

راهنمایی آموزشی ریاضی صنف دوازدهم – دور سیزدهم



اهداف آموزشی

در پایان درس شاگردان باید قادر گردد تا

- توزیع تابع احتمال را بدانند و تعریف کرده بتوانند.
- آزمایش برنولی را انجام داده بتوانند.
- توزیع احتمال پواسن را تعریف کرده بتوانند.
- توزیع نورمال را بدانند.
- مثال های مربوط به موضوعات فوق را حل کرده بتوانند.

توزیع تابع احتمال

توزیع تابع احتمال که در احصائیه و احتمالات مورد بحث قرار می گیرد عبارت از تابع است که ناحیه اعریف آن فضای نمونه و ناحیه قیمت های آن اعداد حقیقی است.

- اگر $P(X = x_i) = f(x_i)$ داشته باشیم در این صورت جوهره های مرتب $[x_1, f(x_1)][x_2, f(x_2)][x_3, f(x_3)] \dots [x_n, f(x_n)]$ تابع احتمال مجزا یا گسسته می گویند.
- تابع احتمال پیوسته و تجمعی را می توان به شکل $F(x) = P(X \leq x)$ ارائه نمود.

- اگر $f(x)$ تابع احتمال و x متحول تصادفی باشد، درین صورت احتمال اینکه x بین k_1 و k_2 قرار گیرد برابر است با

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

○ اگر x متحول تصادفی پیوسته و $k_1 < k_2$ باشد درین صورت:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

○ اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت اوسط یک متحول تصادفی x که به $E(x)$ نشان داده می شود برابر است به:

$$E(x) = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \dots + x_nf(x_n) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

$E(x)$ اوسط x نامیده می شود که آنرا به \bar{x} نشان می دهیم و همچنان اگر x متحول تصادفی گسسته باشد در این صورت وریانس x که به شکل S^2 نشان داده می شود مساوی است به

$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x_i)]f(x_i)$$

مثال: یک شرکت شخصی می خواهد یک چاه آب را بالای یک تپه حفر نماید، مصرف چاه آب یک میلیون افغانی تمام می شود. اگر چاه حفر شده آب بدهد، صاحب شرکت ده میلیون افغانی مزد میگیرد در غیر این صورت یک میلیون افغانی ضرر می کند.

الف) این موضوع را به صورت یک تابع ارائه کنید.

ب) اگر احتمال اینکه چاه حفر شده آب بدهد 0,2 و احتمال عدم آب 0,8 باشد، درین صورت تابع احتمال، اوسط، وریانس و انحراف معیاری متحول تصادفی x را دریافت کنید.

حل الف) توزیع تابع احتمال

مثال: احتمال شفایافتن یک مریض از مرض شکر 0.4 است در صورتی که 15 نفر به این مرض مصاب باشند، چقدر احتمال دارد که صرف 5 نفر شفا یابد و همچنان دریا بید که از 3 الی 4 نفر آن شفا یابد.

حل:

$$n = 15 \quad m = 5 \quad p = 0.4 \quad q = 1 - p = 0.6$$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} p^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 (0.6)^{10}$$

$$= \frac{15!}{5! (15-5)!} \cdot 0.01024 \cdot 0.00604661 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859 \Rightarrow \boxed{P = 0.1859}$$

$$P(3 \leq m \leq 4) = \sum_{i=3}^4 \binom{15}{i} (0.4)^i \cdot (0.6)^{15-i}$$

$$= 3^{15} \cdot (0.4)^3 \cdot (0.6)^{15-3} + 4^{15} \cdot (0.4)^4 \cdot (0.6)^{15-4}$$

$$= \frac{2730}{6} (0.000139264) + \frac{3270}{24} (0.0000928512)$$

$$= \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24} = 0.063365 + 0.012650$$

$$\boxed{P(3 \leq m \leq 4) = 0.076015}$$

توزیع احتمال پواسن

فورمول پواسن برای محاسبه تقریبی احتمال m اشکال در n آزمایش عبارت اند از.

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$$

$$e = 2.71828 \text{ و } \lambda = np \text{ که در آن}$$

در توزیع پواسن اوسط برابر با واریانس و مساوی به λ است.

ناحیه
قیمت

موجودیت آب

عدم موجودیت آب

ناحیه
تعریف

ده میلیون

یک میلیون

حل ب) سایر جزئیات را در جدول زیر قرار ذیل می نویسیم.

متحول تصادفی	تابع احتمال	اوسط	انحراف مربعات متحول تصادفی از اوسط خود	واریانس	انحراف معیاری
x_i	$f(x_i)$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$S^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	S
-1	0.8	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$	$(-1 - 1.2)^2 = 4.84$	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$	4.4
10	0.2	$10 \cdot 0.2 = 2$	$(10 - 1.2)^2 = 77.44$	$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	
	0.1	1.2		$\sum S^2 = 19.360$	

آزمایش برنولی و توزیع احتمال دو جمله ای

توزیع برنولی را می توان به صورت

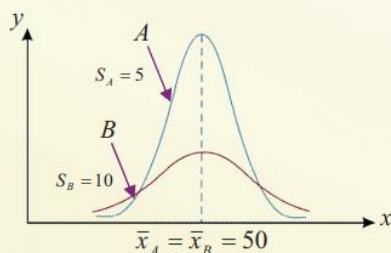
$$P(X = m) = p^m (1 - p)^{1-m} = p^m \cdot q^{1-m}$$

نشان داد. در حالیکه P احتمال کامیابی و $q = 1 - p$ احتمال عدم کامیابی می باشد، هرگاه یک آزمایش را n بار تکرار کنیم یک ترادف بدست می آید طوریکه اگر احتمال کامیابی هر آزمایش P و احتمال ناکامی آن q باشد درین صورت احتمال m کامیابی در این n آزمایش عبارت اند از.

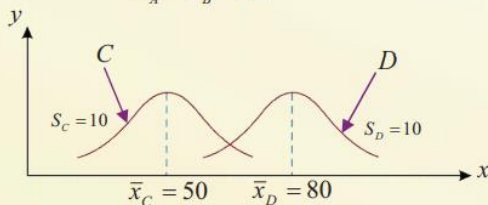
$$P(X \leq m) = \binom{n}{m} p^m q^{n-m} \quad 0 \leq m \leq n$$

با در نظر داشت فورمول فوق می توان اوسط توزیع دو جمله ای را به صورت $\bar{x} = np$ و انحراف معیاری این توزیع را به صورت $S = \sqrt{npq}$ ارائه نمود.

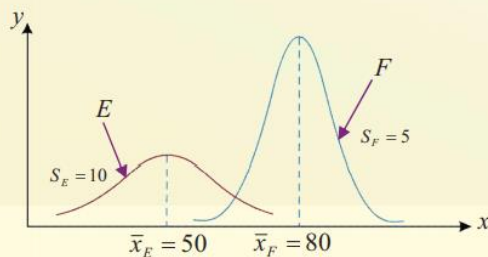
چند توزیع نورمال با اوسط و انحراف معیار مختلف مانند اشکال زیر داده شده است:



شکل الف



شکل ب



شکل ج

فعالیت‌ها

- ❖ توزیع تابع احتمال چیست؟ تعریف کنید.
- ❖ آزمایش برنولی و توزیع احتمال دو جمله بی را تعریف کنید.
- ❖ توزیع بواسن چیست؟ فورمول آنرا ارائه کنید.
- ❖ توزیع نورمال چیست؟ گراف آن را ترسیم کنید.

مثال: به تعداد 200 نفر مسافر تکت طیاره را گرفته اند. اگر احتمال نیامدن مسافری که تکت گرفته طبق تجارب 0.01 باشد، احتمال اینکه 3 نفر مسافر نیاید چقدر است؟

حل: در این مسئله (نیامدن) کامیابی است و همچنان مشاهده می‌شود که $n = 200$ به اندازه کافی بزرگ بوده و $P = 0.01$ یعنی احتمال کامیابی به اندازه کافی کوچک است. بنابراین داریم:

$$\lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71829)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{1}{7.3890461584} \cdot 8 = \frac{0.13533 \cdot 8}{6}$$

$$\Rightarrow P = 0.1804$$

در نتیجه احتمال نیامدن 3 مسافر 0.1804 است.

توزیع نورمال

منحنی‌های توزیع نورمال می‌توانند به چهار طریق با یک دیگر تفاوت داشته باشد. شکل ریاضی معادله توزیع نورمال که نشان دهنده تابع توزیع احتمال آن $f(x)$ اند، به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(x) = \frac{1}{s \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

یا

$$f(x) = N(x, \bar{x}, s)$$

درحالی‌که

$$e = 2.718281828653 \dots \text{ عدد ثابت}$$

$$\pi = 3.141568 \dots \text{ عدد ثابت}$$

$$\bar{x} = \text{اوسط}$$

$$s = \text{انحراف معیاری}$$

و x مقادیر متحول تصادفی پیوسته و $f(x)$ ارتفاع منحنی را نشان می‌دهد.