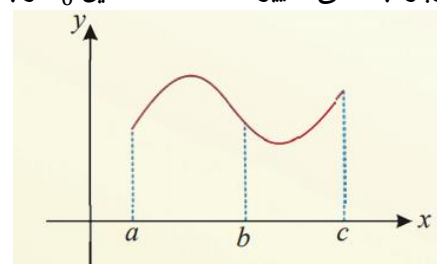
فعالیت ها: باهم صنفی/همصنفی ها یک گروه ایجاد نموده و فعالیت های ذیل را انجام دهند.

- نقاط بحرانی چیست؟
- نقطه اعظمی مطلق و اصغری مطلق را از روی گراف تشخیص کنند.
- نقش گراف ها در ریاضی چیست؟

❖ نقطه اصغری: هرگاه یک تابع $y = f(x)$ در یک نقطه معین x_0 از حالت تناقص به حالت نزاید تبدیل می شود یا به عباره دیگر اشاره مشتق در همین نقطه معین x_0 از منفی به مثبت تبدیل گردد، نقطه معین x_0 را نقطه اصغری تابع می نامند.



❖ نقطه انعطاف: هرگاه مشتق اشاره خود را در یک نقطه معین x_0 از مثبت به صفر و دوباره به مثبت یا از منفی به صفر و دوباره به منفی تغییر دهد، نقطه معین x_0 را بنام نقطه انعطاف می نامند.



در شکل فوق نقطه b عبارت از نقطه انعطاف تابع است. نکات:

- مشتق اول تابع در نقاط بحرانی برابر با صفر است.
 - برای دریافت نقاط بحرانی تابع مشتق اول آنرا گرفته برابر با صفر قرار می دهیم.
 - مشتق دوم تابع در نقاط انعطاف برابر با صفر است.
 - برای دریافت نقاط انعطاف مشتق دوم تابع را گرفته برابر با صفر قرار می دهیم (نقطه انعطاف تابع یک بحث جداگانه اند که در درس بعدی خواهیم خواند)
- مثال اول: نقاط بحرانی تابع $y = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ را دریافت نمائید.
- حل: برای دریافت نقاط بحرانی مشتق اول تابع را میگیرم و آنرا برابر با صفر قرار می دهیم. نقاط بحرانی تابع دریافت می گردد.

$$y' = 3x^2 - 7x + 2$$

برای دریافت نقاط بحرانی مشتق برابر با صفر قرار داده می شود.

$$3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - x + 2$$

• آیا گراف های توابع کاربرد در زندگی روزمره دارد؟

عنوان: نقطه انعطاف توابع

صفحه: 97

اهداف آموزشی

- شاگردان مفهوم نقطه انعطاف را بدانند.
- شاگردان نقطه انعطاف را مشخص و تعیین کرده بتوانند.
- شاگردان نقطه انعطاف توابع را دریافت کرده بتوانند.
- شاگردان سوالهای مربوط به نقطه انعطاف را حل کرده بتوانند.

تعریف: نقطه که در آن منحنی جهت خود را تغییر می دهد، یعنی از معقریت به محدبیت و برعکس تبدیل شود، آنرا نقطه انعطاف می نامند.

برای دریافت نقطه انعطاف تابع مشتق دوم آنرا گرفته و برابر با صفر قرار میدهیم.

مثال: نقاط انعطاف تابع $f(x) = x^5 - 5x^3$ را دریافت نمائید.

حل: برای دریافت نقاط انعطاف یک تابع مشتق دوم آنرا برابر با صفر قرار میدهیم.

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 - 30x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 20x^3 - 30x = 0$$

$$10x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$10x(2x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

پس تابع فوق در نقاط $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ و $x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}}$ ، $x_1 = 0$ انعطاف دارد.

ترسیم منحنی ها

گراف توابع درجه دوم

صفحه: 101

توابع درجه دوم بنام توابع پارابولیک نیز یاد می شود، زیرا گراف این توابع یک پارابول عمودی است. برای ترسیم گراف توابع درجه دوم، نقاط ذیل را در نظر می گیریم.

1. تحولات تابع را بررسی می نمائیم.

برای تعیین نقاط بحرانی مشتق اول را برابر صفر قرار می دهیم و برای تعیین نقطه انعطاف مشتق دوم را برابر با صفر قرار می دهیم.

تابع درجه دوم دارای یک نقطه بحرانی (اعظمی یا اصغری) اند، اگر تابع به شکل

$f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، و نقطه بحرانی از رابطه $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ دریافت می گردد.

در رابطه بالا اگر $a > 0$ باشد نقطه اصغری و اگر $a < 0$ نقطه اعظمی است.

2. تقاطع با محورات: برای دانستن تقاطع با محور افقی $y = 0$ قرار میدهیم و برای داشتن تقاطع با محور عمودی $x = 0$ قرار میدهیم.

3. دریافت محور تناظر: برای دریافت محور تناظر مشتق اول را برابر با صفر قرار میدهیم، محور تناظر توابع درجه دوم $x = -\frac{b}{2a}$ است.

مثال: تحولات تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را مطالعه و گراف آنرا ترسیم کنید.
حل:

1. ناحیه تعریف تابع تمام اعداد حقیقی اند. یعنی $D_f = (-\infty, +\infty)$

2. تقاطع با محورات:

تقاطع با محور y :

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \rightarrow (0,3), y \text{ با } x \text{ تقاطع}$$

تقاطع با x :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 3x + 3 = x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow (1,0), x \text{ با } x \text{ تقاطع} \\ x = 3 \rightarrow (3,0), x \text{ با } x \text{ تقاطع} \end{cases}$$

3. نقاط بحرانی: مشتق اول را برابر با صفر قرار میدهیم.

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \rightarrow \min(2, -1)$$

$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

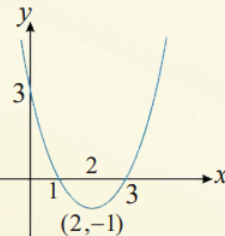
$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \Rightarrow V(2, -1) \min$$

$$x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [x^2 - 4x + 3] = +\infty$$

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
y	$-\infty \searrow$	$3 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty \nearrow$

Min



فعالیت ها:

1. نقطه انعطاف تابع $y = x^3 - 2x + 7$ تعیین کنید.

2. تحولات تابع $f(x) = -x^2 + 2x$ را تعیین و گراف آن را ترسیم کنید.

مجانب های گراف یک تابع:

صفحه: 105

تعریف: مجانب ها عبارت از خطوط مستقیم اند که حیثیت راهنمای توابع را دارد، مجانب های توابع سه نوع اند.

الف) مجانب عمودی: در تابع $y = f(x)$ وقتی مجانب عمودی وجود می آید که اگر $x \rightarrow a$ $y \rightarrow \pm\infty$ می کند، یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ می گردد. در توابع کسری برای دریافت مجانب عمودی مخرج تابع را مساوی به صفر قرار میدهیم.

ب) مجانب مایل: در تابع کسری $y = f(x)$ هرگاه درجه معادله صورت یک واحد کمتر از درجه معادله مخرج باشد، تابع دارای مجانب مایل است. و برای دریافت مجانب مایل صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم که معادله خطی $y = ax + b$: $a \neq 0$ است.

ج) مجانب افقی: یک تابع زمان مجانب افقی دارد که اگر $x \rightarrow \infty$ درین صورت $y \rightarrow c$ می کند، یعنی $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$ گردد.

مثال: مجانب های تابع $y = \frac{x+1}{2x-4}$ را دریافت نمائید.

حل: تابع متذکره دارای مجانب های عمودی و افقی اند.
مجانب عمودی: مخرج را برابر با صفر قرار می دهیم

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ مجانب عمودی}}$$

مجانب افقی: نسبت ضریب حدود هم درجه صورت و مخرج تابع است.

$$y = \frac{x+1}{2x-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} \text{ مجانب افقی}}$$

مثال 2: مجانب های تابع $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ را دریافت نمائید.

حل: تابع متذکره دارای مجانب های مایل و عمودی اند.
مجانب مایل: صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 \Rightarrow \boxed{y = x + 2 \text{ مجانب مایل}}$$

مجانب عمودی: مخرج برابر با صفر قرار داده می شود.

$$\boxed{x = 0 \text{ مجانب عمودی}}$$

گراف توابع هوموگرافیک:

اهداف آموزشی:

- شاگردان مجانب های توابع را دریافت کرده بتوانند.
- شاگردان تقاطع گراف را محور های افقی و عمودی دریافت کرده بتوانند.
- شاگردان از توابع هوموگرافیک در زندگی روزمره استفاده کرده بتوانند.

تعریف: توابع که شکل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را داشته باشند بنام توابع هوموگرافیک یاد می شود.

مثال: تحولات تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ را مطالعه و گراف آنرا ترسیم کنید.

حل: در ابتداء مجانب های تابع را دریافت می نمائیم.

مجانب افقی تابع: نسبت ضریب حدود هم درجه تابع است. یعنی: $y = 2$

مجانب عمودی تابع: مخرج تابع را برابر با صفر قرار میدهیم. یعنی $x = 3$

تقاطع با محورات:

برای تقاطع با محور x ، $y = 0$ قرار میدهیم.

$$y = 0 \Rightarrow \frac{2x-1}{x-3} = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right), \text{ تقاطع با } x$$

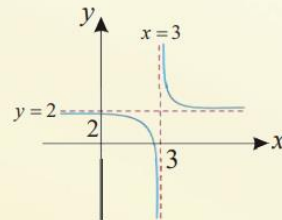
برای تقاطع با محور y ، $x = 0$ قرار میدهیم.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \rightarrow \left(0, \frac{1}{3}\right), \text{ تقاطع با } y$$

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - (2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2} < 0$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-3)^2 - (-5) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	$-\infty$	تعیین نشده	$+\infty$



فعالیت ها:

- تحولات تابع $f(x) = 4x^2 - 6x + 2$ را بررسی و گراف آنرا ترسیم کنید.
- تحولات تابع $f(x) = x^2 + 3x - 9$ را بررسی و گراف آن را ترسیم کنید.
- مجانب های تابع $f(x) = \frac{3x-5}{x-4}$ را دریافت نمائید.
- مجانب های تابع $f(x) = \frac{2x^2-11x}{3x+2}$ را دریافت نمائید.

عنوان: گراف تابع یک مجهوله درجه سوم

صفحه: 113

اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان:

- گراف توابع درجه سوم را ترسیم کرده بتوانند.

$$I(x_c, y_c) = \left(\frac{x_{max} + x_{min}}{2}, \frac{y_{max} + y_{min}}{2} \right)$$

4. نقطه تناظر تابع درجه سوم عبارت اند از $x = -\frac{b}{3a}$

مثال: تحولات تابع $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تحقیق و گراف آنرا ترسیم کنید.

حل: ابتداء مشتق اول تابع را دریافت نموده نقاط اعظمی و اصغری تابع را تعیین می کنیم.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 6x = 0$$

$$-3x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \text{اصغری}(0,0) \\ x = 2 & \rightarrow \text{اعظمی}(2,4) \end{cases}$$

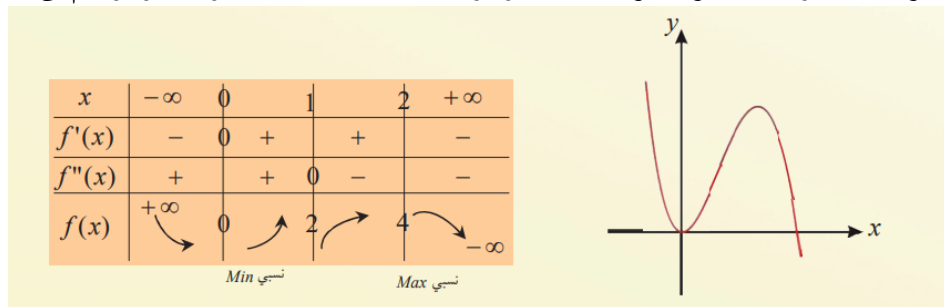
برای دریافت نقاط انعطاف مشتق دوم را دریافت نموده مساوی به صفر قرار میدهیم.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6x \rightarrow f''(x) = -6x + 6$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -6x + 6 = 0 \Rightarrow -6x = -6 \Rightarrow x = 1$$

\rightarrow انعطاف $In(1, 2)$

اکنون با در نظر داشت موارد فوق و با در نظر گرفتن جدول تعیین اشاره گراف آنرا ترسیم می کنیم.



فعالیت ها:

• گراف تابع درجه سوم $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ را ترسیم کنید.

• مرکز تناظر تابع $y = 3x^3 - 4x + 3$ را تعیین کنید.

• تحولات تابع $f(x) = -(x-1)^3$ را بررسی نموده گراف آنرا ترسیم کنید.

قضیه رول

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ متممادی و در انتروال $a < x < b$ مشتق پذیر باشد هرگاه

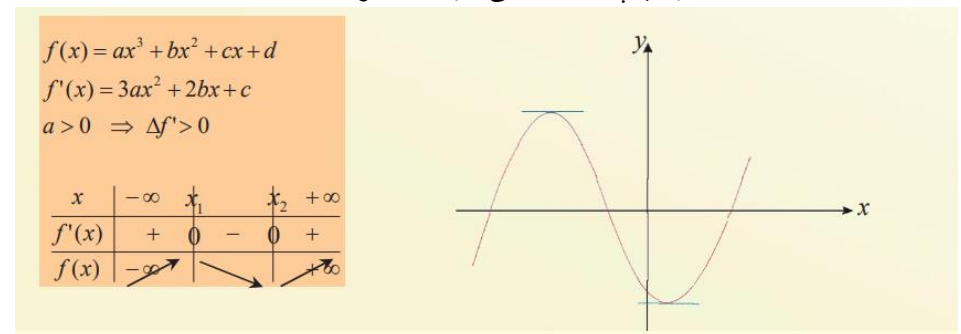
$f(a) = f(b)$ شود، کم از کم یک نقطه x_0 در انتروال $a < x < b$ وجود دارد که در آن

$f'(x) = 0$ می شود. به گراف ذیل توجه کنید.

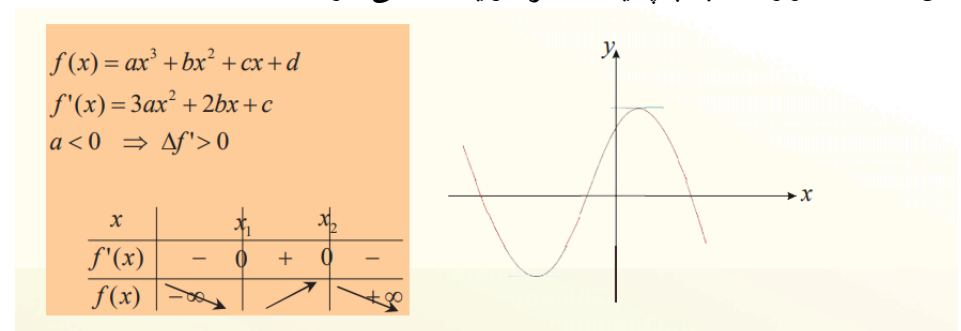
- تحولات تابع درجه سوم را بررسی کرده بتوانند.
- قادر گردد تا سوالات مرتبط به موضوع را حل کند.
- قضیه رول را درست درک و مطابق آن مثال کار بتوانند.
- قضیه لاگرانژ را درک و با در نظر داشت آن مثال تطبیق بتوانند.
- قاعده هویتال را درست درک نموده و مطابق آن مثال کار کند.
- نقاط بحرانی توابع را تطبیق کرده بتوانند.

توابع درجه اول سه مجهوله عبارت از توابع اند که شکل $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ را دارد. برای ترسیم گراف آن حالات ذیل را در نظر می گیریم.

1. اگر در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عدد $a > 0$ باشد، با گرفتن مشتق اول این تابع به یک تابع درجه دوم تبدیل می گردد، اگر در آن $\Delta f' > 0$ باشد، مشتق تابع دارای دو حل است. که از راست به چپ اول اعظمی و بعد اصغری دارد.



2. اگر در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ عدد $a < 0$ باشد، با گرفتن مشتق اول، این تابع به یک تابع درجه دوم تبدیل می گردد، اگر $\Delta f' > 0$ باشد، معادله مشتق دارای دو حل است، که از راست به چپ یک اصغری و یک اعظمی دارد.



3. اگر منحنی تابع درجه سوم مختصات نسبی داشته باشد، مختصات نقطه انعطاف آن عبارت اند از

$$\Rightarrow x_0 = c = \sqrt{\frac{26}{6}} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

قاعده هویتال

قاعده: اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در انتروال (a, b) تعریف و مشتق پذیر باشد، هرگاه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

شکل مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ را اختیار کند، درین صورت جهت دریافت لیمیت از آن مشتق می گیریم و مشتق می گیریم تا تابع ساده گردد و ابهام رفع شود.

مثال 1: لیمیت $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x}$ را حل کنید.

حل 1: با وضع عامل تقرب بجای متحول دیده می شود که تابع شکل مبهم $\frac{0}{0}$ می گیرد، برای دریافت لیمیت و رفع شکل ابهام از صورت و مخج همزمان مشتق می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + \sin 2x)'}{(x - \sin 2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \sin x \cos x}{1 - 2 \sin x \cos x} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$$

مثال 2: لیمیت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1}$ را دریابید.

حل 2: با استفاده از قاعده هویتال داریم که.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{7x^2 - 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x^2 - 4x + 6)'}{(7x^2 - 2x + 1)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6x - 4)'}{(14x - 2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{14} = \frac{6}{14} \end{aligned}$$

تطبیق نقاط بحرانی

برای تطبیق نقاط بحرانی توابع مثال های ذیل را در نظر میگیریم.

مثال 1: دو عددی را دریابید که حاصل جمع شان 20 و حاصل ضرب شان بزرگترین قیمت ممکنه را داشته باشد.

حل 1: اگر عدد اولی x باشد پس عدد دومی $20 - x$ است، و حاصل ضرب آنها را به شکل تابع این طور می نویسیم $f(x) = x(20 - x)$ چون عدد x در انتروال $[0, 20]$ تحول می کند، بنا برین نقطه اعظمی مطلق تابع را در انتروال $[0, 20]$ بررسی می کنیم.

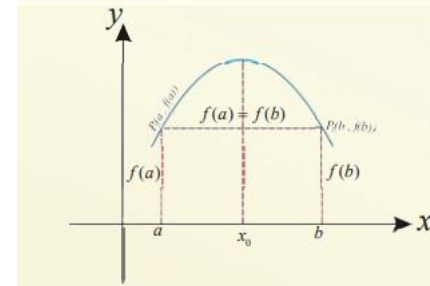
$$f(x) = x(20 - x)$$

$$f'(x) = 20 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$

پس عدد 100 بزرگترین قیمت ممکنه است، و این اعداد عبارت از $x_1 = 10$ و $x_2 = 10$ می باشد.



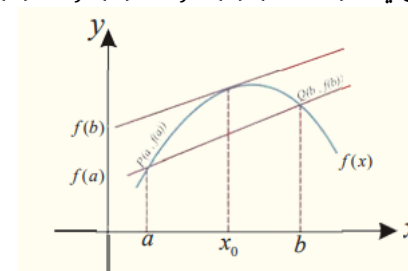
مثال: قضیه رول را در تابع $f(x) = \cos x$ در انتروال $[a, b] = (\pi, 5\pi)$ تطبیق کنید.
حل: حدود انتروال را در تابع قیمت گذاری می کنیم تا دیده شود که قضیه رول درین انتروال درست یا خیر،

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \cos \pi = -1 \\ f(5\pi) &= \cos 5\pi = -1 \Rightarrow f(\pi) \\ &= f(5\pi) \text{ قضیه رول درست است} \end{aligned}$$

اکنون برای دریافت نقطه x_0 مشتق اول تابع را دریافت نموده و آنرا برابر با صفر قرار میدهیم.
 $f'(x) = (\cos x)' = -\sin x = 0 \Rightarrow x = 2\pi, 3\pi, 4\pi$

قضیه لاگرانژ

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متممادی و مشتق پذیر باشد در همین انتروال (a, b) یک عدد مانند c وجود دارد که طوریکه $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ است.



مثال: در تابع $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ قضیه قیمت متوسط را در انتروال $[1, 3]$ بررسی کنید.
حل: دیده می شود که تابع فوق در انتروال $[1, 3]$ متممادی و مشتق پذیر است.

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18 \dots \dots (1)$$

$$f(x) = 2x^3 - 8x + 1 \Rightarrow f'(x_0) = 6x^2 - 8 \dots \dots \dots (2)$$

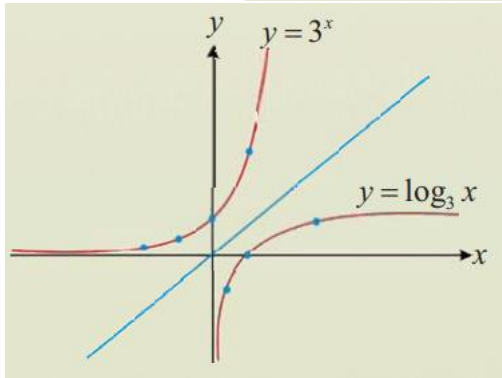
$$\xrightarrow{(1) \text{ and } (2)} 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow x^2 = 26 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{26}{6}}$$

معکوس تابع نمایی را به نام تابع لوگاریتمی یاد می‌نمایند.
 $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$

مثال: گراف توابع $y = \log_3 x$ و $y = 3^x$ ترسیم کنید.
 حل: با استفاده از قیمت گذاری گراف توابع فوق را ترسیم کرده می‌توانیم.

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



مثال 2: اگر $f(x) = \log_3 x$ باشد، قیمت های $f(1)$ ، $f(3^{-2})$ ، $f(9)$ ، $f(3)$ را دریافت نمائید.

حل 2:

$$f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2$$

$$f(1) = \log_3 1 = 0$$

خواص توابع لوگاریتمی

1. ناحیه تعریف توابع لوگاریتمی تمام اعداد حقیقی اند.
2. گراف توابع لوگاریتمی همیشه از نقطه $(1, 0)$ می‌گذرد.
3. توابع لوگاریتمی یک به یک و معکوس پذیر اند که معکوس آن توابع نمایی می‌باشد.

لوگاریتم معمولی و طبیعی

الف) لوگاریتم معمولی: عبارت از لوگاریتمی است که قاعده آن عدد 10 باشد، این لوگاریتم به نام لوگاریتم Briggs نیز یاد می‌شود.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \log_{10} x = \log x$$

$$\log_{10} 20 = \log 20 \quad \log_{10} 45 = 45 \quad \log_{10} 10^3 = 3$$

مثال 2: یک مکعب مستطیل را قاعده آن مربع است در نظر بگیرید، اگر مجموعه سه بعدی آن 24 باشد، بزرگترین حجم مکعب مستطیل را دریافت کنید.

حل: اگر ضلع مکعب مستطیل x و ارتفاع آنرا y در نظر بگیریم. داریم که

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$

$$V = x^2 \cdot y \Rightarrow V = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$

$$V = 24x^2 - 2x^3$$

$$V'(x) = 48x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0$$

$$48x - 6x^2 = 0$$

$$x(48 - 6x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$48 - 6x = 0$$

$$-6x = -48$$

$$x = 8$$

$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3$$

$$= 0 - 0 = 0$$

$$V'(0) = 0$$

$$V(8) = 24 \cdot (8)^2 - 2 \cdot (8)^3$$

$$= 1536 - 1024 = 512$$

$$V(8) = 512$$

$$V(12) = 24 \cdot (12)^2 - 2 \cdot (12)^3 = 3456 - 3456 = 0$$

$$V(12) = 0$$



بنابر آن بزرگترین حجم مکعب مستطیل 512 cm^3 است.

فعالیت ها

- قضیه رول را در تابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ در انتروال $(-2, 2)$ بررسی کنید.
- اگر مجموع دو عدد 200 شود آنرا طوری تعیین کنید که مجموع مربعات شان اصغری شود.
- نسبت متوسط بین حجم و مساحت کره را دریافت کنید.
- با استفاده از قاعده هسپتال لیمیت $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ را دریافت کنید.
- در مورد استفاده از بررسی نقاط بحرانی توابع در زندگی روزمره بنویسید.

لوگاریتم

لوگاریتم عبارت از طرز ارائه نوع دیگر طاقت می‌باشد، یا به عبارت دیگر لوگاریتم عبارت از محاسبه توان مجهول می‌باشد.

$$y = \log_a x$$

در رابطه بالا

x - عدد لوگاریتمی اند که همیشه بزرگ از صفر اند. ($x > 0$)

a - قاعده لوگاریتم اند که بزرگ از صفر و خلاف یک اند یعنی ($a > 0, a \neq 1$)

$$\log_2 4 \quad \text{و} \quad \log_7 12 \quad \text{و} \quad \log_3 125$$

تابع لوگاریتمی:

$$\log_4 3 = \frac{1}{5} \log_4 3$$

رابطه بین لوگاریتم طبیعی و معمولی

با در نظر داشت قاعده های این دو لوگاریتم یعنی $(10, e)$ و با استفاده از قانون $\log_b a =$

$$\frac{\log_m a}{\log_m b} \text{ داریم که}$$

$$\ln x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} x$$

$$\log_{10} e = \log_{10} 2.718281828 \dots = 0,4343$$

پس با وضع این لوگاریتم داریم که

$$\ln x = \frac{1}{0,4343} \cdot \log_{10} x \Rightarrow \boxed{\ln x = 2.3026 \log x}$$

مثال: $\ln 4.69$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه بین لوگاریتم های طبیعی و معمولی داریم که

$$\ln x = 2.3026 \log x$$

$$\Rightarrow \ln 4,69 = 2.3026 \log 4,69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

$$\log 4.69 = 0,6712$$

مشخصه و ومانتس لوگاریتم

لوگاریتم از دو بخش (قسمت صحیح و قسمت اعشاری) ساخته شده است. که قسمت صحیح آنرا بنام مشخصه و قسمت اعشاری آن را بنام ماننس می گویند. یعنی

$$N = a \cdot 10^n$$

$$\log_{10} N = \log_{10} a \cdot 10^n = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = n + \log a$$



مثال: مشخصه و ماننس لوگاریتم $\log 235$ را دریافت نمایید.

حل: به کمک روش علمی عدد نویسی داریم که $235 = 2.35 \cdot 10^2$ است و از اطراف لوگاریتم می گیریم.

$$\log 235 = \log 2.35 \cdot 10^2 = \log 10^2 + \log 2.35 = 2 + \log 2.35$$

در مثال فوق مشخصه برابر است با 2 و ماننس آن برابر است با 0,371 $\log 2.35 =$

روش های محاسبه مشخصه لوگاریتم

(ب) لوگاریتم طبیعی: عبارت از لوگاریتم اند که قاعده آن عدد اویلر (e) باشد. یعنی

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \log_e x = \ln x \quad : \quad e = 2.718281828653 \dots$$

$$\log_e 12 = \ln 12 \quad \log_e 25 = \ln 25 \quad \log_e 200 = \ln 200$$

قوانین لوگاریتم:

1. لوگاریتم هر عدد به قاعده خودش برابر با یک است؟

$$\log_a a = 1 \quad : \quad a \neq 1 \text{ and } a \in \mathbb{R}$$

$$\log_4 4 = 1 \quad \text{و} \quad \log_{23} 23 = 1$$

2. لوگاریتم یک به هر قاعده برابر با صفر است.

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_3 1 = 0 \quad , \quad \log_{25} 1 = 0$$

3. لوگاریتم حاصل ضرب دو یا چند عدد برابر با حاصل جمع لوگاریتم های آنهاست

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_{10} 5 \cdot 10 = \log_{10} 5 + \log_{10} 10 = 1 + \log_{10} 5$$

4. لوگاریتم حاصل تقسیم دو عدد برابر است با حاصل ضرب لوگاریتم های آنها

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_4 \frac{12y}{3x} = \log_4 \frac{4y}{x} = \log_4 4y - \log_4 x = 1 + \log_4 \frac{y}{x}$$

5. لوگاریتم یک عدد توان دار مساوی است به توان ضرب در لوگاریتم همان عدد.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_4 x^3 = 3 \log_4 x \quad , \quad \log_{12} y^7 = 7 \log_{12} y$$

6. یک لوگاریتم را به شکل حاصل تقسیم دو لوگاریتم با عین قاعده نوشته می توانیم.

$$\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$$

$$\log_5 12 = \frac{\log_7 12}{\log_7 5} \quad \text{و} \quad \log_2 m = \frac{\log_a m}{\log_a 2}$$

7. اگر یک لوگاریتم معکوس گردد، جاهای قاعده و عدد لوگاریتمی تغییر می کند.

$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$$

$$\log_{125} \sqrt{5} = \frac{1}{\log_{\sqrt{5}} 125} = \frac{1}{\log_{(5)^{\frac{1}{2}}} 5^3} = \frac{1}{6 \log_5 5} = \frac{1}{6}$$

8. لوگاریتم که قاعده آن دارای توان باشد، یک بر توان قاعده را ضرب لوگاریتم قرار می دهیم.

$$\log_b^n x = \frac{1}{n} \log_b x$$

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2. اگر $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ انتیگرال پذیر و k یک عدد حقیقی ثابت باشد در آن صورت عدد ثابت بیرون انتیگرال در نظر گرفته می شود.

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: انتیگرال $\int_{-2}^2 4dx$ را محاسبه نمایید.

حل:

$$\int_{-2}^2 4dx = 4 \int_{-2}^2 dx = 4(2 - (-2)) = 4 \cdot 4 = 16$$

3. اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، درین صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

مثال:

$$\int_2^5 4x dx = - \int_5^2 4x dx$$

4. اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متمادی باشد، درین صورت داریم که.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

مثال:

$$\int_4^4 2x^2 dx = 0 \quad \int_{-2}^{-2} (3x - 9) dx = 0$$

5. انتیگرال حاصل جمع و تفریق توابع برابر است با حاصل جمع و تفریق انتیگرال های آنها: یعنی

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

مثال:

$$\int_0^1 (4 + 3x^2) dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2 dx = [4x]_0^1 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 4 + 1 = 5$$

$$\int_0^3 (x^2 - 1) dx = \int_0^3 x^2 dx - \int_0^3 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 - [x]_0^3 = 9 - 3 = 6$$

6. اگر تابع $f(x)$ در انتروال که در آن a و b و c است، انتیگرال پذیر باشد، داریم که:

✚ اگر عدد لوگاریتمی یک عدد تام باشد، مشخصه لوگاریتم برابر به تعداد ارقام عدد لوگاریتمی منفی یک اند.

$$\log 28871 \quad \text{مشخصه} = 4$$

$$\log 400821 \quad \text{مشخصه} = 5$$

✚ اگر عدد لوگاریتمی کوچکتر از یک باشد، مشخصه برابر است با تعداد صفرهای اطراف علامه اعشاری، که علامه مشخصه منفی در نظر گرفته می شود.

$$\log 0,0234 \quad \text{مشخصه} = -2$$

$$\log 0,000345 \quad \text{مشخصه} = -4$$

انتیگرال معین

تعریف: لیمیت مجموعه ریمان تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ وقتی که n به بی نهایت تقرب کند و بزرگترین طول انتروال های فرعی Δx به صفر نزدیک گردد به نام انتیگرال معین تابع $f(x)$ یاد می گردد.

یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال: قیمت انتیگرال $\int_1^3 x^2 dx$ را دریافت نمایید.

حل:

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{1}{3} (27 - 1) = \frac{27}{3} = 9$$

مثال 2: مساحت محصور شده توسط $y = x - 1$ و محور x در انتروال $[0, 3]$ دریافت کنید.

حل 2:

$$\int_0^3 (x - 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3 \right] - 0 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$$

خواص انتیگرال معین

1. انتیگرال عدد ثابت $\int_a^b C dx$ عبارت اند از.

$$\int_a^b C dx = C \int_a^b dx = C[x]_a^b = C(b - a)$$

مثال: انتیگرال $\int_3^4 dx$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

مثال: در انتیگرال $\int_1^4 x^2 dx$ مقدار c را دریافت نمائید.
حل:

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21$$

$$\int_1^4 x^2 dx = f(c)(4 - 1) \Rightarrow \int_1^4 x^2 dx = c^2(4 - 1)$$

$$\Rightarrow 21 = 3c^2 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow \boxed{c = \pm\sqrt{7}}$$

10. قضایای اساسی مشتق و انتیگرال: مشتق و انتیگرال دو قضیه اساسی دارند.

❖ **قضیه اول اساسی مشتق و انتیگرال:**

اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متممادی و x درین انتروال شامل باشد، داریم که
 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ چون تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ مشتق پذیر است پس برای هر $x \in$

$$F'(x) = f(x), [a, b]$$

مثال: مشتق $\int_2^{x^2+1} \frac{1}{t^2+1} dt$ را دریابید.

حل:

$$F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} (x^2 + 1)' = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 + 1} 2x$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2 + 1}$$

❖ **قضیه دوم اساسی مشتق و انتیگرال:**

اگر تابع $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متممادی باشد درین صورت داریم که

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

مثال: حاصل انتیگرال $\int_0^1 x^2 dx$ را دریابید.

حل:

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

11. انتیگرال گیری به طریقه تعویضی:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

مثال: اگر انتیگرال $\int_0^{10} f(x) dx = 17$ و $\int_0^8 f(x) dx = 12$ باشد قیمت $\int_8^{10} f(x) dx$ را دریابید.
حل:

$$\int_0^{10} f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx$$

$$17 = 12 + \int_8^{10} f(x) dx \Rightarrow \int_8^{10} f(x) dx = 17 - 12 = 5$$

7. اگر توابع $f(x) \leq g(x)$ در انتروال $[a, b]$ انتیگرال پذیر باشند در آن صورت داریم که:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

مثال:

$$2x - 4 \leq 4x^2 + 8 \Rightarrow \int_0^4 (2x - 4) dx \leq \int_0^4 (4x^2 + 8) dx$$

8. اگر تابع $f(x)$ در انتروال $[a, b]$ متممادی و m و M به ترتیب قیمت اصغری مطلق و اعظمی مطلق درین انتروال باشند، درین صورت داریم که.

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

مثال: انتیگرال $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ را دریابید.

حل: چون تابع $f(x) = e^{-x^2}$ در انتروال $[0, 1]$ متممادی است، و $M = f(0) = 1$ و

$m = f(1) = \frac{1}{e}$ پس داریم که.

$$\frac{1}{e}(1 - 0) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1(1 - 0)$$

$$e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0,3679$$

9. اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متممادی باشد درین صورت یک عدد حقیقی c طوریکه $a < c < b$ وجود دارد:

برای بدست آوردن انتیگرال یک تابع که قابل تعویض به یک تابع کوچکتر باشد از روش تعویضی استفاده می‌نمائیم.

مثال: انتیگرال $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ را محاسبه نمائید.

حل:

$$u = 3 - 5x \Rightarrow du = -5dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{5} du$$

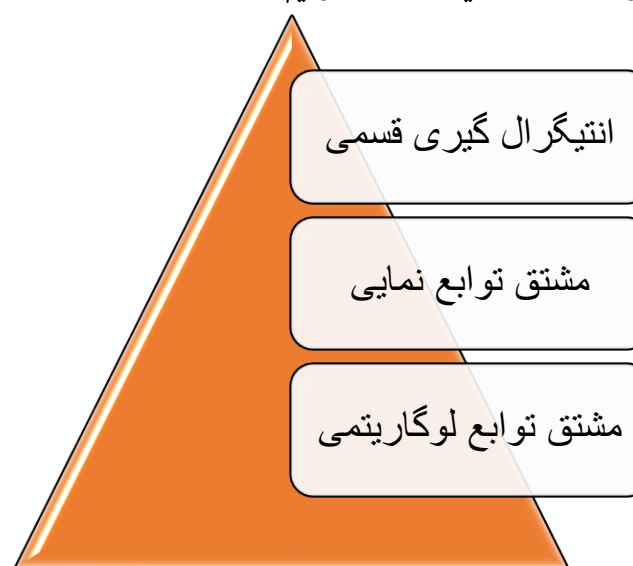
$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5} \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{5} \left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} \left[-\frac{1}{-7} + \frac{1}{-2}\right] = \frac{1}{14}$$

قرار است موضوعات ذیل را درین بخش بیاموزیم



اهداف آموزشی: شاگردان درین درین بخش باید:

- قادر به دانستن فورمول‌های انتیگرال گیری قسمی گردد.
- قادر به حل مثال‌های انتیگرال گیری به روش قسمی گردد.
- مشتق توابع نمایی را دریافت بتوانند.
- مشتق توابع لوگاریتمی را دریافت بتوانند.

انتیگرال گیری به طریقه قسمی

تعریف:

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند، و رابطه $\int f(x)g(x)dx$ موجود باشد، استفاده از روش قسمی می‌توان این نوع انتیگرال‌ها را حل نمود. اگر $f(x) = u$ و $g(x) = v$ تعویض نمائیم داریم که:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \Rightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v$$

$$\int v' \cdot u dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx \quad \text{یا} \quad \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

برای انتیگرال‌های معین نیز داریم که:

$$\int_a^b u dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v du$$

مثال 1: انتیگرال نامعین $\int x \sin x dx$ را دریافت نمائید.

حل 1:

$$\begin{cases} u = x & , & du = dx \\ dv = \sin x & , & v = -\cos x \end{cases} \Rightarrow \int u dv = u \cdot v - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

مثال 2: انتیگرال $\int_0^1 -x e^x dx$ را حساب کنید.

حل 2:

$$\begin{cases} u = -x & , & du = -dx \Rightarrow -du = dx \\ dv = e^x dx & , & v = e^x \end{cases}$$

$$\int_a^b u dv = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b v du$$

$$\int_0^1 -x e^x dx = [-x e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -1$$

مشتق توابع نمایی و لوگاریتمی

بصورت عموم اگر $f(x) = \ln x$ و $g(x) = a^x$ باشد، پس $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $g'(x) = a^x \ln a$ است.

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = a^x \Rightarrow g'(x) = a^x \ln a$$

قضیه:

1. اگر تابع $f(x) = \log_a x$ باشد درین صورت مشتق آن عبارت اند از.

$$f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$$

2. اگر تابع $f(x) = \log_a g(x)$ باشد، مشتق آن عبارت اند از.

$$f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \log_a e$$

مثال 1: مشتق تابع $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ را دریابید.

حل 1: $g(x) = x^2 + 1$ وضع می کنیم.

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$g'(x) = 2x$$

$$(\ln g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}}$$

مثال 2: مشتق توابع $f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ را دریافت نمائید.

حل 2:

$$f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2} (\log_a x^2 + 1 - \log_a x^2 - 1)$$

$$f'(x) = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \right)' = \left(\frac{1}{2} (\log_a x^2 + 1 - \log_a x^2 - 1) \right)'$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} \log_a e \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2x}{x^2+1} \log_a e - \frac{2x}{x^2-1} \log_a e \right]$$

$$= \frac{1}{2} 2x \log_a e \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \right] = \frac{-x}{x^4-1} \log_a e$$

تمرین: مشتق تابع $g(x) = \ln \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$ را دریافت نمائید.

مثال 3: مشتق تابع $y = e^{(x^2+1)}$ را دریافت نمائید.

حل 3: از تعویض $u = x^2 + 1$ استفاده می کنیم.

$$y = e^{(x^2+1)} \Rightarrow y' = (x^2 + 1)' \cdot e^u = 2x \cdot e^{(x^2+1)}$$

مثال 4: مشتق تابع $y = \sqrt[3]{2}$ را دریافت نمائید.

حل 4:

$$y = \sqrt[3]{2} \Rightarrow y = 2^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \left(2^{\frac{1}{3}} \right)' = \left(\frac{1}{x} \right)' \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot \ln 2 = \frac{-1}{x^2} 2^{\frac{1}{3}} \ln 2$$

مثال 5: مشتق تابع $y = \log_3(\log_2 x)$ را دریافت نمائید.

حل 5:

$$\begin{aligned} y = \log_3(\log_2 x) \Rightarrow y' &= \frac{(\log_2 x)'}{\ln 3 \cdot \log_2 x} = \frac{\frac{1}{x \ln 2}}{\ln 3 \cdot \log_2 x} \\ &= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \log_2 x} \\ &= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\log_e x}{\log_e 2}} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 3 \cdot x \cdot \frac{\ln x}{\ln 2}} = \frac{1}{\ln 3 \cdot x \cdot \ln x} \end{aligned}$$

فعالیت ها

➤ مشتق توابع ذیل را دریافت نمائید.

I. $f(x) = \ln \sqrt{3x^2 + 7}$

II. $f(x) = \log_{10} 3x^2$

III. $y = \frac{(x+2)^2(\sqrt{x-1})}{(x+4)^3 e^x}$

IV. $y = x^x$

V. $f(x) = \ln(5x^2 - 6x + 5)$

VI. $f(x) = \ln \sin 3x$

➤ مشتق توابع نمایی را تعریف نمائید.

➤ آیا توابع نمایی و لوگاریتمی معکوس یک دیگر اند؟

➤ فورمول های انتیگرال گیری قسمی را بنویسید.

➤ انتیگرال $\int x^5 \cos x^3 dx$ را دریافت نمائید.

➤ انتیگرال $\int x \cos 2x dx$ را دریافت نمائید.

آنچه درین بخش فرا خواهیم گرفت



اهداف آموزشی: در پایان این درس شاگردان قادر گردند تا:

- مشتق توابع معکوس را بدانند و تعریف کرده بتوانند
- انتیگرال توابع نمایی و لوگاریتمی را دانسته و آنها را تعریف کرده بتوانند.
- کسور قسمی را بدانند و تعریف کرده بتوانند.
- انتیگرال ها را توسط کسور قسمی محاسبه کرده بتوانند.
- مثال های مربوط به موضوعات آتی را حل کرده بتوانند.

مشتق توابع معکوس

تعریف: هرگاه f و g دو تابع معکوس همدیگر باشند، یعنی $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ صورت $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ یا $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ است، که تابع و خواص مشتق توابع ضمنی میتوانیم بنویسیم، که:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = g(y) \end{cases} \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = y'_y \Rightarrow y'_x \cdot x'_y = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

مثال: مشتق تابع $y = a^x$ را با استفاده از مشتق تابع معکوس آن بدست آرید.
حل:

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y} \log_a e} = \frac{1}{y} \log_e a = y \log_e a = a^x \ln a$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

A. مشتق تابع sin:

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

B. مشتق معکوس تابع cos:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

C. مشتق معکوس تانجانت:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\cos^2 y} = \cos^2 y \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

D. مشتق معکوس کوتانجانت:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}} = -\cos^2 y$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

مثال 1: مشتق تابع $y = (\arcsin x)^5$ را بدست آرید.
حل 1:

$$y = (\arcsin x)^5$$

$$y' = 5(\arcsin x)^4 (\arcsin x)' = 5(\arcsin x)^4 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

مثال 2: مشتق تابع $y = \log_5(\arcsin x)$ را بدست آرید.
حل 2:

$$y = \log_5(\arcsin x)$$

$$y' = [y = \log_5(\arcsin x)]' = \frac{(\arcsin x)'}{(\arcsin x) \ln 5} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 + x^2)(\arcsin x) \ln 5}$$

مثال 3: مشتق تابع $y = \arcsin e^x$ را بدست آرید.
حل 3:

$$y' = [\arcsin e^x]' = (\arcsin u)' = \frac{u'}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$y' = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

کسور قسمی

تعریف: کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته شده باشد، طوریکه اگر آنها باهم جمع گردد کسر داده شده واقعی بدست آید کسور قسمی نامیده می شود.
برای تجزیه سک واقعی حالات ذیل وجود دارد.

حالت اول

هرگاه $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ پولینوم مخرج از عوامل ضربی تکرار نشده تشکیل گردیده باشد قرار ذیل تجزیه می گردد.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3} + \dots + \frac{N}{x-x_n}$$

مثال: کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ را به کسور قسمی آن تجزیه نمائید.

حل: پولینوم مخرج را به عوامل ضربی آنها تجزیه می کنیم.

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$$

یعنی

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-1)(x-5)}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x-5)(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (A-3B-6C)x + (-2A-10B+5C)}{(x-5)(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

در رابطه فوق مخرج ها باهم برابر اند، پس صورت ها نیز باهم برابر اند. و داریم که.

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-3B-6C=-1 \\ -2A-10B+5C=-39 \end{cases}$$

رابطه فوق یک معادله سه مجهوله درجه یک است، بعد از حل آن داریم که

$$A=2, \quad B=3, \quad C=-1$$

حالت دوم

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک که بعضی از آنها تکرار گردیده باشد، یعنی عامل $(x-x_0)$ - n دفعه تکرار گردیده باشد.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3} + \dots + \frac{N}{(x-x_0)^n}$$

مثال: کسر واقعی $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ را به کسرهای قسمی آن تجزیه نمائید.
حل:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-3B+C)x + (A+2B-2C)}{(x-2)(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=3 \\ -2A-3B+C=-6 \\ A+2B-2C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

حالت سوم

هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده باشد، پس یک

جز پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ است که شکل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ را دارد.

مثال: کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ را به کسرهای قسمی آن تجزیه نمائید.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} &= \frac{Ax+B}{x^2+2x+4} + \frac{C}{x+1} \\ &= \frac{(Ax+B)(x+1) + C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B+2C)x + (B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+C=5 \\ A+B+2C=8 \\ B+4C=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \\ C=2 \end{cases}$$

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

انتیگرال های توابع نمایی (اکسپوننشیل)

برای تابع نمایی $f(x) = e^x$ داریم که

حل 3:

$$\int \frac{2du}{u} = 2 \int \frac{du}{u} = 2 \ln|u| + C = 2 \ln|x+2| + C$$

مثال 4: انتیگرال $\int_{-1}^1 e^{2x} dx$ را دریابید.

حل 4:

$$u = 2x \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{cases} x = -1, u = 2x \Rightarrow u = 2(-1) - 2 \\ x = 1, u = 2x \Rightarrow u = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^u du = \frac{1}{2} [e^u]_{-2}^2 = 3,627$$

محاسبه انتیگرال توسط کسور قسمی

بعضی انتیگرال های وجود دارند که تابع تحت انتیگرال آنها یک کسر واقعی اند، پس برای محاسبه انتیگرال آنها از کسور قسمی استفاده می نمائیم.

مثال 1: انتیگرال $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx$ را دریافت نمائید.

حل 1: ابتداء تابع تحت انتیگرال را به کسور قسمی آن تجزیه می کنیم (روش تجزیه را در بخش تجزیه به کسور قسمی خواندیم).

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-12}{x^2-6x+8} dx &= \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{8}{x-4} dx \\ &= - \int \frac{1}{x-2} dx + 8 \int \frac{1}{x-4} dx \\ &= - \ln|x-2| + 8 \ln|x-4| + C = \ln(x-2)^{-1} + \ln(x-4)^8 \\ &= \ln \left(\frac{(x-4)^8}{x-2} \right) + C \end{aligned}$$

فعالیت ها

انتیگرال $\int \frac{-5x+9}{x^2+x-6} dx$ را محاسبه کنید.

انتیگرال $\int 3 \log \frac{1}{x} dx$ را محاسبه کنید.

انتیگرال $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}} dx$ محاسبه کنید.

کسور قسمی چیست؟ با ذکر یک مثال بیان کنید.

انتیگرال توابع نمایی را تشریح کنید.

انتیگرال توابع لوگاریتمی را تشریح کنید.

$$f(x) = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$$

و برای تابع نمایی $f(x) = a^x$ داریم که:

$$f(x) = a^x \Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad : (a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$$

مثال 1: انتیگرال $f(x) = 2^{x-3}$ را دریابید.

حل:

$$\int 2^{x-3} dx = \int \frac{2^x}{2^3} dx = \int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8} \int 2^x dx = \frac{1}{8} \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

مثال 2: انتیگرال نمایی $\int 3^{x+1} dx$ را دریابید.

حل 2:

$$\int 3^{x+1} dx = \int 3 \cdot 3^x dx = 3 \int 3^x dx = 3 \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

انتیگرال توابع لوگاریتمی

میدانیم که لوگاریتم ها دو نوع اند، پس انتیگرال این توابع عبارت اند از.

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \log_a x dx = x \log_a \frac{x}{e} + C$$

مثال 1: انتیگرال $\int \ln 3x dx$ را بدست آورید.

حل 1:

$$\begin{aligned} \int \ln 3x dx &= \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \int \ln x dx \\ &= x \ln 3 + x \ln x - x + C = x(\ln 3x - 1) + C \end{aligned}$$

مثال 2: انتیگرال $\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx$ را بدست آورید.

حل 2:

$$-2x - 3 = u \Rightarrow -2 = \frac{du}{dx}, \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4} \int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C$$

مثال 3: انتیگرال $\int \frac{2x}{x+2} dx$ را دریابید.

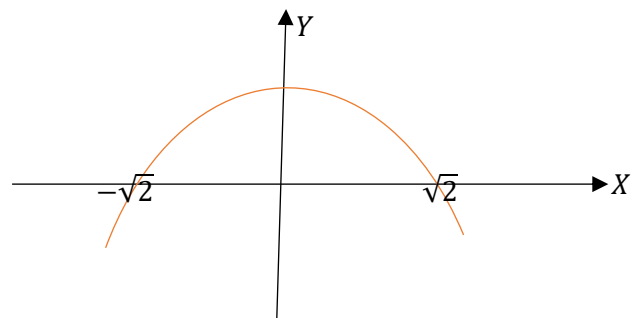
$$x = 0 \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 \Rightarrow (0,1) \text{ نقطه بحرانی}$$

$$y = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} = \begin{cases} x_1 = \sqrt{2} \\ x_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$ نقاط تقاطع با محاورات

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2 \left[x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$A = 2 \left(\sqrt{2} - \frac{(\sqrt{2})^3}{6} - 0 \right) = 2 \left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$



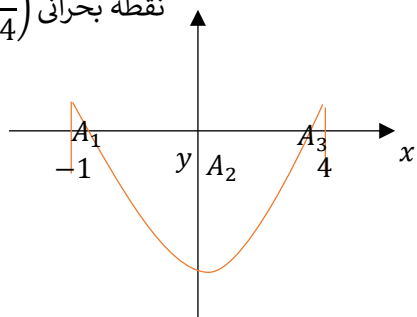
مثال 2: گراف منحنی تابع $y = x^2 - 3x$ را رسم و مساحت سطح محصور شده توسط منحنی مذکور و محور x را در انتروال $[-1, 4]$ محاسبه کنید.
حل 2:

$$y = x^2 - 3x \Rightarrow y' = 2x - 3$$

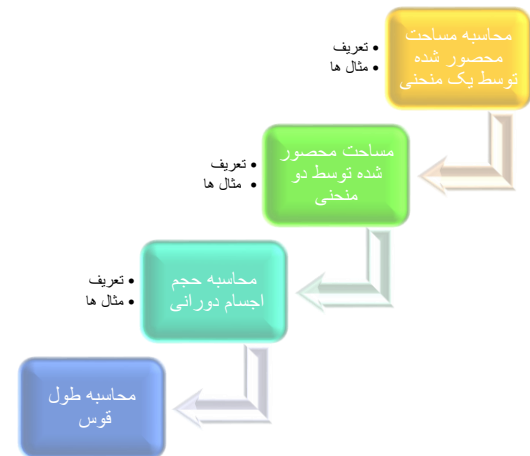
$$y' = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$y = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{9}{4} \quad \text{نقطه بحرانی} \left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$$



آنچه قرار است درین بخش بخوانیم



اهداف آموزشی: در پایان این بخش شاگردان باید به نتایج ذیل دست یابند.

- ✓ محاسبه سطوح محصور شده توسط گراف منحنی ها را بدانند.
- ✓ مساحت محصور شده بین دو منحنی توابع را دریافت کرده بتوانند.
- ✓ حجم اجسام دورانی را با استفاده از انتیگرال معین دریافت کرده بتوانند.
- ✓ طول قوس را محاسبه کرده بتوانند.
- ✓ مثال های مربوط به درس را کار کرده بتوانند.

محاسبه مساحت محصور شده توسط یک منحنی

انتیگرال $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ مساحت سطحی را نشان می دهد که توسط منحنی تابع $y = f(x)$ و محور x در انتروال $[a, b]$ محصور شده است.

اگر تابع $f(x)$ در انتروال بسته $[a, b]$ متمادی و مثبت باشد، یعنی $y = f(x) \geq 0$ گردد درین حالت گراف تابع $f(x)$ همیشه در قسمت بالای محور x قرار دارد و مثبت و اگر $f(x) \leq 0$ باشد درین صورت گراف تابع همیشه در قسمت پائین x قرار دارد و منفی است.

مثال 1: مساحت سطح محصور شده توسط منحنی تابع $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ و محور x را محاسبه نمائید.

حل 1: برای تعیین نمودن سطح محصور شده ابتداء نقطه بحرانی و تقاطع با محور x را به دست می آوریم.

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad y' = -x$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0$$

نقاط تقاطع هر دو منحنی عبارت اند از (1,1) و (0,0)، حالا مساحت محصور شده را میتوان قرار ذیل دریافت نمود.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 [2x - x^2 - x^2] dx = \int_0^1 [2x - x^2] dx$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} \right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{3}}$$

$f(x)$

مثال 2: مساحت محصور شده بین منحنی $f(x) = x^2 - 6x + 2$ و خط $g(x) = 2 - x$ را حساب کنید.

حل 2: اول نقاط تقاطع خط و منحنی را دریافت می کنیم.

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

$$g(x) = 2 - x$$

$$f(x) = g(x)$$

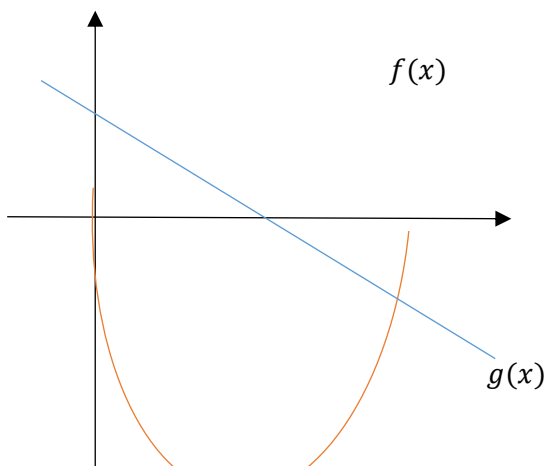
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 2 - x$$

$$x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0$$

$$x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 5$$

نقاط تقاطع (0,2), (5,-3)



از شکل معلوم می شود که گراف $g(x)$ بالای گراف $f(x)$ قرار دارد، پس داریم که:
از شکل معلوم می شود که گراف $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار دارد به این معنی که:

$$g(x) > f(x)$$

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2) dx$$

$$= \int_0^5 (-x - x^2 + 6x) dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x) dx$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^0 (x^2 - 3x) dx - \int_0^3 (x^2 - 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx$$

$$A = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_3^4$$

بعد از وضع اندکس های بالای و پائین بجای متحول ها داریم که

$$A = - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{3}27 - \frac{3}{2}9 \right) + \left(\frac{1}{3}64 - \frac{3}{2}16 \right) - \left(\frac{1}{3}27 - \frac{3}{2}9 \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{49}{6}}$$

محاسبه مساحت محصور شده توسط دو منحنی

برای محاسبه سطح محصور شده توسط دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ در صورتیکه $f(x) > g(x)$ باشد، یعنی گراف تابع $f(x)$ بالاتر از گراف تابع $g(x)$ قرار داشته باشد، پس ابتداء نقطه تقاطع هر دو منحنی را یافته بعداً مساحت بین منحنی با محور x را در انتروال $[a, b]$ محاسبه می کنیم.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

اگر $f(x) < g(x)$ باشد، یعنی گراف تابع $g(x)$ بالاتر از گراف تابع $f(x)$ قرار داشته باشد داریم که.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx$$

مثال 1: مساحت سطح محصور شده بین منحنی های $f(x) = 2x - x^2$ و $g(x) = x^2$ را حساب کنید.

حل 1: در قدم نخست نقاط تقاطع هر دو منحنی را دریافت می کنیم، برای این کار معادلات هر دو منحنی را باهم برابر قرار میدهم.

$$f(x) = 2x - x^2, \quad g(x) = x^2$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2$$

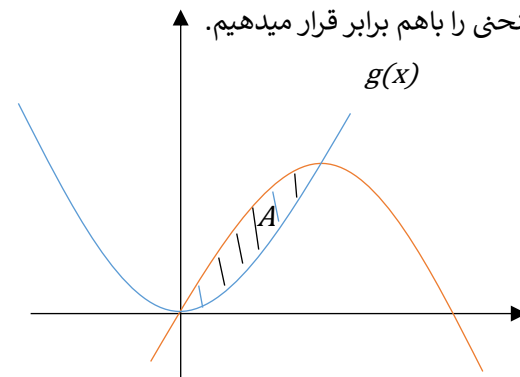
$$2x - x^2 - x^2 = 0$$

$$2x - 2x^2 = 0$$

$$2x(1 - x) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$1 - x = 0 \Rightarrow x_2 = 1$$



2. حجم مخروط را توسط انتیگرال دریافت نمائید.

چون سطح مخروطی از دوران خط $y = mx$ حول محور x بدست می آید، بنا برین:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi y^2 dx \\ &= \int_0^h \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_0^h x^2 dx \\ &= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3} \right) = \frac{\pi h}{3} (mh)^2 \xrightarrow{mh=r} \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{حجم مخروط}$$

3. حجم بیضوی را با استفاده از انتیگرال دریافت نمائید.

میدانیم که معادله نورمال بیضوی $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ است و رابطه $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$ نیز درست است و داریم که:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a \pi y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx = 2\pi \int_0^a \left[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \right] dx \\ &= 2\pi \left[b^2 x - \frac{b^2 x^3}{a^2} \right]_0^a = 2\pi \left[\left(b^2 a - \frac{b^2 a^3}{a^2} \right) - 0 \right] = 2\pi \left[b^2 a - \frac{b^2 a}{3} \right] \\ &= 2\pi \left[\frac{3b^2 a - b^2 a}{3} \right] = 2\pi \left[\frac{2b^2 a}{3} \right] \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi a^2 b \quad \text{حجم بیضوی} \end{aligned}$$

مثال 1: حجم جسم را که از دوران مساحت بین منحنی تابع $y = x^2$ و خط $y = 1$ حول محور y به دست می آید حساب کنید.

حل:

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \left[\frac{1}{2} \pi y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \pi \Rightarrow V = \frac{\pi}{2}$$

مثال 2: حجم جسمی را که از دوران مساحت بین منحنی $y = x^2$ و خط $y = x$ حول محور x به وجود می آید.

حل 2:

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + 5\frac{25}{2} \right) - 0 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}$$

$$A = \frac{125}{6}$$

محاسبه احجام دورانی

در صنوف پائین تر ما حجم اجسام را با استفاده از فورمول های که بدون ثبوت آنها را قبول کرده بودیم حل می کردیم، اما درینجا فورمول های حجم اجسام را با استفاده از انتیگرال معین ثبوت می کنیم.

• هرگاه مساحت منحنی تابع متمادی $y = f(x)$ توسط خطوط $x = a$ و $x = b$ محصور شده باشد. پس حجم جسمی که از دوران مساحت بین منحنی تابع فوق حول محور x به وجود می آید تقریباً استوانه پی شکل است که از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x) \Delta x = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

• اگر مساحت منحنی $x = f(y)$ توسط خطوط $y = c$ و $y = d$ محصور شده باشد. مساحت مقطع چنین استوانه نظر به محور y ، πr^2 بوده، ارتفاع آن $\Delta y = d - c$ و شعاع آن $x = r$ است. حجم که از دوران این مساحت به دست می آید طور ذیل است.

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(y) \Delta y = \int_a^b \pi x^2 dx = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

1. حجم کره را با استفاده از انتیگرال محاسبه کنید.

ثبوت:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y^2 = r^2 - x^2$$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 2\pi \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - 0 \right] = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$

❖ اگر معادله منحنی $x = f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ داده شده باشد با توجه به پارامترهای مانند y طول قوس منحنی را چنین محاسبه می کنیم.

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dy$$

مثال: طول قوس منحنی $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $1 \leq x \leq 4$ محاسبه کنید.

حل:

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}}, \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} dx = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4}y + 1} dy$$

$$= \int_1^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4}y + 1\right)^3} \right]_1^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{10^3} - \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 1\right)^3} \right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}} \right]$$

فعالیت ها

➤ مساحت محصور شده بین منحنی $y = \sin x$ و محور x را در انتروال $[0, 2\pi]$ محصور شده دریافت کنید.

➤ مساحت محصور شده بین منحنی $y = x^2 + 3$ در انتروال $[-2, 4]$ را دریافت کنید.

➤ طول قوس منحنی $x = t^2$ و $y = t^3$ را در انتروال $1 \leq x \leq 2$ دریافت کنید.

➤ محیط دایره $x^2 + y^2 = r^2$ را دریافت نمایید.

➤ مساحت محصور شده بین منحنی $y = x^2$ و $y = -x^2 + 4x$ را دریابید.

$$\begin{cases} y_1 = x^2 = f(x) \\ y_2 = x = g(x) \end{cases} \Rightarrow y_2 > y_1$$

$$= \int_a^b [\pi(y_2^2 - y_1^2)] dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (x^2)^2) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right) \right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] = \frac{2\pi}{15} \Rightarrow \boxed{V = \frac{2\pi}{15}}$$

محاسبه طول قوس

❖ اگر منحنی $y = f(x)$ در انتروال $a \leq x \leq b$ داده شده باشد با توجه به پارامتر مانند x طول قوس منحنی از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

مثال: طول قوس منحنی $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ را در انتروال $0 \leq x \leq 4$ حساب کنید.

حل:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_0^4 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{4}{9} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} + 1} \right]_0^4 = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3} [u^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{8}{27} [\sqrt{u^3}]_0^4$$

$$= \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^2} \right]_0^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1 \right] = \frac{8}{27} (\sqrt{10^3} - 1)$$

$$\Rightarrow L = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$

آنچه درین بخش قرار است بیاموزیم



اهداف آموزشی

- در پایان درس شاگردان باید قادر گردد تا
- توزیع تابع احتمال را بدانند و تعریف کرده بتوانند.
- آزمایش برنولی را انجام داده بتوانند.
- توزیع احتمال پواسن را تعریف کرده بتوانند.
- توزیع نورمال را بدانند.
- مثال های مربوط به موضوعات فوق را حل کرده بتوانند.

توزیع تابع احتمال

توزیع تابع احتمال که در احصائیه و احتمالات مورد بحث قرار می گیرد عبارت از تابع است که ناحیه اعریف آن فضای نمونه و ناحیه قیمت های آن اعداد حقیقی است.

○ اگر $P(X = x_i) = f(x_i)$ داشته باشیم در این صورت جوهره های مرتب $[x_1, f(x_1)][x_2, f(x_2)][x_3, f(x_3)] \dots [x_n, f(x_n)]$ تابع احتمال مجزا یا گسسته می گویند.

○ تابع احتمال پیوسته و تجمعی را می توان به شکل $F(x) = P(X \leq x)$ ارائه نمود.

○ اگر $f(x)$ تابع احتمال و x متحول تصادفی باشد، درین صورت احتمال اینکه x بین k_1 و k_2 قرار گیرد برابر است با

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

○ اگر x متحول تصادفی پیوسته و $k_1 < k_2$ باشد درین صورت:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

○ اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت اوسط یک متحول تصادفی x که به $E(x)$ نشان داده می شود برابر است به:

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \dots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ اوسط x نامیده می شود که آنرا به \bar{x} نشان می دهیم و همچنان اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت وریانس x که به شکل S^2 نشان داده می شود مساوی است به

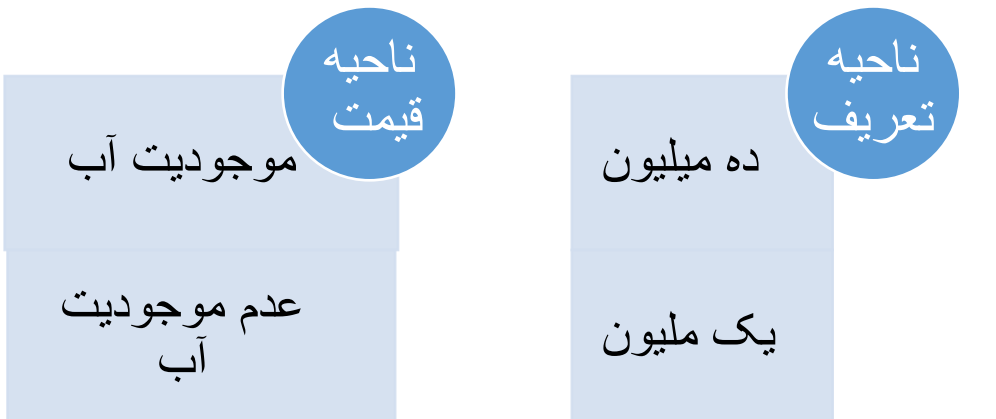
$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)] f(x_i)$$

مثال: یک شرکت شخصی می خواهد یک چاه آب را بالای یک تپه حفر نماید، مصرف چاه آب یک ملیون افغانی تمام می شود. اگر چاه حفر شده آب بدهد، صاحب شرکت ده ملیون افغانی مزد میگیرد در غیر این صورت یک ملیون افغانی ضرر می کند.

الف) این موضوع رابه صورت یک تابع ارائه کنید.

ب) اگر احتمال اینکه چاه حفر شده آب بدهد 0,2 و احتمال عدم آب 0,8 باشد، درین صورت تابع احتمال، اوسط، وریانس و انحراف معیاری متحول تصادفی x را دریافت کنید.

حل الف) توزیع تابع احتمال



حل ب) سایر جزئیات را در جدول زیر قرار ذیل می نویسیم.

$$\begin{aligned}
P(3 \leq m \leq 4) &= \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i \cdot (0.6)^{15-i} \\
&= 3^{15} \cdot (0.4)^3 \cdot (0.6)^{15-3} + 4^{15} \cdot (0.4)^4 \cdot (0.6)^{15-4} \\
&= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512) \\
&= \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} = 0.063365 + 0.012650 \\
\boxed{P(3 \leq m \leq 4) = 0.076015}
\end{aligned}$$

توزیع احتمال پواسن

فرمول پواسن برای محاسبه تقریبی احتمال m اشکال در n آزمایش عبارت اند از.

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

که در آن $\lambda = np$ و $e = 2.71828$

در توزیع پواسن اوسط برابر با واریانس و مساوی به λ است.

مثال: به تعداد 200 نفر مسافر تکت طیاره را گرفته اند. اگر احتمال نیامدن مسافری که تکت گرفته طبق تجارب 0.01 باشد، احتمال اینکه 3 نفر مسافر نیاید چقدر است؟
حل: در این مسئله (نیامدن) کامیابی است و همچنان مشاهده می شود که $n = 200$ به اندازه کافی بزرگ بوده و $P = 0.01$ یعنی احتمال کامیابی به اندازه کافی کوچک است. بنابراین داریم:

$$\lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$\begin{aligned}
P(3) &= \frac{(2.71829)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{7.3890461584} \cdot 8 = \frac{0.13533 \cdot 8}{6} \\
\Rightarrow P &= 0.1804
\end{aligned}$$

در نتیجه احتمال نیامدن 3 مسافر 0.1804 است.

توزیع نورمال

منحنی های توزیع نورمال می توانند به چهار طریق با یک دیگر تفاوت داشته باشد. شکل ریاضی معادله توزیع نورمال که نشان دهنده تابع توزیع احتمال آن $f(x)$ اند، به صورت زیر نوشته می شود.

$$f(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\bar{x}}{s} \right)^2}$$

یا

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

درحالیکه

متحول تصادفی	تابع احتمال	اوسط	انحراف مربعات متحول تصادفی از اوسط خود	ورینانس	انحراف معیاری
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2 = 19.360$	

آزمایش برنولی و توزیع احتمال دو جمله ای

توزیع برنولی را می توان به صورت

$$P(X = m) = p^m (1 - p)^{1-m} = p^m \cdot q^{1-m}$$

نشان داد. در حالیکه P احتمال کامیابی و $q = 1 - p$ احتمال عدم کامیابی می باشد، هرگاه یک آزمایش را n بار تکرار کنیم یک ترادف بدست می آید طوریکه اگر احتمال کامیابی هر آزمایش P و احتمال ناکامی آن q باشد درین صورت احتمال m کامیابی در این n آزمایش عبارت اند از.

$$P(X \leq m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n$$

با درنظر داشت فرمول فوق می توان اوسط توزیع دو جمله ای را به صورت $\bar{x} = np$ و انحراف معیاری این توزیع را به صورت $S = \sqrt{npq}$ ائه نمود.

مثال: احتمال شفایافتن یک مریض از مرض شکر 0.4 است در صورتیکه 15 نفر به این مرض مصاب باشند، چقدر احتمال دارد که صرف 5 نفر شفا یابد و همچنان دریابید که از 3 الی 4 نفر آن شفا یابد.

حل:

$$\begin{aligned}
n &= 15 \quad m = 5 \quad p = 0.4 \quad q = 1 - p = 0.6 \\
P(m = 5) &= \binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10} \\
&= \frac{15!}{5! (15-5)!} \cdot 0.01024 \cdot 0.00604661 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191 \\
&= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859 \Rightarrow \boxed{P = 0.1859}
\end{aligned}$$

مساحت منحنی توزیع نورمال و استندرد کردن آن

نمونه گیری

توزیع اوسط نمونه

قضیه لیمیت مرکزی

توزیع نمونه نسبت

اهداف آموزشی

- شاگردان در ختم این بخش باید قادر گردند تا
- مساحت منحنی توزیع نورمال را دریافت کردن بتوانند.
- نمونه گیری را بدانند و مثال های مربوط به نمونه گیری را حل کرده بتوانند.
- توزیع اوسط نمونه را بدانند.
- قضیه لیمیت مرکزی را درک کنند و مثال های مربوطه را کار نمایند.
- توزیع نمونه نسبت.

مساحت منحنی توزیع نورمال و استندرد کردن آن

برای محاسبه احتمال اینکه متحول تصادفی پیوسته x کمیت بین x_1 و x_2 را اختیار کند قاعدتاً باید تابع توزیع احتمال x انتیگرال گرفت و سطح زیر منحنی را در فاصله x_1 تا x_2 به صورت زیر محاسبه کرد.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} = \int_{x_1}^{x_2} N(x, \bar{x}, s) dx$$

گراف آن قرار ذیل ترسیم می گردد.

عدد ثابت $e = 2.718281828653 \dots$

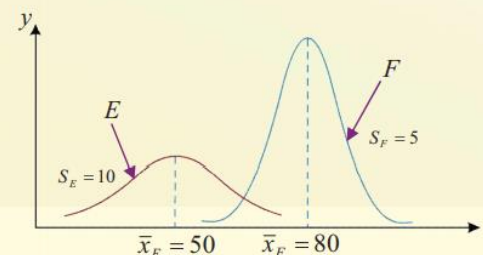
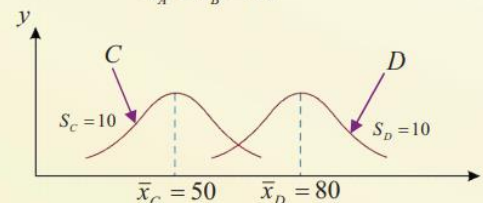
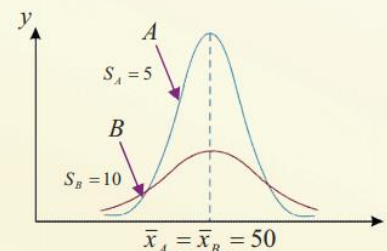
عدد ثابت $\pi = 3.141568 \dots$

اوسط \bar{x}

انحراف معیاری s

و x مقادیر متحول تصادفی پیوسته و $f(x)$ ارتفاع منحنی را نشان می دهد.

چند توزیع نورمال با اوسط و انحراف معیار مختلف مانند اشکال زیر داده شده است:



فعالیت ها

- ❖ توزیع تابع احتمال چیست؟ تعریف کنید.
 - ❖ آزمایش برنولی و توزیع احتمال دو جمله بی را تعریف کنید.
 - ❖ توزیع پواسن چیست؟ فورمول آنرا ارائه کنید.
 - ❖ توزیع نورمال چیست؟ گراف آن را ترسیم کنید.
- آنچه درین بخش خواهیم آموخت

نمونه گیری

برای نمونه گیری روش های مختلف وجود دارد که در ذیل آن ها را می نویسیم.

- نمونه گیری تصادفی: عناصر جامعه همه برای انتخاب شدن هم چانس باشند.
 - نمونه گیری سیستماتیک: عناصر جامعه به صورت منظم شماره گذاری شده باشند.
 - نمونه گیری طبقه ای: جامعه به گروه های متجانس تقسیم شده باشند.
 - نمونه گیری خوشه ای: جامعه خیلی بزرگ باشد، آنرا به خوشه های مختلف تقسیم و از هر خوشه نمونه ای را انتخاب می کنند.
 - هر ویژگی عددی یک جامعه (اوسط و انحراف معیاری) را پارامتر جامعه می گویند.
 - هر ویژگی عددی یک نمونه (اوسط و انحراف معیاری) را آمار می گویند.
- مثال: فرض کنید قوطی دارای 5 گلوله سفید و 7 گلوله سیاه است. از داخل قوطی 5 گلوله را یک، یک و با جاگزینی (انتخاب دوباره یک عنصر مجاز باشد) انتخاب می کنیم. متحول تصادفی انتخاب شده را به زبان متحول تصادفی بیان کنید و توزیع مربوطه آن ها را بیابید.
- حل:

سه متحول تصادفی x_1 ، x_2 و x_3 را در نظر بگیرید. متحول تصادفی x_1 عدد صفر را برای انتخاب گلوله

سیاه در مرحله اول و عدد یک را برای انتخاب گلوله سفید در مرحله اول، اختیار می کند، متحول x_2 نیز عدد صفر را برای انتخاب گلوله سیاه در مرحله دوم و عدد یک را برای انتخاب گلوله سفید در مرحله دوم اختیار می کند. همچنین متحول تصادفی x_3 نیز قرار فوق انتخاب می شود. درین صورت هر یک از متحول های تصادفی x_1 ، x_2 و x_3 یک متحول تصادفی برنولی است.

پارامتر $p = \frac{5}{12}$ را برای مقادیر $i = 1, 2, 3$ داریم $x_i = 0, 1$

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

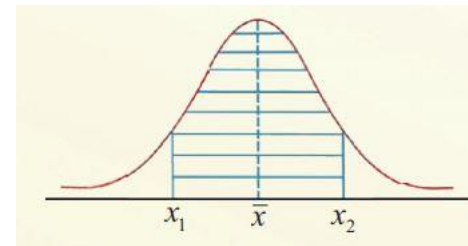
چون نمونه گیری تصادفی است پس متحول تصادفی x_1 ، x_2 و x_3 مستقل از یک دیگر اند بنابراین تابع مربوطه عبارت اند از.

$$f(x_1, x_2, x_3) = P(x_1 = x_1, x_2 = x_2, x_3 = x_3)$$

توزیع اوسط نمونه

اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه تابع احتمال $f(x)$ باشد در این صورت، توزیع احتمال نمونه تصادفی عبارت اند از.

x	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	\dots	$\frac{1}{n}$



متاسفانه محاسبه توزیع احتمال نورمال کار ساده نیست و برای محاسبه سطح زیر منحنی توزیع های نورمال ضرورت به جدول طولانی است که عملاً این کار مشکل است. و خوشبختانه می توان شکل تهیه جدول را به وسیله معیاری ساختن داتای احصائیوی حل کرد. بدین معنا که می توان قیمت های مربوط به متحول تصادفی x را که دارای توزیع نورمال است توسط رابطه زیر معیاری نمود.

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

درینجا z بنام متحول معیاری نورمال و منحنی را بنام منحنی نورمال معیاری شده یا منحنی احتمال نورمال می نامند.

مثال: دستگاه پرکننده بوتل های نوشابه طوری تنظیم شده است که 952 ملی لیتر نوشابه را به داخل بوتل می ریزد. این میزان نوشابه دارای توزیع نورمال با اوسط 952 ملی لیتر و انحراف معیاری 4 لیتر است. احتمال اینکه بوتل بین 952 تا 956 ملی لیتر نوشابه داشته باشد چقدر است؟

حل: ابتداء z را از جنس x دریافت می کنیم.

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ناحیه تعریف x از 952 تا 956 به ناحیه تعریف z از 0 تا 1 تبدیل می شود. با استفاده از جدول (2) داریم که

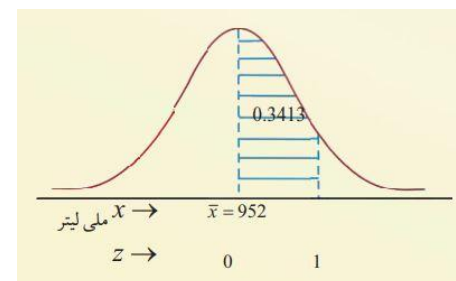
$$P(0 \leq z \leq 1) = P(z_2) - P(z_1)$$

احتمال این است که بوتل حاوی 952 تا 956 ملی لیتر نوشابه باشد یا به عبارت دیگر 34.13 فیصد بوتل های پر شده دارای 952 تا 956 ملی لیتر نوشابه باشد.

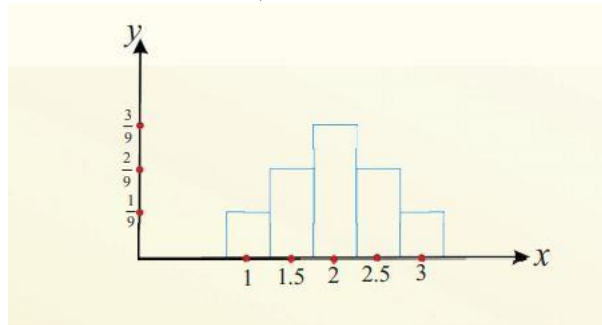
$$P(0 \leq z \leq 1) = P(z_2) - P(z_1)$$

$$= P(1) - P(0) = 0.3413 - 0$$

$$P(0 \leq z \leq 1) = 0.3413$$



گراف مستطیلی \bar{x} قرار ذیل ترسیم می گردد.



د:

$$\mu_{\bar{x}} = E(\bar{x}) = \sum \bar{x}f(\bar{x}) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 1.5 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 2.5 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

$$E(\bar{x}^2) = \sum \bar{x}^2 f(\bar{x}) = 1^2 \cdot \frac{1}{9} + (1.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{3}{9} + (2.5)^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{13}{3}$$

$$\delta_{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - (E(\bar{x}))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$$

$$E(x) = E(\bar{x}) = 2$$

$$V(\bar{x}) = \frac{\delta_x^2}{n} = \frac{\frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{9}$$

طوریکه دیده می شود:

قضیه لیمیت مرکزی

اگر از یک جامعه بزرگ N با اوسط متناهی μ و واریانس متناهی δ^2 یک نمونه تصادفی n تایی انتخاب کنیم در این صورت اوسط نمونه یعنی \bar{x} دارای توزیع تقریباً نورمال با اوسط $\mu_{\bar{x}} = \mu$ و واریانس

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n} \quad \text{و متحول تصادفی } z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} \text{ دارای توزیع نورمال معیاری است. در حالیکه ضریب}$$

$$\frac{N - n}{N - 1}$$

برای قیمت های بزرگ N به عدد 1 نزدیک شود در حقیقت لیمیت وقتی که $n \rightarrow \infty$ مساوی به یک است.

مثال: نمرات مضمون شاگردان در یک صنف بزرگ دارای توزیع نورمال با اوسط 71 و انحراف معیاری 9 است. یک نمونه 9 تایی انتخاب می کنیم. احتمال این را که اوسط نمرات این نمونه بیشتر از 80 باشد حساب کنید. همچنان اگر یک شاگرد را به طور تصادفی انتخاب کنیم، درین صورت احتمال آن را که نمره او بیشتر از 80 باشد محاسبه کنید.

$$E(\bar{x}_n) = \mu, \quad \bar{x}_n \text{ متحول}$$

$$V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta^2, \quad \bar{x}_n \text{ متحول}$$

$$S_n^2 = \delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{وریانس نمونه}$$

$$E(S^2) = \delta^2 \quad \text{اوسط وریانس نمونه}$$

مثال: از جامعه زیر، تمام نمونه های تصادفی دو تایی ممکنه را با جای گزینی انتخاب می کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x = 1, 2, 3$$

الف: توزیع احتمال x را بنویسید.

ب: اوسط و واریانس جامعه را حساب کنید.

ج: جدول توزیع \bar{x} را تشکیل و گراف مستطیلی آن را رسم کنید.

د: $E(\bar{x})$ و $V(\bar{x})$ را حساب کنید.

حل:

الف:

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

ب:

$$\mu = E(x) = \sum_{x=1}^3 x f(x) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^3 x^2 f(x) = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + 3^2) = \frac{14}{3}$$

$$\delta_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}$$

ج: جدول زیر تمام نمونه های دو تایی ممکن با جاگزینی و اوسط هر یک را نشان می دهد.

نمونه	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,1)	(3,3)
\bar{x}	1	1.5	2	1.5	2	2.5	2	2.5	3

جدول توزیع کثرت \bar{x} به شکل زیر ارائه می شود.

\bar{x}	1	1.5	2	2.5	3
$f(\bar{x})$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

با استفاده از جدول توزیع دوجمله‌ی بی احتمال‌های فوق را محاسبه و جدول توزیع احتمال را می‌نویسیم.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,1176	0,3025	0,3241	0,0595	0,0102	0,0007

متحول تصادفی \hat{P} قیمت‌های $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ و 1 را اختیار می‌کند.

$$P(\hat{P} = 0) = P(X = 0) = 0.1176$$

$$P\left(\hat{P} = \frac{1}{6}\right) = P(X = 1) = 0.3025$$

$$P\left(\hat{P} = \frac{x}{6}\right) = P(X = x)$$

و توزیع احتمال \hat{P} عبارت‌اند از:

\hat{P}	0	1.6	2.6	3.6	5.6	1
$f(\hat{P})$	0.1176	0.3025	0.3241	0.0595	0.0102	0.0007

در مثال بالا: $P(\hat{P} \leq 0.6) = P(x \leq 3.6) = P(x \leq 3) = \sum_{x=0}^3 B(x, 6, 0.3) = 0.9294$

و یا $P(\hat{P} \leq 0.27) = P(x \leq 1.62) = P(x \leq 1) = 0.1176 + 0.3025 = 0.4201$

فعالیت‌ها

- ✚ مساحت منحنی توزیع نورمال چیست؟ و چگونه دریافت می‌گردد.
- ✚ استاندارد سازی توزیع نورمال را تشریح کنید.
- ✚ نمونه‌گیری چیست؟
- ✚ توزیع اوسط نمونه چیست؟
- ✚ قضیه لیمیت مرکزی را تشریح کنید.
- ✚ توزیع نمونه نسبت چیست؟
- ✚ مثال‌های مربوط به هریخش را کار کنید.
- ✚ آنچه قرار است درین بخش بیاموزیم

حل:

چون \bar{x} دارای توزیع نورمال با اوسط μ و انحراف معیاری می‌باشد داریم:

$$P(\bar{x} > 80) = P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9}\right) = P(z > 3)$$

$$= 1 - P(z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

$$P(\bar{x} > 80) = P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} > \frac{80 - 71}{9}\right) = P(z > 1)$$

$$= 1 - P(z \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

توزیع نمونه نسبت

اگر x متحول تصادفی، n مجموعه آزمایش‌های برنولی و P احتمال موفقیت هر آزمایش باشد در این صورت $\hat{P} = \frac{x}{n}$ آماره نسبت نمونه، $E(x) = np$ اوسط و $V(x) = npq$ واریانس متحول تصادفی x می‌باشند.

با توجه به توزیع دو جمله‌ای می‌توان توزیع \hat{P} را توسط فورمول:

$$f(n\hat{P}) = \binom{n}{n\hat{P}} P^{n\hat{P}} (1-p)^{n(1-\hat{P})} \quad \hat{P} = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$$

اوسط و واریانس متحول تصادفی \hat{P} به این صورت است:

$$\mu_P = E(\hat{P}) = P \quad \text{اوسط}$$

$$\delta^2 \hat{P} = V(\hat{P}) = \frac{pq}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$$

توزیع‌های نورمال معیاری عبارت‌اند از.

$$z = \frac{x - np}{n} = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

مثال: احتمال مرغوب بودن کالای $P = 0,3$ است. یک نمونه تصادفی ساده $n = 6$ تایی را انتخاب می‌کنیم. اگر x نشان دهنده تعداد کالاهای ناقص باشد، توزیع احتمال x و \hat{P} را بنویسید.

حل:

متحول‌های تصادفی x دارای توزیع دو جمله‌ی بی با پارامترهای $P = 0.3$ و $n = 6$ می‌باشد.

$$f(x) = P(X = x) = B(x, 6, 0.3) \quad x = 0, 1, \dots, 6$$

الف و ج از تعداد محدود عضو تشکیل گردیده است بناً یک فضای نمونه گسسته اند و ب، د و ه که از اعداد حقیقی تشکیل گردیده است بناً فضای نمونه پیوسته و محدود اند.

حوادث هم چانس

حوادث ساده اولیه که احتمال وقوع آنها در اثر انجام یک تجربه با هم برابر باشد بناً حوادث هم چانس یاد می گردند.

مثال: 4 نفر در یک مسابقه شرکت می کنند، احتمال برنده شدن هر کدام آنها در صورت فضای نمونه همچانس مطلوب است.

حل: هرگاه فضای نمونه $S = \{a, b, c, d\}$ باشد، احتمال هر حادثه اتفاقی اولیه $\frac{1}{4}$ می باشد در آن صورت داریم که:

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

ازینرو حوادث اتفاقی a, b, c, d همچانس اند.

احتمال فضاهای پیوسته

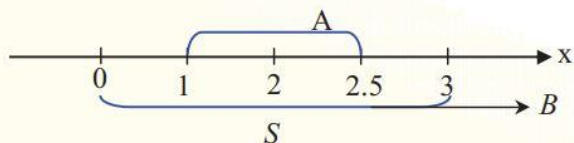
فضای نمونه پیوسته مجموعه نامحدود از نقاط می باشد که شکل محور اعداد حقیقی، سطح در مستوی و یا احجام در فضا می باشد. چون نمایش این نقاط ممکن نیست بناً برای پیدا کردن نسبت احتمال از طول قطعه خط ها، سطوح اشکال و یا حجم اجسام استفاده می نمائیم.

معمولاً برای استفاده از محور اعداد یک متحول x ، قسمتی از یک مساحت از دو متحول x و y و بالآخره برای احجام از متحولین x ، y و z استفاده می نمائیم.

مثال: روی محور اعداد در انتروال باز $(0,3)$ یک نقطه مانند x را به صورت اتفاقی انتخاب می نمائیم. احتمال اینکه $1 < x < 2.5$ باشد دریافت کنید.

حل: محور اعداد حقیقی را رسم نموده فواصل S و A را روی آن مشخص نمائیم بنابراین با در نظر داشت شکل برای احتمال حادثه A داریم که.

$$P(A) = \frac{\text{طول قطعه خط } A}{\text{طول قطعه خط } B} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$



حوادث همچانس

فضای نمونه گسسته و پیوسته

اصل حاصل ضرب

احتمال فضاهای پیوسته

استقلالیت حوادث اتفاقی

اهداف آموزشی

درختم این بخش شاگردان قادر گردد تا:

- ✓ فضای نمونه گسسته و پیوسته را بشناسد.
- ✓ حوادث هم چانس را بشناسد.
- ✓ احتمال فضاهای پیوسته.
- ✓ اصل حاصل ضرب را بدانند.
- ✓ استقلالیت حوادث اتفاقی را بشناسد.
- ✓ مثال های مربوطه را حل کرده بتوانند.

فضای نمونه گسسته و پیوسته

فضاهای نمونه ای یک تجربه اتفاقی عبارت از مجموعه معین یا محدود و یا نامعین یا غیر محدودی اند که یک دسته آنها قابل شمارش و دسته دیگر آنها غیر قابل شمارش می باشد. فضای نمونه که عناصر آن قابل شمارش و تشخیص اند به نام فضای نمونه گسسته و فضای نمونه که عناصر آن که عناصر آنها قابل شمارش نیستند به نام فضای نمونه متمادی یا پیوسته یاد می شود.

مثال: کدام یکی از فضاهای نمونه ذیل پیوسته و کدام یک آنها گسسته است.

- ✓ پرتاب دو دانه رمل.
- ✓ انتخاب یک عدد حقیقی بین 8 و 12
- ✓ انتخاب سه نفر متعلم از بین 30 نفر شاگرد.
- ✓ بالا رفتن درجه حرارت یک کوره از 100 درجه به 1000 درجه سانتی گراد.
- ✓ انتخاب زاویه بین 30 تا 45 درجه

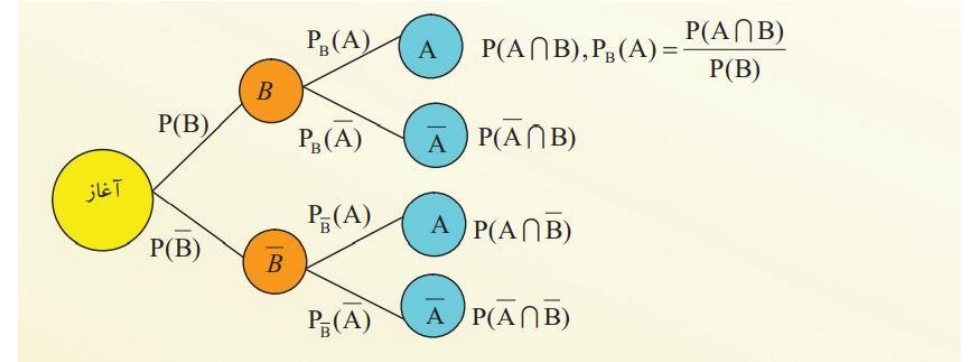
حل:

احتمال مشروط

تعریف: هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشد طوری که $P(B) \neq 0$ در این صورت احتمال مشروط $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ به نام احتمال مشروط حادثه اتفاقی A نظر به حادثه اتفاقی B

یاد می گردد.

با در نظر داشت تعریف فوق نظر به قاعده اول مسیر از دیاگرام های درختی نیز می توانیم آن را به دست آوریم.



از فورمول احتمال مشروط، نتیجه مهم زیر به دست می آید.

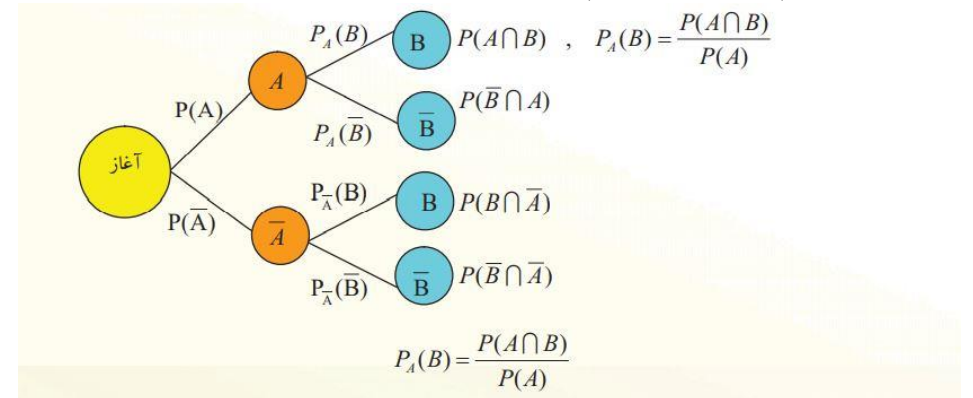
1. با استفاده از قاعده اول مسیر داریم و با استفاده از قاعده دوم مسیر داریم.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2. از روی دیاگرام درختی زیر میدانیم که.



مثال: یک شاگرد 50% روزهای رفتن به مکتب را از سرویس استفاده می کند که با احتمال 70% به وقت معینه به مکتب می رسد. به طور اوسط موصوف با احتمال 60% به وقت معینه حاضر به مکتب می شود، هرگاه حوادث

- به وسیله سرویس رفتن

- به وقت معینه رسیدن

باشد احتمال مشروط A نظر به B یعنی $P_B(A)$ مطلوب است.

حل:

برای دریافت احتمال مذکور با استفاده از فورمول و دیاگرام درختی داریم که.

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$

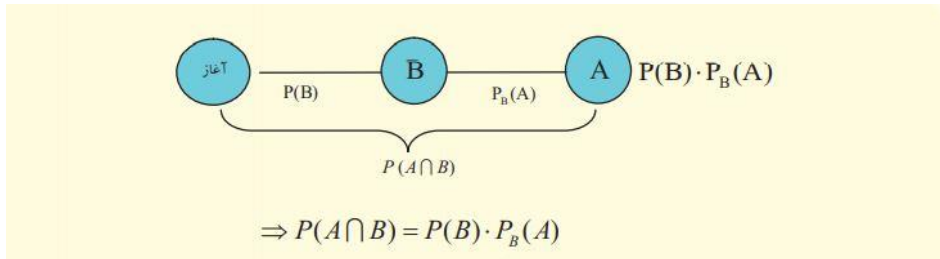
بنابراین احتمال رسیدن به وسیله سرویس مشروط بر اینکه به وقت معینه در مکتب باشد 58.33% است.

اصل حاصل ضرب

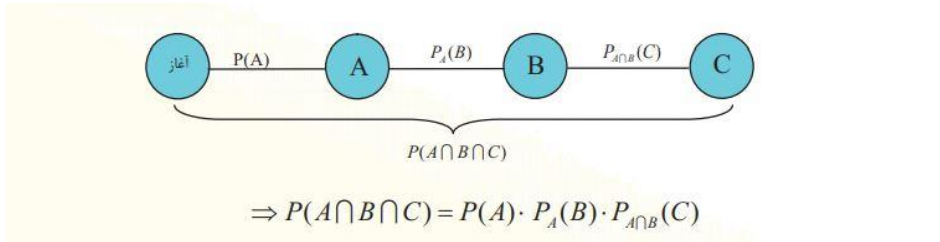
در یک فضای نمونه S برای دو حادثه اتفاقی A و B با در نظر داشت تعریف احتمال مشروط داریم:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

این مسئله را از گراف درختی نیز می توان بدست آورد.



این مطلب برای سه حادثه اتفاقی A و B و C به شکل زیر توسعه می یابد.



قاعده فوق را به نام اصل حاصل ضرب یاد نموده و می توان آنرا برای تعداد حوادث اتفاقی نیز بدست آورد.

تعریف: حالت عمومی حوادث B_1, B_2, \dots, B_n طوری که $P(B_i) \neq 0$ باشد طوری که $i = 1, 2, 3, \dots, n$ یک حادثه اتفاقی فضایی نمونه S می باشد. که احتمال کامل را تشکیل می دهد و برای حادثه اتفاقی اختیاری A داریم ک

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

از تعریف احتمال مشروط، نظر به قضیه اصل حاصل ضرب با در نظر داشت مسئله احتمال فورمول زیر که بنام فورمول بایز $Bayes$ یاد می شود به آسانی بدست می آید طوری که $i = 1, 2, 3$ یک حادثه اتفاقی از فضای نمونه S برای $P(B_i) \neq 0$ و $i = 1, 2, 3, \dots$ حادثه اتفاقی A با احتمال $P(A) \neq 0$ داریم.

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

استقلالیت حوادث اتفاقی

تعریف: دو حادثه اتفاقی A و B که بالای همدیگر تاثیر گذار نباشند به نام حوادث اتفاقی مستقل یاد می گردند.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 1: هرگاه رنگ چشم و ذکاوت شاگردان یک مکتب را که یکی بالای دیگری تاثیر فرض گردیده باشند، با در نظر داشت حوادث زیر برای انتخاب یک شاگرد به صورت اتفاقی

- فرد انتخاب شده یک شاگرد ذکی باشد.
- شاگرد انتخاب شده دارای چشمان سیاه باشد.

دریافت کنید احتمال آنکه شاگرد انتخاب شده به صورت اتفاقی ذکی و چشمان سیاه داشته باشد.

حل 1:

احتمال اینکه شاگرد انتخاب شده ذکی و چشمان سیاه داشته باشد:

چون $P_B(H) = P(H)$ و علاوتاً $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ بنا برین

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

حالت عمومی: n حادثه اتفاقی A_1, A_2, \dots, A_n احتمالاً از هم مستقل نامیده می شوند هرگاه برای هر ترکیب دو یا چندین حادثه آنها قاعده حاصل ضرب صدق کند، در غیر آن حوادث احتمالاً باهم وابسته نامیده می شود.

مثال: در انتخابات پارلمانی سه ولایت B_1, B_2, B_3 که برای هر کدام آن فیصدی مشترکین انتخابات و حزب جمهوری داده شده است؛ با کدام احتمال مشترکین انتخابات و یا رای دهنده گان حزب جمهوری را انتخاب کرده اند؟

حل:

حوادث اتفاقی زیر را تعریف و نامگذاری می نمائیم.

- V : رای دهنده گان که به حزب جمهوری رای داده اند.

- B_i : رای دهنده گان ولایت $B_i, i = 1, 2, 3, \dots$ ارقام در جدول ذیل آماده است.



حوادث اتفاقی $B_i, i = 1, 2, 3, \dots$ در حقیقت یک تقسیم فضای نمونه S را تشکیل داده که برای آنها صورت می پذیرد.

1. B_i ها باهم دو به دو مستقل و عنصر مشترک ندارد.

2. نمونه فضای برای S

$$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$$

بوده، سپس حادثه

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

ازین رابطه می توان برای احتمال طرفین بنویسیم

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left(\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right) = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 \\ &= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 \\ &= 0.2794 = 27.94\% \end{aligned}$$

حالت عمومی

مثال 2: در داخل یک خریطه دو گوله سفید و دو گوله سیاه قرار دارند، دو گوله یکی پی دیگری از آن می برداریم طوری که:

1- با گرفتن اولین گوله، آن را پس به داخل خریطه می گذاریم.

2- بدون آنکه گوله واپس قرار داده شود.

حوادث:

- اولین بار گوله سفید برآید.

- دومین بار گوله سفید برآید.

- از هم مستقل یا وابسته اند.

(حل a)

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ازینجا گفته می توانیم که A و B از هم مستقل اند.

(حل b)

$$P(A) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$$

(حل c) حوادث A و B باهم وابسته است.