

دایره و مفاهیم مربوط به آن

در این درس، شما با مفاهیم حالت های یک مستقیم با دایره، موقعیت دو دایره نظر به یکدیگر، زاویه های مربوط به دایره، خصوصیت های وتر دایره، خصوصیت شعاع دایره، زاویه مرکزی، زاویه محیطی دایره و زاویه مماسی دایره آشنا خواهید شد. این مفاهیم به شما کمک می کنند تا پایه های ریاضی خود را تقویت کنید و روش های مختلفی را برای بررسی دایره بیاموزید.

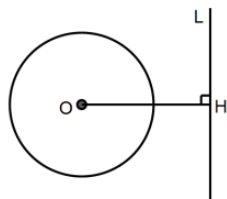
هدف کلی درس:

شاگردان با استفاده از مثال های مفهومی، اشکال هندسی و تمرین های عملی، مفاهیم مربوط به دایره را از جمله رابطه خط با دایره، موقعیت دو دایره نسبت به هم، انواع زوایا در دایره و ویژگی های شعاع و وتر، به صورت عمیق درک کرده و بتوانند آن ها را در مسایل هندسی روزمره به کار ببرند.

حالت های یک خط مستقیم با دایره

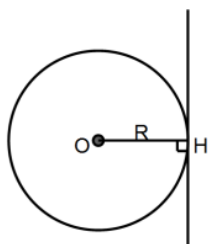
اگر فاصله مستقیم از مرکز دایره را به d و شعاع دایره r سه حالت ذیل وجود دارد.

۱- اگر $d > r$ باشد خط و دایره نقطه مشترک ندارد.



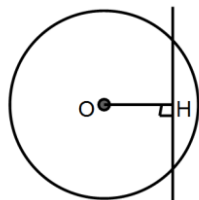
$$OH = d > r$$

۲- اگر $d = r$ باشد خط و دایره یک نقطه مشترک دارد که باهم مماس است.



$$OH = d = r$$

۳- اگر $d < r$ باشد مستقیم و دایره دو نقطه تقاطع دارد که باهم متقاطع است.



$$OH = d < r$$

در نتیجه یک خط مستقیم نسبت به دایره سه حالت دارد:

- مماس: فقط در یک نقطه دایره را قطع می کند.
- قاطع: از دو نقطه دایره را قطع می کند.
- خارجی: اصلاً دایره را لمس نمی کند.

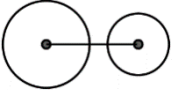
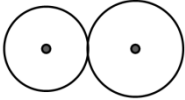
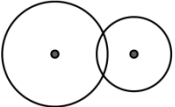
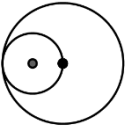
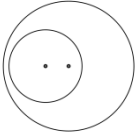
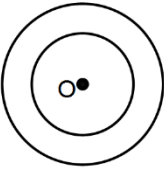
مثال مفهومی:

مانند چاقویی که فقط نوکش به پوست سیب می‌خورد (مماس)، یا اگر داخلش برود (قاطع)، یا اصلاً به آن نخورد (خارجی).

روش ابتکاری: از یک پیاله دایره‌ای شکل و یک سیخ استفاده کنید. سیخ را در حالت‌های مختلف به بدنه پیاله نزدیک کنید و مشاهده کنید که در کجا تماس دارد.

۲. موقعیت دو دایره نسبت به هم

اگر دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 طوری که $R_1 > R_2$ و هر دو در یک مستوی واقع باشد نظر به هم حالت‌های ذیل را دارد.

شماره	حالت دو دایره	تعداد نقطه تقاطع	رابطه بین خط‌المرکزین و شعاع‌ها	شکل
۱	متخارج	ندارد	$d > R_1 + R_2$	
۲	مماس خارجی	یک	$d = R_1 + R_2$	
۳	متقاطع	دو	$R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$	
۴	مماس داخلی	یک	$d = R_1 - R_2$	
۵	متداخل	ندارد	$d < R_1 - R_2$	
۶	متحد‌المركز	ندارد	$d = 0$	

مثال کاربردی:

تصور کنید دو بشقاب گرد را روی زمین می‌گذارید. حال آن‌ها را طوری جابه‌جا کنید که فقط لبه‌های‌شان یا هیچ‌جایشان یا بخشی از لبه‌ها با هم تماس داشته باشند.

تمرین:

از دو درب بوتل یا نعلبکی استفاده کرده، حالت‌های بالا را شبیه‌سازی کنید.

۳. زاویه‌های مربوط به دایره

شامل:

- زاویه مرکزی: رأس در مرکز دایره
- زاویه محیطی: رأس روی محیط دایره
- زاویه مماسی: بین مماس و وتر

مثال مفهومی:

زاویه مرکزی مثل چراغی است که از مرکز به دو نقطه تابیده؛

محیطی مثل ناظر ایستاده روی لبه دایره.

روش یادگیری:

با نخ و یک پرگار، دایره بکشید. نقاط دلخواه روی محیط علامت بگذارید و با خط‌کش زاویه‌ها را رسم و اندازه‌گیری کنید.

۴. خصوصیت‌های وتر دایره

- وتر عمود بر قطر، از مرکز می‌گذرد.
- عمود منصف وتر از مرکز می‌گذرد.
- وترهای مساوی، از مرکز به یک اندازه فاصله دارند.

مثال مفهومی:

وترها مانند ریسمان‌های بسته‌شده بین دو نقطه دیوار دایره‌نما هستند؛ هر چه نزدیک‌تر به مرکز، ریسمان بزرگ‌تر.

تمرین:

یک بشقاب و چند دندان یا تار نخ بردارید و وترها را بکشید. مرکز بشقاب را علامت بزنید و فاصله وترها از مرکز را اندازه بگیرید.

۵. خصوصیت‌های شعاع دایره

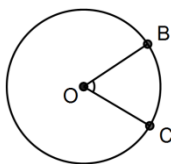
- همه شعاع‌ها مساوی‌اند.
- شعاع عمود بر مماس، از نقطه تماس می‌گذرد.

مثال مفهومی:

شعاع‌ها مثل دنده‌های دوچرخه‌اند که همه از مرکز تا لبه می‌رسند.

تمرین:

دوچرخه یا چرخ دستی را ببینید. دنده‌ها (شعاع‌ها) را اندازه بگیرید.



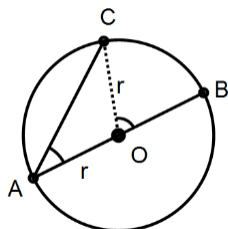
$$BOC = BC$$

۶. زاویه مرکزی

- تشکیل شده از دو شعاع.
- مقدارش مساوی با اندازه قوس مربوطه است.

مثال:

در ساعت، زاویه بین عقربه‌ها را از مرکز ساعت اندازه بگیرید.



$$\text{proof: } COB = CB, COB = \hat{A} + \hat{C}$$

$$AO = OC = r \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

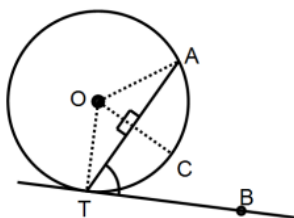
$$COB = 2\hat{A} \Rightarrow CB = 2\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = \frac{CB}{2}$$

۷. زاویه محیطی

- رأس روی دایره و اضلاع آن وتر هستند.
- مقدارش نصف زاویه مرکزی است.

تمرین :

در یک دایره دو نقطه A و B انتخاب کن. یک نقطه C روی محیط بگذار و $\angle ACB$ را رسم کن. حال زاویه مرکزی $\angle AOB$ را اندازه بگیر و مقایسه کن.



۸. زاویه مماسی

- بین وتر و مماس در نقطه تماس.
- مقدارش برابر زاویه محیطی است که وتر آن را تشکیل می‌دهد.

$$\text{proof : } \angle COT = \angle COA = \frac{\angle AOB}{2}$$

$$\angle ATB + \angle ATO = \angle COT + \angle ATO = 90^\circ \Rightarrow \angle ATB = \angle COT$$

$$\Rightarrow \angle ATB = \frac{\angle AOB}{2}$$

تمرین :

با پرگار و خط‌کش، مماس را در نقطه P رسم کن و زاویه را بسنج .

★ روش‌های ابتکاری برای یادگیری

۱. استفاده از ساعت : برای تشخیص زاویه مرکزی و محیطی.
۲. تجربه کردن با اشیاء واقعی : مثل پیاله، بشقاب، درب بوتل.
۳. استفاده از طناب و میخ : برای رسم دایره در حیاط یا روی تخته.

خلاصه آنچه باید بیاموزید

عنوان	مفهوم کلیدی	کاربرد
خط و دایره	مماس، قاطع، خارج	تماس سیخ با پیاله
موقعیت دو دایره	۵ حالت	ارتباط بین دو بشقاب
زاویه‌ها	مرکزی، محیطی، مماسی	عقریه‌های ساعت
وترها	مساوی بودن، فاصله از مرکز	ریسمان و بشقاب
شعاع	عمود بودن بر مماس، تساوی	دنده‌های چرخ
زاویه مرکزی	= قوس	از مرکز ساخته می‌شود
زاویه محیطی	$= \frac{1}{2}$ زاویه مرکزی	از روی محیط ساخته می‌شود
زاویه مماسی	= زاویه محیطی	وتر و مماس در تماس

ورق کار هندسه: دایره

نام شاگرد: _____ تاریخ: _____

بخش اول: سوالات چهار گزینه‌ای

فقط یکی از گزینه‌ها درست است. گزینه درست را دایره بکشید.

۱. اگر یک خط مستقیم فقط در یک نقطه با دایره تماس داشته باشد، به آن چه می‌گویند؟

الف) قاطع

ب) وتر

ج) مماس

د) شعاع

۲. اگر فاصله بین دو مرکز دو دایره کمتر از تفاضل شعاع‌های‌شان باشد، آنگاه دایره‌ها:

الف) مماس داخلی هستند

ب) یکی در داخل دیگر قرار دارد بدون تماس

ج) قاطع‌اند

د) مماس خارجی‌اند

۳. زاویه محیطی همیشه:

○ الف) مساوی زاویه مرکزی است

○ ب) بزرگتر از زاویه مرکزی است

○ ج) نصف زاویه مرکزی است

○ د) مساوی زاویه مماسی است

۴. عمود منصف هر وتر در دایره:

○ الف) از مرکز نمی‌گذرد

○ ب) از محیط دایره عبور می‌کند

○ ج) از مرکز می‌گذرد

○ د) زاویه محیطی می‌سازد

بخش دوم: فعالیت رسم

با پرگار، خط‌کش و قلم، فعالیت‌های زیر را انجام بده:

۱. یک دایره با شعاع ۴ سانتی‌متر رسم کن.

الف) دو شعاع رسم کن.

ب) زاویه مرکزی بین دو شعاع را اندازه بگیر.

ج) یک وتر رسم کن و عمود منصف آن را رسم کن.

۲. در یک دایره دیگر:

الف) نقطه‌ای روی محیط انتخاب کن و زاویه محیطی بین دو نقطه را رسم و اندازه بگیر.

ب) مماسی از یک نقطه روی محیط رسم کن. شعاع را از مرکز به نقطه تماس وصل کن. زاویه بین شعاع و مماس را اندازه بگیر.

بخش سوم: سوالات تشریحی

به سوالات زیر با دقت پاسخ بده:

۱. سه حالت ممکن برای یک خط نسبت به دایره را با رسم ساده توضیح بده.

۲. چرا زاویه مماسی همیشه مساوی زاویه محیطی است که وتر آن زاویه را می‌سازد؟

۳. اگر دو دایره به هم قاطع باشند، حداکثر چند نقطه اشتراک دارند؟ شکل آن را بکش.

بخش چهارم: تمرین‌های عملی با اشیاء واقعی

این فعالیت‌ها را در خانه یا صنف انجام بده و مشاهدات خود را در جدول یادداشت کن.

مشاهدات	فعالیت انجام‌شده	ابزار استفاده‌شده
وتر کوتاه‌تر از قطر بود	مماس و وتر رسم کردم	یک بشقاب و خلال دندان
دایره‌ها می‌توانند قاطع یا مماس باشند	موقعیت دایره‌ها را بررسی کردم	دو درب بوتل
زاویه مرکزی متغیر است	زاویه بین عقربه‌ها اندازه گرفتم	ساعت دیواری
همه مساوی بودند	شعاع‌ها را اندازه گرفتم	چرخ بایسکل

بخش پنجم: خلاصه‌ای از آموخته‌ها

سه نکته‌ای که امروز آموختم: ✓

۱. _____
۲. _____
۳. _____