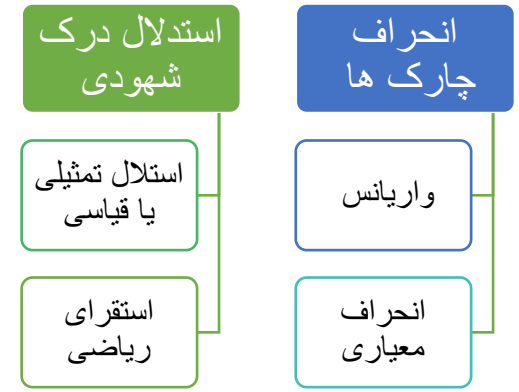


راهنمای آموزشی ریاضی صنف دهم - دور سیزدهم

آنچه درین بخش است قرار است بیاموزیم



اهداف آموزشی: در ختم این بخش شاگردان باید قادر گردند تا

- ❖ انحراف چارک ها شناخته و آنرا تعریف کرده بتوانند.
- ❖ واریانس را تعریف بتوانند.
- ❖ انحراف معیاری را بشناسند.
- ❖ استدلال درک شهودی را تعریف کرده بتوانند.
- ❖ استدلال تمثیلی یا قیاسی را تعریف کرده بتوانند.
- ❖ در مورد استقرای ریاضی معلومات کافی بدست بیاورند.
- ❖ مثال های مربوط به موضوعات درسی را حل کرده بتوانند.

انحراف چارک ها

انحراف چارک ها یکی از شاخص های نشان دهنده پراکندگی داتا است، زیرا از روی تعریف چارک اول و سوم بر می آید که 50% جامعه در فاصله  $Q_3 - Q_1$  قرار دارند. هر قدر این فاصله کوچک تر باشد، داتا جمع تر و به عبارت دیگر پراکندگی آن ها کم تر است.

انحراف چارک ها  $Q = Q_3 - Q_1$

گاهی انحراف چارک ها را به شکل ذیل نیز نشان می دهد.

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

مثال: انحراف چارک های اعداد ذیل را دریافت نمائید.

35 29 30 31 25 24 23 22 22 20 36

حل: نخست داتای داده شده را ترتیب می کنیم.

$\underbrace{20}_1 \quad \underbrace{22}_2 \quad \underbrace{22}_3 \quad \underbrace{23}_4 \quad \underbrace{24}_5 \quad \underbrace{25}_6 \quad \underbrace{29}_7 \quad \underbrace{30}_8 \quad \underbrace{31}_9 \quad \underbrace{35}_{10} \quad \underbrace{36}_{11}$

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$\Rightarrow C_{Q_3} = 8.75 \Rightarrow Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$\Rightarrow C_{Q_1} = 3.25 \Rightarrow Q_1 = 22.25$$

انحراف چارک ها عبارت اند از.

$$Q = Q_3 - Q_2 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس

واریانس عبارت از اوسط جذر مربع انحراف ها از اوسط اند.

برای دریافت واریانس مراحل ذیل را باید انجام داد.

➤ اگر داتا ها  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  باشند، اوسط داتا ها را دریافت می کنیم. یعنی

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

➤ مجموع مربع های انحراف را دریافت می کنیم. یعنی

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$$



واحد انحراف معیاری یا پراکندگی مطلق همان واحد متحول است.

مثال: درجه حرارت بدن 5 مریض در زیر داده شده است.

38 39 39 40 41

انحراف معیاری آن را حساب کنید.

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

انحراف معیاری  $S = \sqrt{1.04} = 1.01980$

**استدلال درک شهودی**

تعریف: فهمم غریزه وی یا احساس که به وسیله آن صحت و یا حقیقت یک موضوع و یا یک مفهوم را بدون استدلال قبول می‌کنیم عبارت از درک شهودی بوده که در مواقع مختلف زمان، می‌تواند از هم متفاوت باشد.

نتیجه گیری حاصل از درک شهودی نمی‌تواند همواره نتیجه گیری صحیح را به دنبال داشته باشد، اما می‌تواند پایه گذار احکام و قضایای درست باشد.

مثال: با استدلال درک شهودی به سهولت می‌توان حکم کرد که دو خط موازی یک دیگر را قطع نمی‌کنند، بپذیریم.

چون در پذیرش این مساله استدلالی بکار نرفته است و در واقع یک احساس است که بر اساس آن این حکم صورت می‌پذیرد. این گونه نتیجه گیری را بنام درک شهودی یاد می‌نمایند.

وارینانس را به  $S^2$  نشان می‌دهد از رابطه ذیل دریافت می‌گردد.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

مثال: واریانس داتای ذیل را دریافت نمائید.

1 5 6 7 9

حل:

$$\bar{x} = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

$S^2 = 7.04$  واریانس

نکته: اگر داتا دسته بندی شده با مرکز دسته های  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$  و با کثرت های  $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  داده شده باشند، برای محاسبه واریانس بهتر است از فورمول زیر استفاده نمائیم.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

**انحراف معیاری**

انحراف معیاری که با سمبول  $S$  نشان داده می‌شود، برابر به جذر مربع واریانس است. یعنی

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$



**استدلال تمثیلی یا قیاسی**

تعریف: یافتن شباهت بین دو پدیده و نتیجه گیری در باره آن ها را استدلال تمثیلی یا قیسی می نامند.

مثال 1: مثل عامیانه {مارگزیده از ریسمان ابلق می ترسد} یک استدلال قیاسی است؛ زیرا ریسمان ابلق با مار مقایسه شده است و بین آنها شباهتی دیده می شود.

مثال 2: مثلاً از تمثیل و قیاس برای درک این حقیقت که حاصل ضرب منفی در منفی یک عدد مثبت و حاصل ضرب مثبت در منفی یک عدد منفی است استفاده می کنیم.

هرگاه لایق بودن یک شاگرد را به مثبت (+) و نالایق بودن او را به منفی (-) نشان دهیم داریم که

لایق	است = مثبت	لایق	نیست = منفی
+	= +	+	= -
نالایق	است = منفی	نالایق	نیست = مثبت
(-)	= (+)	-	= -

**استدلال استقرایی**

استدلال استقرایی عبارت از روش نتیجه گیری ملی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است. در واقع تعمیم دادن خاصیتی در مورد یک نمونه کوچک به نمونه بزرگ است.

مثال: مشت نمونه خروار است. به استدلال استقرایی اشاره می کند؛ زیرا در این مثال از یک نمونه کوچک، نتیجه گیری مشخصی در مورد کل مجموعه گرفته می شود. در واقع بر پایه و تعداد محدودی از مشاهدات از مساله نتیجه گیری شده است، بنا برین از استدلال استقرایی کار گرفته شده است.

**استقرایی ریاضی بازی دو مینو**

هرگاه  $P(n)$  حکمی در باره اعداد طبیعی  $n$  داده شده باشد با مطالعه حکم در برابر  $n = 1$  یعنی اگر  $P(1)$  درست باشد و در قدم دوم ما درستی  $P(k)$ ، درستی  $P(k + 1)$  را به حیث نتیجه درست به دست می آوریم، درین این صورت ادعای  $P(n)$  برای هر عدد طبیعی  $n$  نیز درست می باشد.

مثال: نشان دهید که  $P(n) = 4^{2n} - 1$  برای هر عدد طبیعی  $n$  بر 5 پوره قابل تقسیم است.

حل: ادعا برای  $n = 1$  درست است؛ زیرا:

$$n = 1, P(1) = 4^{2 \cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

دیده می شود که  $P(1) = 15$  بر 5 پوره قابل تقسیم است.

برای عدد طبیعی  $k$  قبول می کنیم که ادعای فوق صدق می کند؛ یعنی:

$$P(k) = 4^{2k} - 1$$

بر 5 پوره قابل تقسیم است، بنابراین چون قابل تقسیم بر 5 است؛ می توانیم آنرا به شکل زیر بنویسیم.

$$P(k) = 4^{2k} - 1 = 5r \dots \dots \dots *$$

می خواهیم نشان دهیم که برای  $n = k + 1$  نیز ادعای مذکور درست است؛ بنا برین داریم که:

$$n = k + 1, P(k + 1) = 4^{2(k+1)} - 1 \dots \dots \dots **$$

اطراف رابطه اول را ضرب  $4^2$  نموده داریم که:

$$4^2(4^{2k} - 1) = 5r \cdot 4^2$$

$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r \cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot (5r)$$

$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

طرف راست رابطه فوق یعنی  $5(3 + 16r)$  نشان می دهد که قابل تقسیم بر 5 است و ازین رو به نتیجه می رسیم که  $P(k + 1) = 4^{2(k+1)} - 1$  بر 5 پوره قابل تقسیم است.

## استدلال استنتاجی

با استفاده از حقایق که درستی آن را در قدم نخست پذیرفتیم، نتیجه عمومی تری را بدست آورده که بنام استدلال استنتاجی یا روش نتیجه گیری یاد می‌گردد.

به عبارت دیگر استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایق است که درستی آن‌ها را ثبوت و یا پذیرفته باشیم.

از استدلال استنتاجی زمانی استفاده می‌گردد که مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

مثال: به جدول ترتیب شده ذیل توجه کنید.

12	7	4	یک عدد را به صورت اختیاری انتخاب کنید.
17	12	9	به عدد مذکور عدد 5 را اضافه کنید
34	24	18	نتیجه را دو چند نمائید.
30	20	14	از نتیجه حاصله عدد 4 را کم کنید
15	10	7	عدد را بر 2 تقسیم نمائید
3	3	3	عددی که در اول انتخاب کرده بودید از عدد کم کنید

نکته اساسی که به نظر می‌خورد این است که ما در حقیقت بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول داریم، نتیجه بعدی را به دست آوردیم.

## استدلال مثال نقض

هرگاه مثالی نشان دهیم که نتیجه گیری کلی نادرست و یا غلط است، نادرستی ادعا را نشان داد که به نام مثال نقض یاد می‌شود.

مثال: برای اثبات مساله کافی است نشان دهیم که اعداد  $x$  و  $y$  وجود دارد که غیر ناطق بوده؛ اما مجموع آنها  $x + y$  ناطق است.

حل: اعداد  $x = 1 + \sqrt{2}$  و  $y = 1 - \sqrt{2}$  را انتخاب نمائیم داریم که

$$x + y = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 1 + 1 = 2$$

$$x + y = 2$$

دیده می‌شود که حاصل جمع آنها، یعنی عدد 2 یک عدد ناطق است.

## برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم

هرگاه با فرضیه یا قبولی عکس ادعا یک قضیه یا مساله، به نتیجه خلاف فرضیه برسیم؛ در این صورت فرض ما درست بوده که خلاف آن درست است، این گونه استدلال را بنام برهان خلف یا ثبوت غیر مستقیم می‌نامند.

مثال: نشان دهید که اگر  $n^2$  یک عدد جفت طبیعی باشد، عدد  $n$  نیز جفت است؟

حل: به خاطر ثبوت مساله فرض می‌کنیم که با وجود جفت بودن  $n^2$  عدد  $n$  تاق باشد؛ پس می‌توان آن را به شکل  $n = 2k + 1$  بنویسیم؛ در حالیکه  $k$  یک عدد تام است، در نتیجه برای مربع عدد مذکور داریم که:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که  $n^2$  یک عدد تاق است. در حالیکه خلاف فرضیه بوده در نتیجه فرضیه بالا برای این که عدد  $n$  یک عدد تاق است نادرست بوده و به این نتیجه می‌رسیم که  $n$  یک عدد جفت است.

## منطق ریاضی و استنتاج بیان

یک جمله خبری به نام بیان یاد می‌گردد، هرگاه نتیجه آن به درست؛ یا نادرست به انجامد.

اگر یک بیان را  $P$  بنامیم، در این صورت طرز نوشته  $P \equiv T$  برای بیان درست و طرز نوشته  $P \equiv F$  برای بیان نادرست استعمال می‌گردد.

بر علاوه آن  $\sim P$  نفی بیان  $P$  می‌باشد.

## ترکیب بیان‌ها

اگر  $P$  و  $q$  دو بیان باشد، روط ذیل بین آنها را در نظر داشته باشید.

1. ترکیب  $p \wedge q$  را بنام ترکیب عطفی بیان‌ها می‌نامند. این ( $\wedge$ ) علامه (و) عطفی است.

2. ترکیب  $p \vee q$  را بنام ترکیب فصلی بیان‌ها می‌نامند. این ( $\vee$ ) علامه (یا) فصلی است.

3. ترکیب  $q \Rightarrow p$  بنام ترکیب مشروط بیان ها یاد می شود. این ( $\Rightarrow$ ) علامه مشروط است.

4. ترکیب  $q \Leftrightarrow p$  بنام ترکیب مشروط دو طرفه یاد می گردد.

مثال: هرگان بیان های  $p \equiv (2 + 4 = 6)$  و  $q \equiv$  (مربع عدد که منفی نباشد) داده شده باشد، نتیجه بیان های  $p, q, \sim p, \sim q, p \wedge q, p \vee q, \sim(p \wedge q), \sim(p \vee q)$  را دریافت کنید.

حل:

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$	$F$

فعالیت ها:

- انحراف چارک ها چیست؟
- یک مثال از انحراف چارک ها کار نمائید.
- واریانس چیست؟ و تفاوت واریانس با انحراف معیاری چیست؟
- انحراف معیاری چیست؟
- تفاوت بین چارک ها، واریانس و انحراف معیاری را مشخص کنید.
- استدلال یعنی چه؟
- استدلال درک شهودی روی کدام قضیه ها کار می شود؟
- استدلال استقرایی چیست؟
- منطق ریاضی چیست؟