



راهنمایی آموزشی ریاضی تسریعی ب - دوره دوم

▪ ریاضی صنف دهم فصل دوم

• دوره سوم - (جوره های مرتب، مستوی کارتیزی، حاصل ضرب و گراف کارتیزی رابطه، تابع و قیمت آن)

❖ هدف کلی درس:

در این دوره شما با مفاهیم رابطه، جوره های مرتب، مستوی کارتیزی، حاصل ضرب کارتیزی و گراف آن، گراف حاصل ضرب کارتیزی، ناحیه تعریف و ناحیه قیمت یک رابطه، معکوس یک رابطه و رابطه های معادل آشنا خواهید شد. این مفاهیم به شما کمک می کند تا پایه های ریاضی خود را تقویت کنید و درک از این موضوعات در محیط و محول خود داشته باشید.

❖ جوره های مرتب (Ordered Pairs)

تعریف:

به دو تایی (a, b) که ترتیب در آن مهم باشد بام جوره های مرتب یاد می شود. که در این جوره a را مختصه اول یا مولفه اول و b را مختصه دوم یا مولفه دوم می گویند.

❖ تساوی جوره های مرتب:

دو جوره مرتب زمانی با هم مساوی است که مولفه اول یک جوره مرتب با مولفه اول جوره مرتب دیگر مساوی باشد.

مانند:

$$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c \text{ و } b = d$$

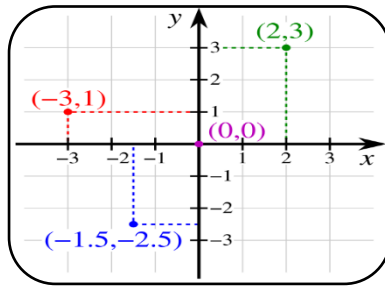
نکته: به طور عموم $(a, b) \neq (b, a)$ می باشد.

❖ مستوی کارتیزی (Cartesian Plane)

تعریف:

مستوی که در آن محور ها بالای همدیگر عمود واقع اند بنام مستوی کارتیزی یاد می شود.

هر دو محور مستوی را به چهار حصه تقسیم می کند که هر حصه آن را بنام ربع یا ناحیه می نامند.



II

I

III

IV

نکته: ناحیه ها مستوی کارتیزی مخالف حرکت عقربه ساعت نامگذاری می شود.

❖ حاصل ضرب کارتیزی و گراف آن:

حاصل ضرب دو ست A و B ($A \times B$) عبارت از ست می باشد که عناصر آن جوره های مرتب (x, y) می باشد.

x عناصر ست A و y عناصر ست B می باشد

برای درک بیشتر مثال زیر را در نظر می گیریم:

مثال: اگر $A = \{0, 1, 2\}$ و $B = \{3, 4\}$ باشد حاصل $B \times A$ ، $A \times B$ مساوی است به:

$$A \times B = \{0, 1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(0, 3), (0, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$B \times A = \{3, 4\} \times \{0, 1, 2\} = \{(3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$$

قابل ذکر: از روی مثال فوق نتیجه می گیریم که حاصل ضرب $A \times B \neq B \times A$ است.

• رابطه (Relation)



تعریف:

ستی که از جوهره های مرتب اشیا و مفاهیم تشکیل شده باشد بنام رابطه یاد می شود. جهت درک بیشتر رابطه مثال های زیر را در نظر می گیریم.

- عطاالله برادر عزت الله می باشد
- علی کاکا محمود است
- احمد معلم حسن است

فعالیت:

جهت درک بیشتر فعالیت زیر را انجام دهید.

تابع (Function):

تعریف: ست جوهره های مرتب است که مولفه اول ان تکرار نباشد.

$$R_1 = \{(0,3), (0,4), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

$$R_2 = \{(1,3), (0,4), (1,3), (2,4), (5,3), (2,4)\}$$

بار اول مفهوم تابع توسط لیبنز معرفی شد تابع یک رابطه یا قاعده است که یک کیمت را با کیمت دیگر ارتباط می دهد

1. ارتباط بین ضلع مساحت مربع
2. ارتباط بین نفوس و زمان
3. ارتباط بین شعاع و مساحت دایره
4. ارتباط بین شعاع و حجم کره

نکته: مساحت مربع، مساحت دایره، نفوس و حجم را بنام متحول مقید و ضلع مربع، زمان، شعاع دایره و شعاع کره را بنام متحول آزاد می نامند.

شماره	اسم	رابطه	اسم
1	عزت الله	برادر	عطاالله
2	محمود	کاکا	علی
3	حسن	معلم	احمد

شماره	رنگ	میوه
1	بنفش	سیب
2	سرخ	کیله
3	زرد	آلوبالو

$$Domainf(x) = \{1, 2, 3\} \quad Rangef(x) = \{2, 4, 6\}$$

بخش اصطلاحات تابع:

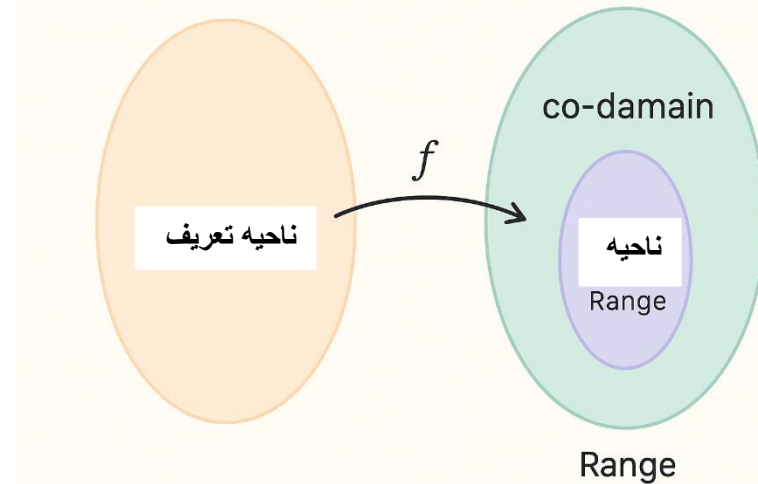
شماره	شعاع یا ضلع	مساحت	ارتباط بین مساحت ضلع و شعاع
1	a	A	مساحت تابع ضلع
2	T	P	نفوس تابع زمان
3	r	A	مساحت تابع شعاع
4	r	V	حجم تابع شعاع

ناحیه تعریف
domain: همه مقادیر مجاز برای ورودی تابع (x ها)
 ناحیه
Range: قیمت

ساحه تعریف تابع	تابع $f(x) = x^2 + 3x - 2$	قیمت های تابع
2	$f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2$	8
0	$f(0) = 0^0 + 3 \cdot 0 - 2$	-2
-3	$f(-3) = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 2$	-2
a	$f(a) = a^2 + 3 \cdot a - 2$	$a^2 + 3a - 2$

مجموعه مقادیر واقعی که تابع پس از اعمال روی دامنه تولید می کند

Co-domain: مجموعه ای که خروجی تابع می تواند در آن قرار گیرد (ممکن است بزرگتر از ناحیه قیمت باشد)



❖ طریق نوشتن یک تابع:

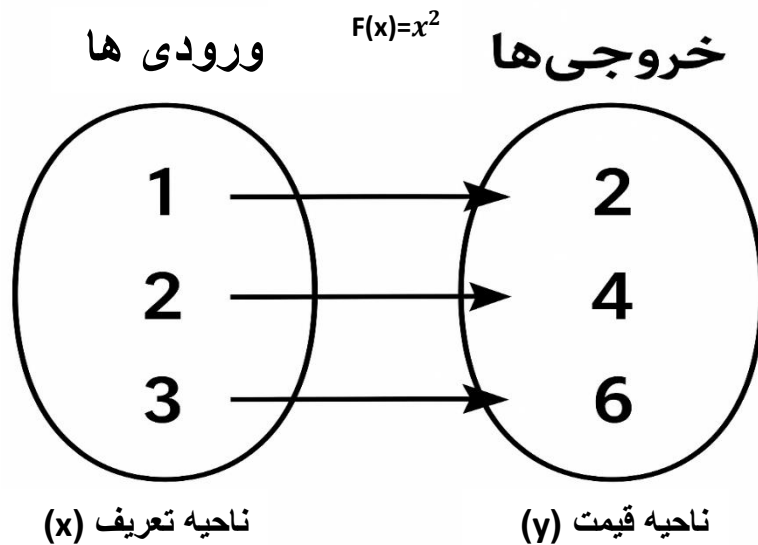
برای اولین بار ریاضی دان سوئسی ایولر Euler این عبارت که y تابع از x است توسط معادل $y = f(x)$ نشان داده است.

توابع عموماً به چهار نشان داده می شوند:

1. به طور شفاهی Verbally توسط عبارات .
2. به طور عددی Numerically توسط یک جدول .
3. مشاهده بی (Visually) توسط گراف .
4. به شکل الجبری (Algebraically) توسط فورمول صریح (واضح) .

❖ دریافت قیمت یک تابع:

برای دریافت قیمت یک تابع (یعنی محاسبه مقدار تابع برای یک ورودی مشخص) کافی است مقدار ورودی را در تابع قرار دهیم و نتیجه را حساب کنیم به این فرایند اصطلاحاً یافتن مقدار تابع یا محاسبه قیمت تابع گفته می شود. جهت وضاحت بیشتر به مثال های زیر توجه کنید.



توابع و گراف آنها

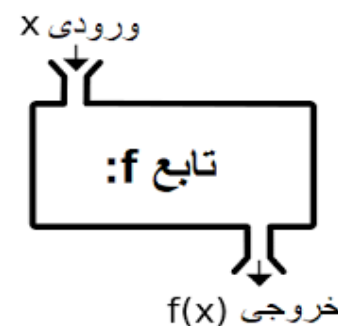
اهداف یادگیری

در پایان این درس، دانش آموز باید بتواند:

1. مفهوم تابع را درک کرده و تشخیص دهد چه رابطه‌ای یک تابع است.
2. ناحیه تعریف تابع (دامنه) را از طریق رابطه جبری یا نمودار گرافیکی مشخص کند.
3. مقدار تابع (قیمت تابع) را برای مقادیر مختلف از دامنه محاسبه کند.
4. گراف توابع پایه‌ای و خاص را ترسیم و تحلیل کند.
5. رفتار افزایشی (متزايد) یا کاهش (متناقص) تابع را از طریق فرمول یا گراف تعیین کند.
6. تأثیر انتقال‌های افقی و عمودی را بر گراف تابع بررسی و تابع جدید را بنویسد.
7. از گراف تابع، ویژگی‌های آن مثل دامنه، برد، تقاطع با محورها، تقارن و نقاط بحرانی را استخراج کند.

1. تعریف تابع

تابع رابطه‌ای است که به هر عضو از دامنه فقط یک مقدار در برد نسبت می‌دهد. نماد تابع:

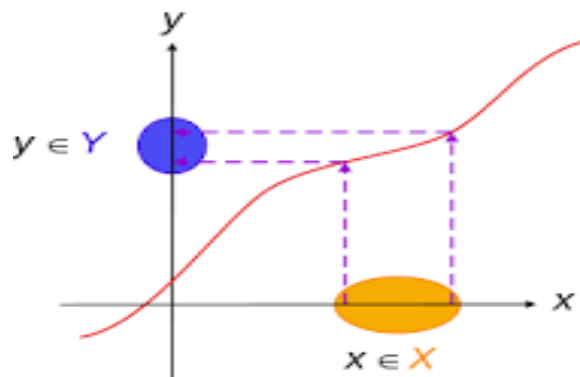


$f(x) \in Y$ یک دقیقاً، $x \in X$ هر ازای به $f: X \rightarrow Y$

مثال $f(x) = x^2$ ، به ازای هر عدد حقیقی، فقط یک خروجی دارد \rightarrow تابع اما رابطه‌ای مثل $x = y^2$ برای بعضی x ها دو مقدار y دارد \rightarrow تابع نیست

2. ناحیه تعریف (دامنه) تابع

دامنه تابع مجموعه‌ای از مقادیر x است که تابع در آن‌ها تعریف شده است.



$$f: X \rightarrow Y$$

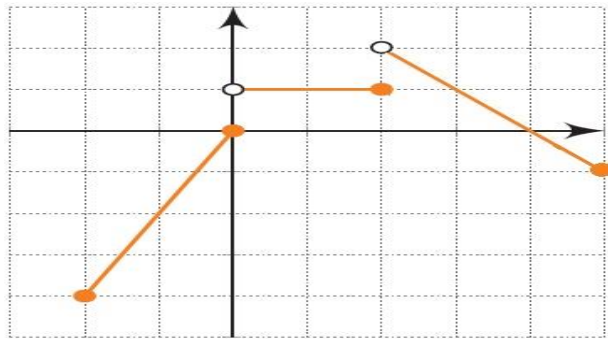
$$y = f(x)$$

دامنه یافتن برای کلی قواعد

نوع تابع	محدودیت دامنه
چند جمله‌ای (مثلاً $x^2 + 3x - 1$)	همه‌ی اعداد حقیقی
کسری (مثلاً $\frac{1}{x-a}$)	مخرج $\neq 0$
جز زوج (مثلاً $\sqrt{x-b}$)	عبارت زیر جز ≥ 0
جز در مخرج (مثلاً $\frac{1}{\sqrt{x}}$)	زیر جز > 0

مثال ۱:

$$\text{تابع } f(x) = \frac{1}{x-3}$$



دامنه : $[-2, +5]$

مثال ۴:

اگر گراف فقط از $x = -2$ تا $x = 5$ وجود دارد، آنگاه:

دامنه $[-2, 5]$:

نکته: نقاط پر یا توخالی (دایره باز یا بسته) نشان‌دهنده وجود یا نبود مقدار تابع در آن نقطه هستند.

۵. توابع خاص و گراف آنها

نام تابع	رفتار	تقارن	برد	دامنه	فرمول
تابع خطی	ثابت یا متزاید یا متناقص	ندارد	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f(x) = ax + b$
تابع درجه ۲	متزاید یا متناقص	نسبت به محور تقارن	نسبت به a بستگی دارد	\mathbb{R}	$f(x) = ax^2 + bx + c$
تابع ریشه دوم	متزاید	ندارد	$y \geq 0$	$x \geq 0$	$f(x) = \sqrt{x}$
سستابع معکوس	کاهنده در هر بازه	نسبت به مبدأ	$y \neq 0$	$x \neq 0$	$f(x) = \frac{1}{x}$

محدودیت: مخرج نباید صفر شود

$$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

دامنه $\mathbb{R} \setminus \{3\}$:

مثال ۲:

تابع $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ برای جز زوج باید:

$$2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

دامنه $[-\frac{1}{2}, \infty)$:

۳. قیمت تابع (مقدار تابع)

برای محاسبه $f(a)$ ، کافیست مقدار a را در فرمول تابع قرار دهیم.

مثال ۳:

اگر $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ، مقدار $f(2)$ چیست؟

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$$

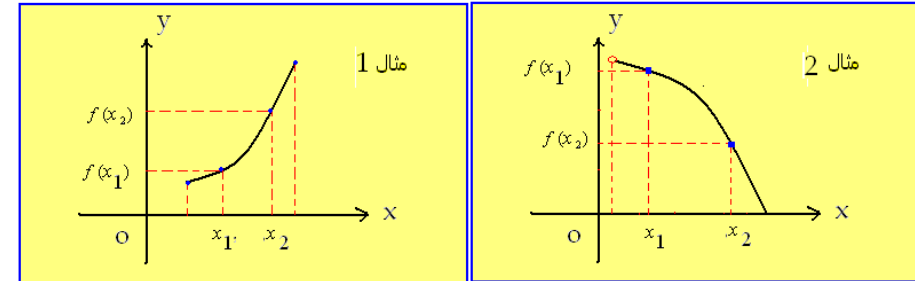
۴. یافتن دامنه از روی گراف تابع

گراف تابع را بررسی می‌کنیم و نقاطی از محور x که روی آنها گراف وجود دارد را مشخص می‌کنیم.

6. توابع متزاید و متناقص

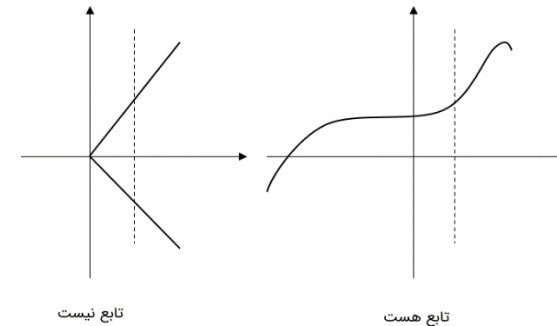
تعریف:

- متزاید: اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- متناقص: اگر $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



روش تشخیص:

1. از روی مشتق تابع (در ریاضی پیشرفته)
2. از روی شیب خط (در توابع خطی)
3. با تحلیل نمودار (در توابع گرافیکی)

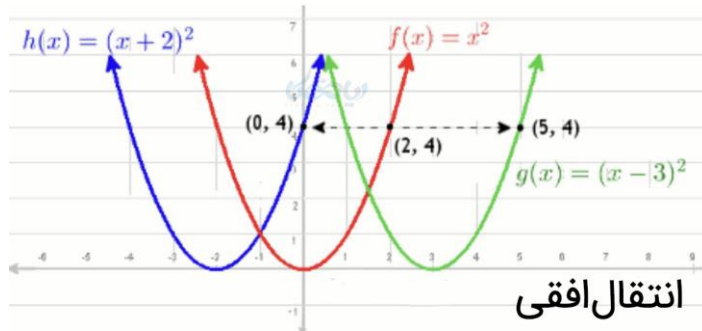


7. انتقال گرافها

انتقال افقی:

- انتقال به راست به اندازه a واحد: $f(x - a)$
- انتقال به چپ به اندازه a واحد: $f(x + a)$

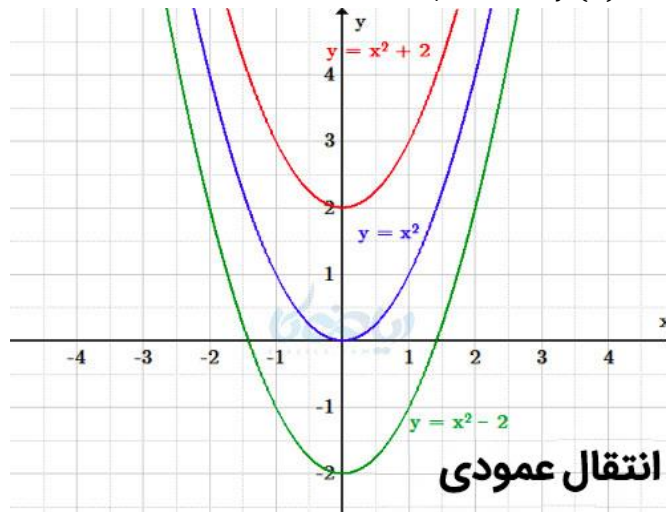
مثال 5:

تابع پایه $f(x) = x^2$:تابع $g(x) = (x - 3)^2$: انتقال به راست به اندازه 3 واحدتابع $h(x) = (x + 2)^2$: انتقال به چپ به اندازه 2 واحد

انتقال افقی

انتقال عمودی:

- انتقال به بالا به اندازه b واحد: $f(x) + b$
- انتقال به پایین به اندازه b واحد: $f(x) - b$



انتقال عمودی



✓ مثال ۶:

تابع پایه $f(x) = x^2$:تابع جدید $\rightarrow f(x-2) + 3 = (x-2)^2 + 3$: انتقال ۲ واحد به راست و ۳ واحد به بالا

📐 تمرین‌های طبقه‌بندی شده

تمرین ۱ - دامنه تابع

دامنه توابع زیر را بیابید:

1. $f(x) = \frac{1}{x-5}$

2. $f(x) = \sqrt{3-x}$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

تمرین ۲ - مقدار تابع

1. اگر $f(x) = x^2 - x$ ، مقدار $f(-2)$ را بیابید.2. اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ ، مقدار $f(8)$ را بیابید.

تمرین ۳ - تحلیل گراف

 نمودار تابع $f(x) = x^2$ را رسم کنید و مشخص کنید:

- رأس کجاست؟
- تابع در چه بازه‌ای متناقص است؟
- تابع در چه بازه‌ای متزاید است؟

تمرین ۴ - انتقال گراف

تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را:

- ۲ واحد به راست منتقل کنید \rightarrow تابع جدید چیست؟

- ۳ واحد پایین ببرید \rightarrow تابع جدید چیست؟
- سپس هر دو را با هم انجام دهید \rightarrow تابع نهایی چیست؟

📌 فعالیت‌های کلاسی

◆ فعالیت ۱: نمودار و دامنه

معلم گراف تابعی ساده (مثلاً پاره‌خط، سهمی، یا ریشه‌ای (را نشان دهد. دانش‌آموزان باید:

- دامنه و برد تابع را بخوانند
- مقدار تابع را برای چند نقطه دلخواه بیابند

◆ فعالیت ۲: گروهی - طراحی گراف انتقال یافته

گروه‌ها یک تابع پایه مثل $f(x) = x^2$ را انتخاب کنند. به کمک کاغذ میلیمتری یا دیجیتال، انتقال‌هایی مثل $f(x-1) + 2$ را اعمال کنند، تابع جدید بنویسند، و گراف را رسم کنند.

◆ فعالیت ۳: کارت بازی تابع

معلم کارت‌هایی تهیه کند شامل:

- فرمول تابع
- گراف
- دامنه و برد
- نوع انتقال

دانش‌آموزان باید کارت‌هایی را که به هم مربوط هستند، پیدا کرده و تطبیق دهند.