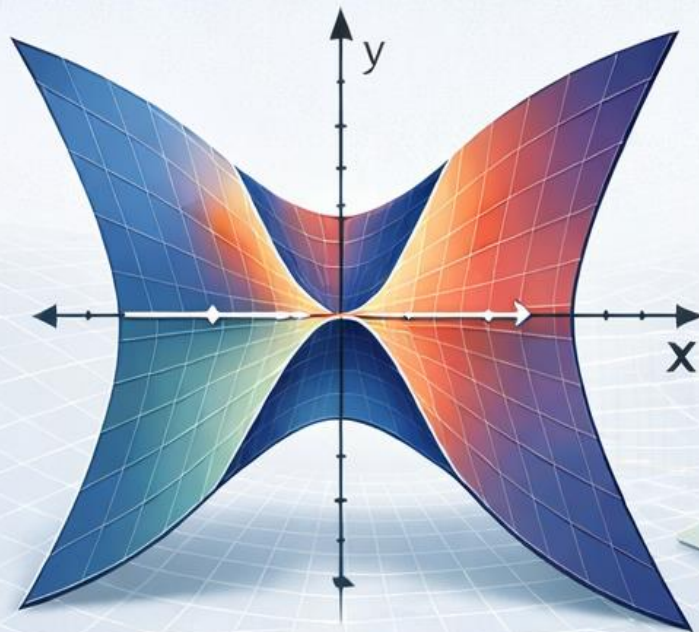
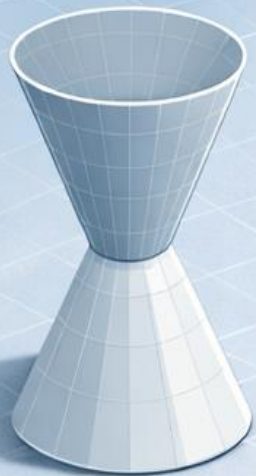


راهنمایی آموزشی ریاضی صنف یازدهم

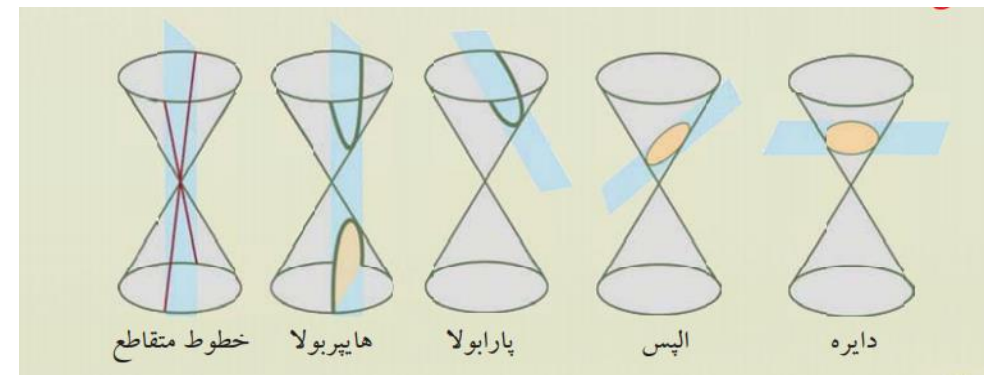


راهنمای آموزشی ریاضی صنف یازدهم

مقاطع مخروطی

هرگاه یک مخروط توسط یک مستوی قطع گردد شکل حاصله بنام مقاطع مخروطی یاد می شود که هر کدام را می توان قرار ذیل به شکل جداگانه تعریف نمود.

- هرگاه یک مخروط توسط مستوی طوری قطع شود که مستوی عمود به محور اصلی مخروط باشد شکل حاصله عبارت از دایره است.
- هرگاه یک مخروط توسط مستوی طوری قطع گردد که مایل به محور اصلی باشد شکل حاصله عبارت از بیضوی است.
- هرگاه یک مخروط توسط مستوی طوری قطع گردد که موازی با مولد مخروط باشد شکل حاصله بنام پارابول یاد می شود.
- هرگاه دو مخروط توسط مستوی قطع گردد که موازی به محور اصلی مخروط باشد شکل حاصله بنام هایپربول یاد می شود.
- هرگاه سطح مستوی محور اصلی مخروط را در بر داشته باشد شکل حاصله عبارت از دو خط متقاطع است.



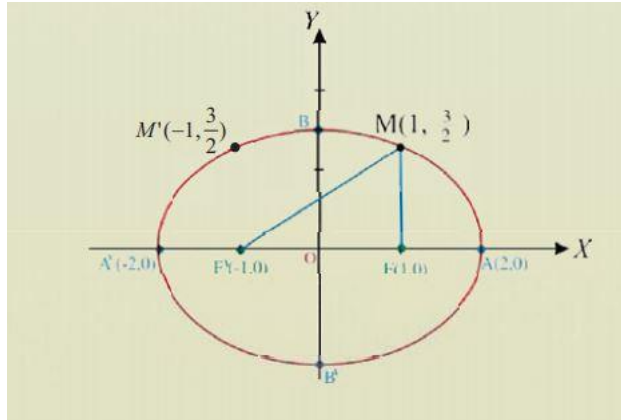
نکته: اکنون هر کدام از مقاطع مخروطی را به شکل مشرح به بررسی می گیریم.

بیضوی

تعریف بیضوی: محل هندسی نقاط یک مستوی که مجموعه فواصل آنها از دو نقطه مستقر مساوی به یک طول ثابت $2a$ باشد به نام بیضوی (الیپس) یاد می شود.

نقاط مستقر را محراق های بیضوی گویند که به F و F' نشان داده می شود و طول ثابت $AA' = 2a$ می باشد که بنام طول قطر کبیر نیز یاد می شود.

$$|MF| + |MF'| = 2a$$



قطرها و راس های بیضوی

هر بیضوی دارای بیشمار قطرها اند که بزرگترین قطر آن را (قطر کبیر) یا قطر اطول می نامند و آنرا Major axis و کوچکترین قطر آنرا (قطر صغیر) یا قطر اقصر می نامند و آنرا Minor axis یاد می کنند.

نقاط A و A' را راس های اصلی و نقاط B و B' را راس های فرعی بیضوی می نامند طوری که.

$$AA' = 2a \quad BB' = 2b$$

رابطه بین محراق ها و قطرها

به اساس قضیه فیثاغورت بین محراق ها نصف طول قطر کبیر و نصف طول قطر صغیر رابطه ذیل وجود دارد که آنرا بنام رابطه اساسی بیضوی یاد می کند.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

محور تناظر و مرکز تناظر بیضوی

خطوط که بیضوی را به شکل عمودی و افقی نصف می کند بنام محور تناظر و نقطه تقاطع این دو خط را بنام مرکز تناظر یاد می نماید.

معادلات بیضوی

بیضوی دارای دو نوع معادله نورمال است (معادله مرکزی و معادله اختیاری)

الف) معادله مرکزی بیضوی: اگر مرکز تناظر بیضوی در مبدا کمیات وضعیه قرار داشته باشد، بیضوی را مرکزی می نامند و معادله آن عبارت اند از.

$$\text{معادله نورمال بیضوی افقی} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{معادله نورمال بیضوی عمودی} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ب) معادله اختیاری بیضوی: اگر مرکز تناظر بیضوی در یک نقطه اختیاری مثلاً (h, k) باشد، معادلات آن عبارت اند از.

$$\text{معادله نورمال بیضوی اختیاری افقی} \quad \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{معادله نورمال بیضوی اختیاری عمودی} \quad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

مثال: مختصات مرکز، محراق ها و طول قطر کبیر بیضوی را که معادله آن به شکل

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

حل:

این معادله را با معادله عمومی بیضوی مقایسه می کنیم و از مقایسه آن داریم که.

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = \pm 6$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

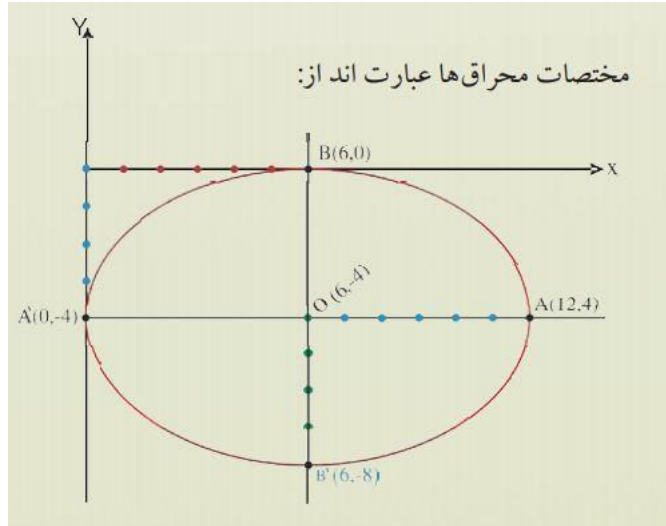
از رابطه اساسی استفاده نموده قیمت c را دریافت می نماییم.

$$c = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{5}$$

$$A(h + a, k) \Rightarrow A(12, -4) \quad A'(h - a, k) \Rightarrow A'(0, -4)$$

$$B(6, 0) \quad B'(6, -8) \quad C(6 + 2\sqrt{5}, -4) \quad C'(6 - 2\sqrt{5}, -4)$$

و گراف آن را می توان قرار ذیل دریافت نمود.



معادله عمومی بیضوی

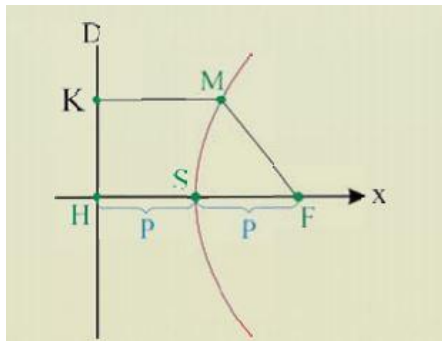
شکل معادله عمومی بیضوی عبارت اند از.

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

در صورت که ضرایب x و y مختلف و هم علامه باشد.

پارابول

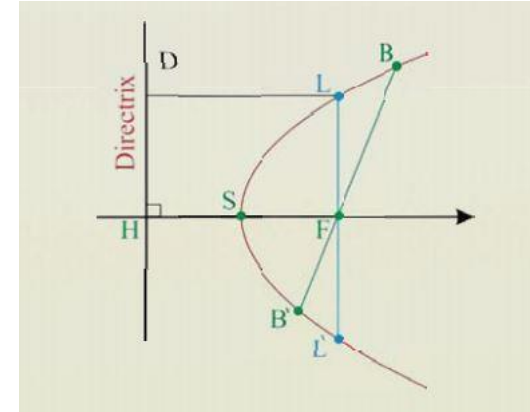
تعریف: محل هندسی نقاط که فاصله آن از یک نقطه و یک خط مساوی باشد. خطی که از محراق و راس پارابولا می گذرد و خط مستقیم D عمود است، بنام محور تناظر پارابولا یاد می شود.



وترهای پارابولا

خط مستقیم که دو نقطه پارابولا را بهم وصل می کند بنام وتر پارابولا یاد می گردد، خط BB' که از محراق پارابولا عبور می کند بنام وتر محراق پارابولا یاد می گردد.

خط مستقیم LL' که در نقطه محراق بالای پارابولا عمود است، وتر عمودی (لیتس ریگتم) یاد می گردد.



معادلات پارابولا

پارابولا نیز مانند سایر مقاطع مخروطی دارای دو نوع معادله اند.

الف: معادلات مرکزی پارابولا: اگر مرکز تناظر پارابولا در مبدا کمیات وضعیه قرار داشته باشد، پارابولا را بنام پارابولای مرکزی یاد می گردد.

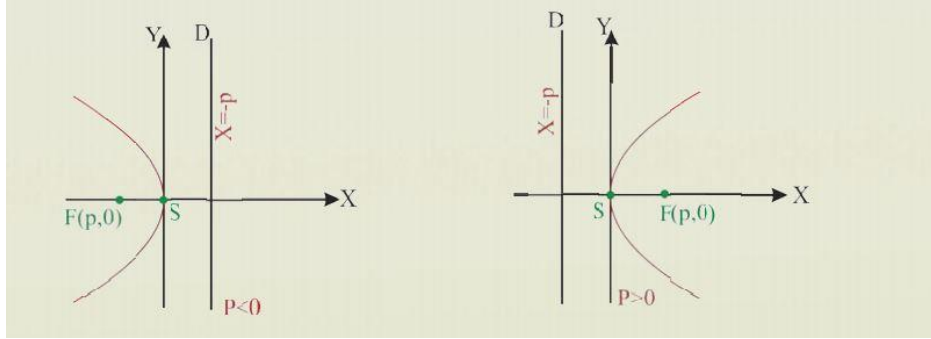
معادلات مرکزی پارابول عبارت اند از.

$$y^2 = 4px \dots \dots \dots (1)$$

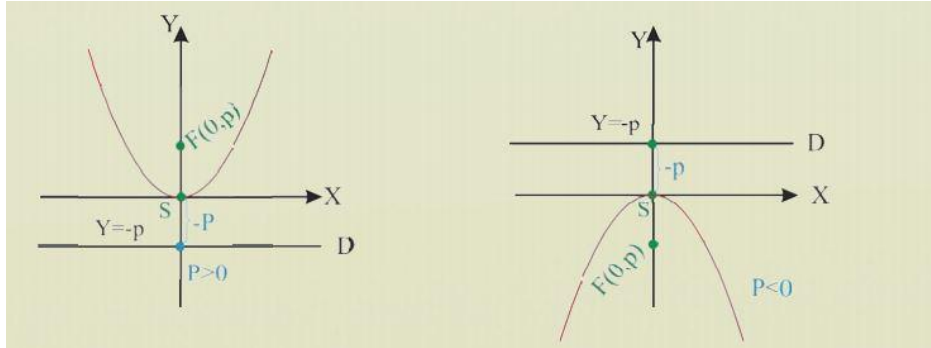
$$x^2 = 4py \dots \dots \dots (2)$$

در رابطه (1) اگر $P > 0$ باشد دهن پارابولا به طرف راست و اگر $P < 0$ باشد دهن پارابولا به طرف چپ و در رابطه (2) اگر $P > 0$ دهن پارابول به طرف بالا و اگر $P < 0$ دهن پارابولا به طرف پائین قرار دارد.

حالت اول:



حالت دوم:



مثال: کمیات وضعیه راس، محراق و معادله خط موجه پارابولای $x^2 = 12y$ را دریافت نمائید.

$$x^2 = 12y$$

$$x^2 = 4py$$

$$4p = 12 \Rightarrow p = 3 > 0 \text{ به طرف بالا}$$

کمیات وضعیه راس $S(0,0)$

$$y = -p \Rightarrow y = -3 \text{ موجه خط موجه}$$

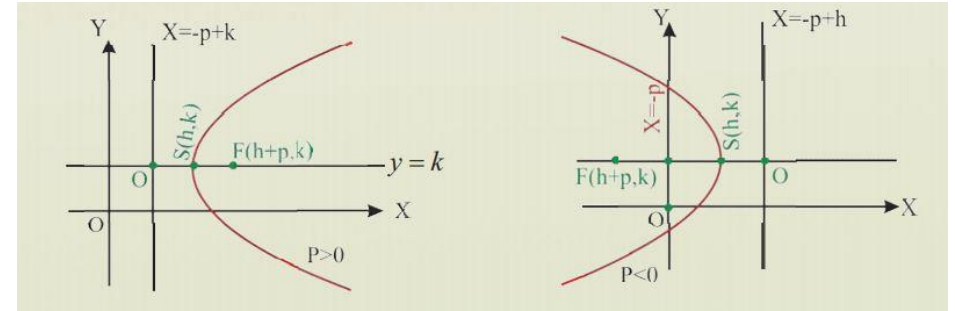
ب: معادلات پارابولا با مرکز اختیاری: اگر مرکز پارابولا در یک نقطه اختیاری از کمیات وضعیه قرار داشته باشد، پارابولا را اختیاری یا با مرکز اختیاری یاد می نماید.

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \dots \dots \dots (1)$$

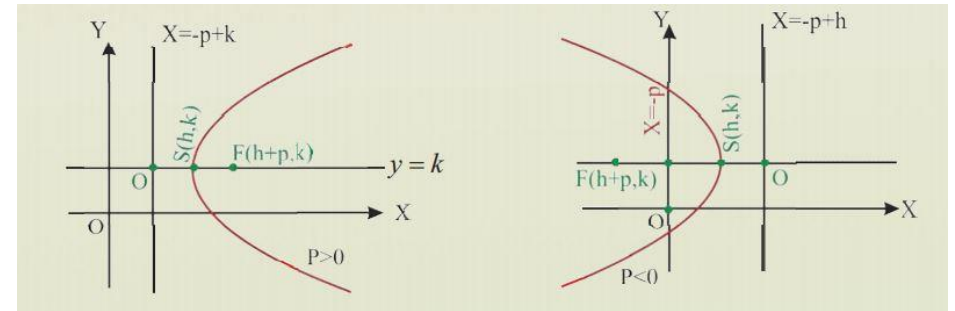
$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \dots \dots \dots (2)$$

رابطه (1) معادله پارابولای افقی و رابطه (2) معادله پارابولای عمودی است.

حالت اول:



حالت دوم:



مثال: کمیات وضعیه راس پارابول $(x - 1)^2 = 4p(y - 2)$ دریافت نمایید.

حل: نقطه راس پارابولا عبارت از $S(h, k)$ می باشد، پس داریم که

$$S(h, k) = S(1, 2) \rightarrow \text{نقطه راس پارابولا}$$

معادله عمومی پارابولا: معادله عمومی پارابولا عبارت اند از.

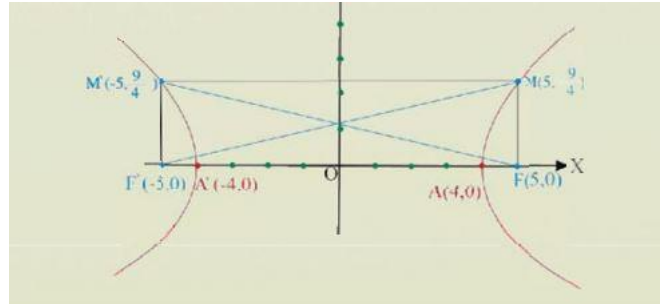
$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$By^2 + Cy + D = 0$$

نکته: یک معادله عمومی را می توان با استفاده از تکمیل مربع به شکل نورمال آن تبدیل می نماییم و جزئیات آن را دریافت می کنیم.

هایپرئولا

تعریف: محل هندسی نقاط در یک مستوی که تفاضل فواصل آنها از دو نقطه ثابت مساوی به یک طول معین $2a$ باشد.



محورهای تناظر و راس های هایپرئولا

هایپرئولا دارای دو محور تناظر است، که یکی آن به شکل افقی بوده و با FF' منطبق است و دیگری ناصف عمودی FF' می باشد. محل تقاطع این دو محور را بنام مرکز تناظر هایپرئولا می نامند.

در هایپرئولا چون طول فاصله محراقی از طول قطر کبیر بزرگتر اند، پس رابطه اساسی آن قرار ذیل می باشد.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

عن المرکزیت در هایپرئولا

در هایپرئولا از آنجاییکه $c > a$ می باشد داریم که.

$$e = \frac{c}{a} > 1 \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1 \Rightarrow e > 1$$

معادله هایپرئولا

در هایپرئولا مانند سایر مقاطع مخروطی دو نوع معادله وجود دارد. که عبارت اند از.

الف: معادلات هایپرئولای مرکزی

اگر مرکز تناظر هایپرئولا در مبداء کمیات وضعیه قرار داشته باشد، معادلات آن قرار ذیل تحریر می گردد.

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \pm\sqrt{20} \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{5}$$

$$A(4,0), A'(-4,0) \quad B(0,2), \quad B'(0,-2)$$

$$F(2\sqrt{5}, 0), \quad F'(-2\sqrt{5}, 0)$$

$$y = \pm \frac{2}{4}x \rightarrow \text{معادله مجانب}$$

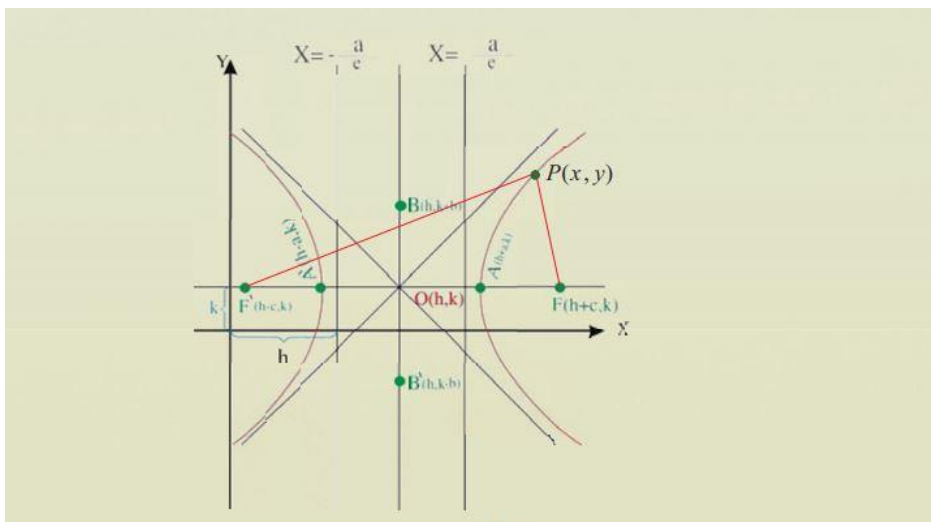
$$x = \pm \frac{8\sqrt{5}}{5} \rightarrow \text{معادله خط موجه}$$

ب: هایپربولای اختیاری

اگر مرکز تناظر بیضوی در یک نقطه اختیاری قرار داشته باشد، معادلات آن قرار ذیل ارائه می شود.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{معادله افقی}$$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{معادله عمودی}$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ --- افقی --- معادله هایپربولای افقی}$$

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ --- عمودی --- معادله هایپربولای عمودی}$$

موجه های هایپربولا

موجه های هایپربولا عبارت از خطوط مستقیم است، که بالای محور تناظر اصلی عمود بوده و فاصله های آنها از مرکز تناظر هایپربولا عبارت اند از.

$$\pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{a}{e}$$

اگر محراق ها روی محور y باشد، معادله خطوط موجه آن به شکل $y = \pm \frac{a}{e}$ و اگر محراق ها روی محور x باشد، معادله خطوط موجه آن به شکل $x = \pm \frac{a}{e}$ است.

مجانب های هایپربولا

مجانب ها عبارت از خطوط مستقیم است که حیثیت هادی را دارد. و در بینهایت با گراف هایپربولا مماس است. معادله مجانب های هایپربولا عبارت اند از.

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

مثال: از معادله هایپربولای $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ مختصات محراق ها مختصات راس ها معادله مجانب ها و معادله موجه را دریافت نمایید.

حل:

این معادله را با معادله نورمال هایپربولا مقایسه می کنیم.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

حالات نسبی یک خط مستقیم با مقاطع مخروطی

یک خط مستقیم با مقاطع مخروطی می تواند سه حالت داشته باشد، قاطع باشد، مماس باشد و نقطه مشترک نداشته باشد.

اگر معادله خط مستقیم را در معادله عمومی یک مقطع مخروطی وضع نمائیم، شکل عمومی یک معادله یک مجهوله درجه دوم را اختیار می کند، از آن معادله قیمت $\Delta = b^2 - 4ac$ را دریافت می نمائیم و نظر به قیمت Δ سه حالت ذیل وجود دارد.

1. اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو حل دارد و خط منحنی را در دو نقطه قطع می کند.
2. اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله هیچ حل ندارد و خط با منحنی نقطه مشترک ندارد.
3. اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله یک حل مضاعف دارد و با منحنی در یک نقطه مماس است.

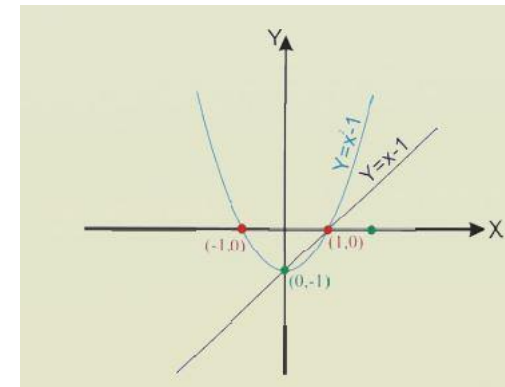
مثال: خط مستقیم $y = x - 1$ و پارابول $y - x^2 + 1 = 0$ چه ارتباط دارد.

حل:

قیمت y را از معادله خط در معادله پارابول وضع می نمائیم و داریم که

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ y - x^2 + 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 1) - x^2 + 1 = 0 \\ x - 1 - x^2 + 1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \\ \Delta &= (-1)^2 - 4(1) \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 1, \quad \Delta > 0 \end{aligned}$$

دیده می شود که $\Delta > 0$ است و پس خط پارابول را در دو نقطه قطع می کند.



مثلثات

قضیه سین

در هر مثلث کیفی قضیه سین عبارت اند از.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

این قضیه را می توان به شکل ذیل نیز می توان نوشت.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

قضیه کوسین

در هر مثلث کیفی قضیه کوسین عبارت اند از.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{or} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{or} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab} \quad \text{or} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos C$$

قضیه تانجانت

در هر مثلث کیفی قضیه تانجانت صدق می کند و عبارت اند از.

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\tan \frac{A + B}{2}}{\tan \frac{A - B}{2}}$$

مطابقت های مثلثاتی

تعریف: مطابقت مثلثاتی به آن مساوات گفته می شود که برای هر قیمت زاویه دو طرف مساوات باهم برابر باشد.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$x = \frac{3\pi}{4}$$

وست حل معادله عبارت اند از.

$$A = \left\{ x: x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ and } x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

معادلات مثلثاتی درجه دوم

عبارت از معادلات اند که درجه متحول 2 اند و با استفاده از یک تعویض آن را می توان به یک معادله یک مجهوله درجه دوم الجبری تبدیل نمود و با در نظر داشت قوانین حل معادلات درجه دوم، آنرا نیز می توان حل نمود.

مثال: معادله مثلثاتی $6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$ را حل نمائید.

حل:

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$$

با تعویض $\sin x = y$ داریم که.

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$$

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 25 - 24 = 1$$

$$\Delta = 1 > 0$$

به کمک فرمول خوارزمی قیمت های y را دریافت می نمائیم و داریم که.

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30$$

$$y_2 = \sin x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 19^\circ 30'$$

ست حل آنها عبارت اند از.

$$A_1 = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} : k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

معادلات مثلثاتی

تعریف: معادلات مثلثاتی به آن مساوات گفته می شود که برای بعضی قیمت های خاص زاویه دو طرف مساوات باهم برابر گردد.

مثال: معادله مثلثاتی شکل $2 \sin x - 1 = 0$ را حل نمائید.

حل:

$$2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

چون ساین زاویه $\frac{1}{2}$ است پس زاویه برابر با 30 درجه است و یک حل معادله عبارت اند از.

$$x = 30 \text{ or } x = \frac{\pi}{6}$$

با در نظر داشت زاویه های کوتر منل حل های دیگر معادله عبارت اند از.

$$A = \left\{ x: x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ or } x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

مثال دوم: ست حل معادله مثلثاتی $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$ را در انتروال $[0, 2\pi]$ دریافت نمائید.

حل:2

$$2 \cos x + \sqrt{2} = 0$$

$$2 \cos x = -\sqrt{2}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

چون $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، پس یک حل معادله فوق عبارت اند از.

- فراگیران بتوانند مفاهیم اولیه مانند نقطه، خط، مستوی و فضا را تعریف کنند.
- با اصول و اکسیوم های بنیادی هندسه فضایی آشنا شوند.
- 2. **خط و مستوی در فضای سه بعدی**
- تشخیص دهند که چگونه یک خط یا مستوی در فضا تعریف می شوند.
- رابطه بین دو نقطه و خط، و بین خط و مستوی را توضیح دهند.
- 3. **خطوط مستقیم و موازی در فضا**
- خطوط مستقیم و موازی را در فضای سه بعدی تشخیص دهند
- شرایط موازی بودن دو خط در فضا را توضیح دهند.
- 4. **زاویه بین دو خط در فضا**
- بتوانند زاویه بین دو خط متقاطع در فضا را پیدا کنند.
- از فرمول ها برای محاسبه زاویه استفاده شود.
- 5. **خطوط و مستوی های موازی در فضا**
- تفاوت بین خط های موازی و مستوی های موازی را تشریح کنند
- شرایط ریاضی برای تعیین موازی بودن آنه ها را بنویسند.
- 6. **خطوط مستقیم و مستوی های متعامد.**
- شرایط تعامد(عمود بودن) بین خط و یک مستوی را بیان کنند.
- تشخیص دهند که کدام خط و مستوی بر هم عمود هستند.
- 7. **مستوی های موازی در فضا**
- ویژگی ها و شرایط موازی بودن دو مستوی را تشخیص دهند.
- در رسم اشکال سه بعدی، مستوی های موازی را مشخص کنند.

خلص مطالب درس

❖ مفاهیم اساسی و اکسیوم ها

اصطلاحات اولیه: مفاهیم اند که بدون تعریف قبول می شوند مانند نقطه، خط، مستوی و فضا
 دلیل و برهان: عمل ذهنی است که از یک سلسله گزارش های قبلی درست به گزارش های بعدی می رسد و درستی آن را می توان بر اساس آنچه قبلا پذیرفته شده است را قبول کرد.
قضیه: ادعای که برای اثبات آن به دلیل و برهان نیاز باشد.
 خط: یک مفهوم ذهنی است که بدون تعریف قبول شده است (یکی از اصطلاحات اولیه است).
 خط مستقیم: نقاط پیهم و متصل را خط می نامند و کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه خط مستقیم است، خط مستقیم نیز یکی از مفاهیم و اصطلاحات اولیه اند.

$$A_2 = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k + 1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

سیستم معادلات دو مجهوله مثلثاتی
 این سیستم متشکل از ۶ نوع اند که عبارت اند از.

نوع اول:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

نوع دوم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

نوع سوم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

نوع چهارم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan x = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

نوع پنجم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

نوع ششم:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

اهداف آموزشی

هدف کلی: فراگیران در پایان این بخش بتوانند مفاهیم بنیادی هندسه فضایی را درک کرده، روابط بین خط ها و مستوی ها در فضا را تحلیل و بارسام اشکال هندسی، موقعیت نسبی آنها را تشخیص دهند.

اهداف تعلیمی:

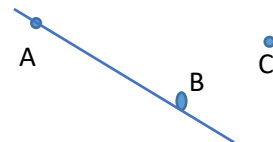
1. مفاهیم ابتدائی و اکسیوم ها

اکسیوم های خط:

✓ دو نقطه مشخص تنها و تنها یک خط مستقیم را مشخص می نماید.



✓ هر خط مستقیم دارای دو نقطه مشخص اند و حد اقل سه نقطه وجود دارد که در یک خط مستقیم شامل نیست.



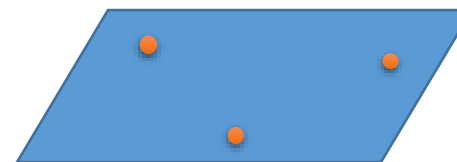
✓ بین هر دو نقطه یک خط مستقیم می توان نقطه بی مشخصی را بدست آورد.



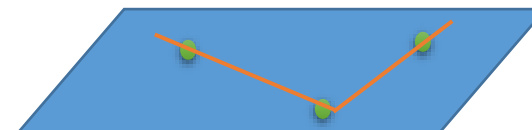
مستوی: به هر سطح هموار مستوی گفته می شود مانند، سطح آب، روی تخته سفید صنف... و مستوی نیز یکی از مفاهیم اولیه اند.

اکسیوم های مستوی:

✚ در هر مستوی کم از کم سه نقطه وجود دارد که به امتداد یک خط مستقیم نیست.



✚ از سه نقطه که به استقامت یک خط مستقیم نباشد یک مستوی می گذرد.



✚ اگر دو نقطه یک خط مستقیم در یک مستوی باشد، این خط شامل مستوی است.



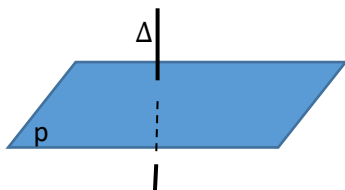
❖ خط و مستوی در فضای سه بعدی

فضای را که در آن زندگی می کنیم سه بعدی است و یکی از مفاهیم اولیه می باشد. یا به عبارت دیگر: فضا عبارت از مجموعه نقاط است، طوریکه خط دارای یک بعد و مستوی دارای دو بعد نیز جزء از فضای سه بعدی اند.

اوضاع نسبی یک خط مستقیم و یک مستوی

▪ خط و مستوی متقاطع است اگر یک نقطه مشترک داشته باشد.

خط Δ و مستوی P باهم متقاطع اند



▪ خط و مستوی منطبق است اگر دو یا چند نقطه مشترک داشته باشد.

خط مستقیم Δ و مستوی P باهم منطبق اند.



▪ خط و مستوی موازی اند اگر هیچ نقطه مشترک نداشته باشد.

خط Δ و مستوی P باهم موازی اند



اوضاع نسبی دو خط مستقیم با یک دیگر

✚ دو خط مستقیم در یک مستوی موازی نامیده می شود اگر هیچ نقطه بی مشترک نداشته باشد.

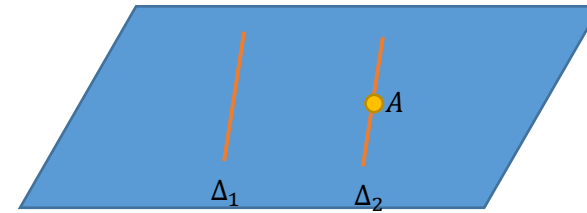
✚ دو خط مستقیم که در یک مستوی یک نقطه مشترک داشته باشد باهم متقاطع گفته می شود.

✚ دو خط مستقیم که هم مستوی نبوده و نقطه مشترک نداشته باشند بنام خطوط متنافر یاد می شود.

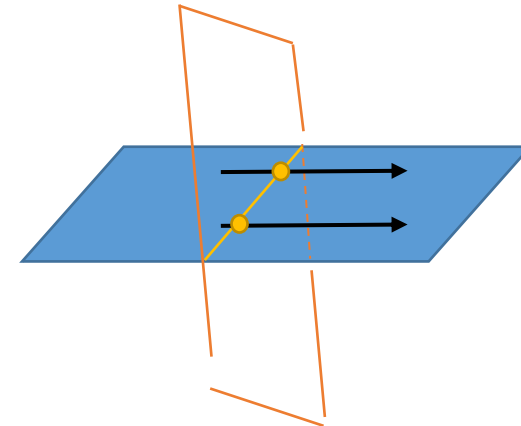
❖ خطوط مستقیم موازی در فضا

تعریف: دو خط مستقیم که در یک مستوی واقع بوده و هیچ نقطه مشترک نداشته باشد موازی نامیده می شود.

قضیه 1: از یک نقطه خارج یک خط مستقیم تنها یک مستقیم موازی با آن رسم می شود و بس

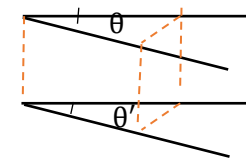


قضیه 2: هرگاه دو خط مستقیم موازی باشد و یک مستوی یک از آنها را قطع کند دیگری را نیز قطع می کند.



❖ **زاویه بین خط مستقیم در فضا**

قضیه: دو زاویه در فضا که دارای اضلاع موازی و هم جهت باشند باهم مساوی اند.



زاویه های θ و θ' باهم مساوی اند.

❖ **مستقیم های موازی و مستوی های موازی در فضا**

قضیه 1: اگر یک خط مستقیم به یک خط مستقیم یک مستوی، موازی باشد. خط مستقیم مذکور به همین مستوی موازی می باشد.

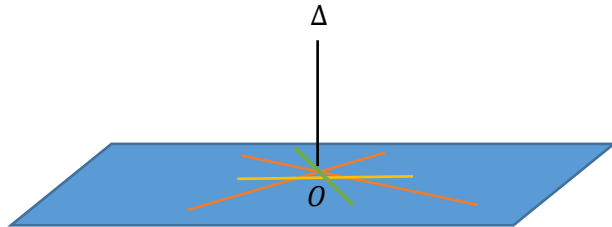


خط Δ با خط d موازی اند.

قضیه 2: هرگاه یک خط مستقیم به هر یکی از دو مستوی متقاطع موازی باشد خط مستقیم مذکور به فصل مشترک مستوی های ذکر شده موازی اند.

❖ **خطوط مستقیم و مستوی های متعامد در فضا**

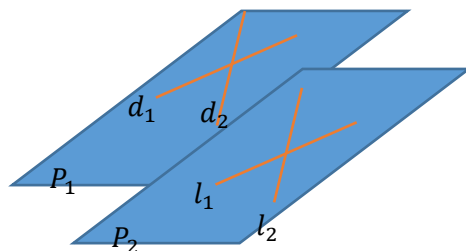
هرگاه یک خط مستقیم Δ بالای دو مستقیم که آنها را در یک نقطه قطع کند عمود باشد، بالای تمام مستقیم های که در مستوی این دو خط متقاطع واقع اند و از همان نقطه بگذرد عمود اند.



در شکل فوق مستقیم Δ بالای تمام مستقیم های که از نقطه O گذشته است، عمود اند.

❖ **مستوی های موازی در فضا**

قضیه: اگر دو خط مستقیم متقاطع یک مستوی با دو خط مستقیم متقاطع مستوی دیگر موازی باشد، مستوی های مذکور باهم موازی اند.



در شکل مقابل .

$$d_2 // l_2 \text{ و } d_1 // l_1$$

پس در نتیجه مستوی های $P_1 // P_2$

حل: در ترادف فوق بجای n اعداد طبیعی را قیمت می دهیم و شکل انکشافی ترادف دریافت می گردد.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{شکل عمومی ترادف} \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{7}{6} \dots \frac{n+1}{n}$$

نکته: اگر حدود یک ترادف معین باشد آنرا ترادف محدود و اگر حدود یک ترادف معلوم نباشد، آنرا ترادف نامحدود می نامند.

تزیاید و تناقص ترادف ها

اگر حدود یک ترادف به ترتیب ازدیاد یابد ترادف را متزیاید می نامند و اگر حدود آن به ترتیب کاهش یابد آنرا ترادف متناقص می نامند.

ترادف متزیاید ... 12 10 8 6 4 2

ترادف متناقص ... 9 - 6 - 3 0 3

مثال: اگر حد عمومی یک ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ باشد، 5 حد ترادف را دریافت نمائید.

حل: از تعریف ترادف ها استفاده نموده قیمت گذاری می نمائیم.

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$a_n : \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}$$

انواع ترادف: ترادف ها به صورت عموم دو نوع اند.

الف) ترادف حسابی

فعالیت ها: شاگردان فعالیت های ذیل را انجام دهند.

فعالیت اول: یک قلم و یک ورق کاغذ را بگیرند و با مارکر روی ورق کاغذ دو نقطه بگذارند و بعد، با قلم خط مستقیم را نشان دهند.

فعالیت دوم: یک تخته سفید خورد بردارد و با مارکر روی آن سه نقطه اختیاری بگذارد و نشان دهد که به صورت عموم سه نقطه در یک مستوی وجود دارد که به امتداد خط مستقیم نیست.

فعالیت سوم: شاگردان یک چوکی را روی سطح کاملاً هموار (کف اتاق کاشی شده) بگذارد و بگوید که چرا همزمان هر چهار پایه چوکی روی سطح قرار نمی گیرند و تنها سه پایه چوکی روی سطح قرار می گیرند؟

عنوان 1: ترادف ها

صفحه:

اهداف آموزشی

❖ در پایان این درس شاگردان به مفهوم ترادف آشنا گردد.

❖ شاگردان بتوانند ترادف را تعریف و مثال از آن کار نمایند.

❖ شاگردان به روش های حل مثال های کنکوری آشنا شوند.

تعریف 1: ترادف عبارت از ردیف اعداد، اشیا و قیمت های اند که اصل ترتیب در آن رعایت شده باشد.

مثال: ترتیب صنف های مکتب، ترتیب سن بین اولاد های یک فامیل... نمونه های از ترادف اند.

تعریف 2: ترادف عبارت از تابع است که ناحیه تعریف آن اعداد طبیعی و ناحیه قیمت آن اعداد حقیقی باشد.

$$a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

طریق ارائه ترادف: هر ترادف به اساس ترتیب ذیل نوشته می شود.

$$a_n : a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ \dots \ a_n$$

رابطه فوق بنام فورمول ترادف نیز یاد می شود. که هر کدام آنها را حد ترادف و تمام آنها را حدود ترادف ها می نامند. حدود یک ترادف بر اساس حد عمومی a_n تعریف و دریافت می شود.

مثال: شکل انکشافی ترادف $a_n = \frac{n+1}{n}$ را بنویسید.

$$a_{30} = ? \quad a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 = -2 + 203 \Rightarrow \boxed{a_{30} = 201}$$

فعالیت 1: تعداد حدود ترادف حسابی 2000 ، ... ، 45 ، 40 ، 35 چند است؟ دریافت نمائید.

فعالیت 2: حد اول یک ترادف حسابی 3 و حد دهم آن 10 است، فرق مشترک ترادف را دریافت نمائید.

رهنمود: از فورمول عمومی دریافت حد دلخواه ترادف استفاده شود.

اوسط حسابی

اگر سه حد یک ترادف حسابی به ترتیب به شکل a_{n-1} ، a_n ، a_{n+1} باشد، اوسط حسابی از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

مثال: اوسط حسابی اعداد 7 و 23 را دریافت نمائید.

حل: با استفاده از فورمول اوسط حسابی داریم که

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{7 + 23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

نکته: اگر دو حد معین a_m و a_n یک ترادف حسابی معلوم باشد، می تواند تفاضل مشترک آنها با استفاده از فورمول ذیل دریافت نمود.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad a_m = a_1 + (m - 1)d$$

$$a_n - a_m = nd - md = d(n - m)$$

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_m}{n - m}}$$

مثال: حد پنجم یک ترادف 27 و حد نهم آن 47 است، تفاضل مشترک ترادف را دریافت نمائید.

حل: با استفاده از فورمول بالا داریم که

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{47 - 27}{9 - 5} = \frac{20}{4} = 5$$

اگر رابطه بین حدود متعاقب یک ترادف بر اساس جمع و تفریق باشد، ترادف را حسابی می نامند. که همان رابطه بین حدود متعاقب همیشه یک عدد ثابت اند که آنرا تفاضل مشترک (فرق مشترک) می نامند و به حرف d نشان میدهد.

در ترادف حسابی تزايد و تناقص نظر به d تعیین می گردد، یعنی اگر $d > 0$ باشد، ترادف متزايد و اگر $d < 0$ باشد ترادف متناقص است.

مثال: ترادف ... 18 15 11 8 5 2 چگونه یک ترادف اند.

حل: در ترادف فوق $d = 3$ اند و $3 > 0$ می باشد، پس ترادف حسابی فوق متزايد است.

دریافت حد n - ام در یک ترادف حسابی

حد n - ام را که حد دلخواه نیز می نامند عبارت از حد ترادف است که حدود ترادف را تعیین می کند.

حد دلخواه در ترادف قرار ذیل دریافت می گردد.

حد اول	حد دوم	حد سوم	حد چهارم	حد n -ام
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+(n-1)d$
↓	↓	↓	↓	↓
a_1	a_2	a_3	a_4	a_n

در نتیجه بین a_1, d, n و a_n رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ برقرار است.

یعنی حد دلخواه در ترادف حسابی عبارت اند از

$$\boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d}$$

مثال: حد 30 - ام ترادف حسابی ... 12 ، 5 ، -2 را دریافت نمائید.

حل: با استفاده از فورمول عمومی ترادف می توان قرار ذیل حد 30 - ام ترادف را دریافت نمود.

$$a_1 = -2$$

$$d = 7$$

$$n = 30$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{30} = -2 + (30 - 1)7$$

ترادف هارمونیک

معکوس ترادف حسابی را ترادف هارمونیک می نامند. یعنی اگر a_n یک ترادف حسابی باشد، $\frac{1}{a_n}$ یک ترادف هارمونیک است.

مثال: ترادف هارمونیک ترادف حسابی ... 24, 17, 10, 3 را بنویسید.

حل:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \frac{1}{24}, \dots$$

اوسط هارمونیک: اگر سه حد یک ترادف هارمونیک a_{n-1}, a_n, a_{n+1} حدود یک ترادف حسابی و $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n+1}}$ حدود یک ترادف هارمونیک باشد، اوسط هارمونیک از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

ب) ترادف هندسی

اگر رابطه بین حدود یک ترادف بر اساس ضرب و تقسیم باشد، ترادف را هندسی می نامند. که همین ارتباط همیشه یک عدد ثابت اند و از حاصل تقسیم حدود متعاقب ترادف بدست می آید می آید آنرا نسبت مشترک می نامند و به حرف r و گاهاً به حرف q نشان میدهد.

تزايد و تناقص در ترادف هندسی نیز بر اساس قیمت r تعیین می گردد، یعنی اگر $r > 1$ باشد، ترادف متزايد و اگر $r < 1$ باشد ترادف متناقص می نامند. اما اگر $r = 1$ باشد ترادف ثابت اند.

ترادف متزايد ... 2, 4, 8, 16, 32

ترادف متناقص ... $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$

ترادف ثابت ... 5, 5, 5, 5

دریافت حد n - ام در ترادف هندسی

اگر a حد اول و r نسبت مشترک و n تعداد حدود یک ترادف هندسی باشد، حد n -ام یا دلخواه از رابطه ذیل دریافت می گردد.

حد اول	حد دوم	حد سوم	حد چهارم	حد پنجم	حد n -ام
a_1	aq	aq^2	aq^3	aq^4	aq^{n-1}
\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_n

یعنی فورمول حد دلخواه یا n -ام عبارت اند از.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

مثال: حد ششم ترادف ... -10, 5 را دریافت نمایید.

حل:

$$a_1 = 5$$

$$r = -2 \quad a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_6 = 5 \cdot (-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5 \cdot (-32)$$

$$n = 6$$

$$a_6 = -160$$

اوسط هندسی

اگر دو حد یک ترادف هندسی معلوم باشد اوسط هندسی آن قرار ذیل دریافت می گردد.

$$a_n = \sqrt{(a_{n-1}) \cdot (a_{n+1})}$$

مثال: اوسط هندسی اعداد 3 و 12 را دریافت نمایید.

حل: با استفاده از فورمول اوسط هندسی داریم که.

$$\bar{x}_G = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

فعالیت ها:

1. حد اول ترادف هندسی را بنویسید که حد اول آن 5 و حد اخیر آن $\frac{5}{16}$ باشد.

2. حد دوازدهم ترادف هندسی ... 2, 4, 8 را دریافت نمایید.

3. اوسط هندسی اعداد $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ را دریافت نمایید.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

مثال: مجموعه 201 حد اول ترادف حسابی $7, 11, 15, \dots$ را دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 7 \quad d = 4 \quad n = 201 \quad S_n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{201}{2} [2 \cdot 7 + (201-1)4] = \frac{201}{2} [14 + 800]$$

$$S_{201} = \frac{201}{2} [814] = 81807$$

فعالیت ها:

1. حاصل جمع 200 حد ترادف اعداد جفت را دریابید.
2. حاصل جمع 210 حد اول ترادف اعداد تاق را دریابید.
3. مجموعه قسمی 12 حد اول ترادف حسابی $2, 5, 8, 11, \dots$ را دریابید.

مجموعه قسمی n حد اول یک ترادف هندسی

اگر حدود یک ترادف هندسی را باهم جمع نمائیم آنرا سلسله هندسی می نامند.

مجموعه قسمی n حد اول یک ترادف هندسی از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

مثال: در یک ترادف هندسی حد اول برابر 2 و نسبت مشترک آن برابر با $r = \frac{1}{2}$ است، مجموعه 5 حد اول آنرا دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 2 \quad r = \frac{1}{2} \quad n = 5 \quad S_5 = ?$$

مجموعه قسمی ترادف ها

برای دریافت مجموعه قسمی یک ترادف، حدود ترادف را به ترتیب جمع می کنیم. مجموعه قسمی ترادف ها را به حرف S نشان میدهد.

اگر $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ یک ترادف باشد، مجموعه قسمی آن قرار ذیل ارائه می شود.

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

در مجموعه های قسمی جهت اختصار از سمبول سیگما استفاده می شود که دارای اندکس بالای، اندکس پائینی و فورمول تحت سیگما است.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k$$

مثال: $\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i}$ را به شکل انکشاف یافته آن بنویسید.

حل: با در نظر داشت فورمول تحت سیگما و اندکس ها می توان قرار ذیل نوشت.

$$\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13068}{5040}$$

مجموعه قسمی n حد اول ترادف حسابی

اگر حدود یک ترادف حسابی را جمع کنیم به آن را سلسله حسابی می نامند که سلسله هاس حسابی دو نوع اند، اگر تعداد حدود مشخص باشد آنرا سلسله حسابی محدود و اگر تعداد حدود نامشخص باشند آنرا سلسله حسابی نامحدود می نامند. یعنی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{سلسله محدود}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{سلسله نامحدود}$$

سلسله محدود حسابی را مجموعه قسمی نیز می نامند و مجموعه قسمی n حد یک ترادف که به S_n نشان داده می شود از رابطه ذیل بدست می آید.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{سلسله نامحدود}$$

سلسله محدود حسابی را مجموعه قسمی نیز می نامند و مجموعه قسمی n حد یک ترادف که به S_n نشان داده می شود از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

مثال: مجموعه 201 حد اول ترادف حسابی $7, 11, 15, \dots$ را دریافت نمائید.

حل:

$$a_1 = 7 \quad d = 4 \quad n = 201 \quad S_n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{201}{2} [2 \cdot 7 + (201-1)4] = \frac{201}{2} [14 + 800]$$

$$S_{201} = \frac{201}{2} [814] = 81807$$

فعالیت ها:

1. حاصل جمع 200 حد ترادف اعداد جفت را دریابید.
2. حاصل جمع 210 حد اول ترادف اعداد تاق را دریابید.
3. مجموعه قسمی 12 حد اول ترادف حسابی $2, 5, 8, 11, \dots$ را دریابید.

مجموعه قسمی n حد اول یک ترادف هندسی

اگر حدود یک ترادف هندسی را باهم جمع نمائیم آنرا سلسله هندسی می نامند.

مجموعه قسمی n حد اول یک ترادف هندسی از رابطه ذیل بدست می آید.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

مثال: در یک ترادف هندسی حد اول برابر 2 و نسبت مشترک آن برابر با $r = \frac{1}{2}$ است، مجموعه

5 حد اول آنرا دریافت نمائید.

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{31}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{8}$$

$$S_5 = \frac{31}{8}$$

فعالیت ها:

1. سلسله های هندسی متباعد چیست؟ با ذکر مثال تشریح کنید.
2. سلسله هندسی متباعد چیست؟ با ذکر مثال تشریح کنید.
3. اگر حد اول یک سلسله هندسی 5 و نسبت مشترک آن $\frac{1}{3}$ باشد، مجموعه 7 حد اول آن را دریافت نمائید.
4. اگر حد اول یک ترادف هندسی 3 و مجموع 6 حد آن 3320 باشد، نسبت مشترک سلسله هندسی را دریافت نمائید.

عنوان: مجموعه قسمی n حد اول ترادف حسابی

اهداف آموزشی

- مجموعه قسمی ترادف ها را درک کنند.
- n - حد اول یک ترادف حسابی را جمع کرده بتوانند.
- n - حد اول یک ترادف هندسی را دریافت کرده بتوانند
- روش های حل مثال را فراگیرند
- سلسله های حسابی را یاد بگیرند.
- تابع نمایی را بدانند
- بتوانند سوال مربوط به عنوان های خوانده شده را حل کنند.

اگر حدود یک ترادف حسابی را جمع کنیم به آن را سلسله حسابی می نامند که سلسله هاس حسابی دو نوع اند، اگر تعداد حدود مشخص باشد آنرا سلسله حسابی محدود و اگر تعداد حدود نا مشخص باشند آنرا سلسله حسابی نامحدود می نامند. یعنی

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{سلسله محدود}$$

حل 1: در سلسله هندسی فوق نسبت مشترک مثبت $r = 2 > 0$ پس سلسله متباعد است و حاصل جمع آن برابر با بینهایت است.

$$S_{\infty} = \infty$$

مثال 2: حاصل جمع سلسله هندسی $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ را دریافت نمایید.

حل 2: در سلسله فوق نسبت مشترک منفی $r = \frac{1}{2} < 0$ است، پس سلسله متقارب است و حاصل جمع آن قرار ذیل بدست می آید.

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

فعالیت ها:

- حاصل جمع سلسله $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \dots$ را دریابید.
- حد اول یک سلسله هندسی 27 و نسبت مشترک آن $\frac{1}{3}$ است، حاصل جمع بی نهایت حدود این سلسله را دریابید.

توابع نمایی

صفحه: 153

تعریف: توابع نمایی عبارت از توابع اند که متحول آن در نمایی آن قرار داشته باشد. یا عبارت از تابع است که ناحیه تعریف آن تمام اعداد حقیقی و ناحیه قیمت آن اعداد حقیقی مثبت باشد.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : f(x) = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+ , x \in \mathbb{R}$$

خواص توابع نمایی

- گراف توابع نمایی همیشه از نقطه $(0,1)$ می گذرد.
 - ناحیه تعریف توابع نمایی تمام اعداد حقیقی و ناحیه قیمت اعداد حقیقی مثبت است.
 - تابع نمایی یک تابع یک به یک و معکوس پذیر است.
 - معکوس توابع نمایی توابع لوگاریتمی است.
 - گراف توابع نمایی $f(x) = a^x$ و $f(x) = a^{-x}$ نظر به محور y متناظر است.
- مثال:** گراف تابع نمایی $f(x) = 3 \cdot 2^x$ را رسم کنید.

$$a_1 = 2 \quad r = \frac{1}{2} \quad n = 5 \quad S_5 = ?$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{31}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{8}$$

$$S_5 = \frac{31}{8}$$

سلسله هندسی لایتناهی

اگر در یک سلسله هندسی نسبت مشترک یک عدد مثبت ($r > 0$) بوده و تعداد حدود آن معلوم نباشد، درس صورت حد نهایی سلسله به بی نهایت خواهد رسید، که چنین سلسله را سلسله هندسی متباعد می نامند. و اگر درین سلسله نسبت مشترک یک عدد منفی ($r < 0$) باشد، آنرا سلسله هندسی متقارب می نامند.

دریافت حاصل جمع سلسله هندسی متباعد و متقارب

با در نظر داشت فورمول $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ و میدانیم که در سلسله هندسی متباعد $r > 0$ است، پس با تقرب تعداد حدود به بی نهایت، حاصل جمع یک سلسله هندسی متباعد نیز بی نهایت می گردد.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} : r > 0 \text{ and } n \rightarrow \infty \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1(1-r^{\infty})}{1-r} = \infty$$

سلسله متباعد $S_{\infty} = \infty$ if $r > 0$

اما در سلسله هندسی متقارب $r < 0$ پس حاصل جمع سلسله هندسی متقارب از رابطه ذیل دریافت می گردد.

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} : r < 0, n \rightarrow \infty$$

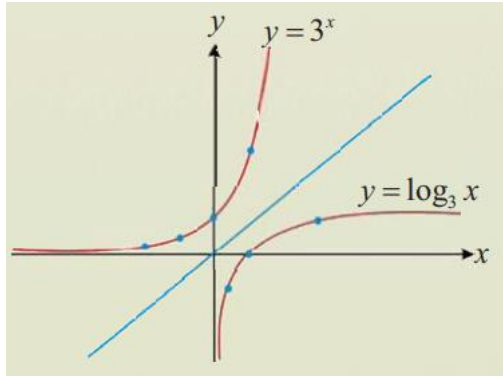
$$\Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1(1-r^{\infty})}{1-r} \xrightarrow{r^n \rightarrow 0} \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

مثال 1: حاصل جمع سلسله هندسی $3 + 6 + 12 + 24 + \dots$ را دریافت نمایید.

حل: با استفاده از قیمت گذاری گراف توابع فوق را ترسیم کرده می توانیم.

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9



مثال 2: اگر $f(x) = \log_3 x$ باشد، قیمت های $f(1)$ ، $f(3^{-2})$ ، $f(9)$ ، $f(3)$ را دریافت نمائید.

حل 2:

$$f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

$$f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2$$

$$f(1) = \log_3 1 = 0$$

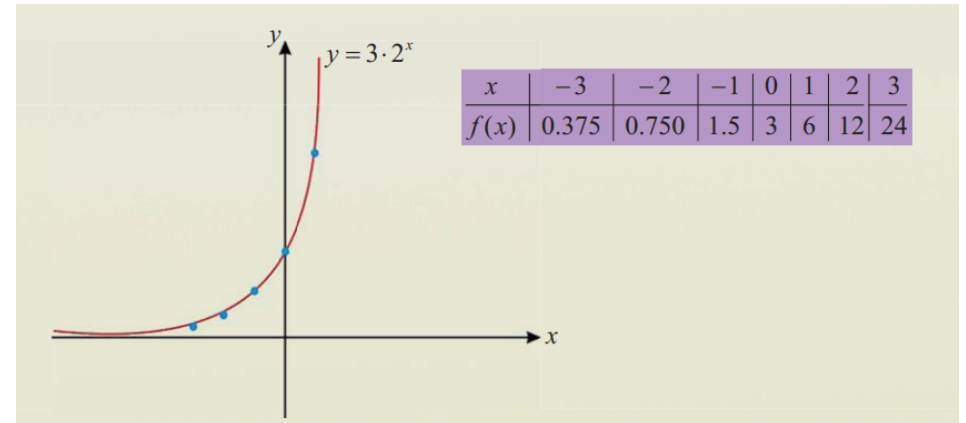
خواص توابع لوگاریتمی

1. ناحیه تعریف توابع لوگاریتمی تمام اعداد حقیقی اند.
2. گراف توابع لوگاریتمی همیشه از نقطه $(1, 0)$ می گذرد.
3. توابع لوگاریتمی یک به یک و معکوس پذیر اند که معکوس آن توابع نمایی می باشد.

لوگاریتم معمولی و طبیعی

الف) لوگاریتم معمولی: عبارت از لوگاریتمی است که قاعده آن عدد 10 باشد، این لوگاریتم به نام لوگاریتم Briggs نیز یاد می شود.

حل: تابع فوق متزايد است و با استفاده از قیمت گذاری نقاط از گراف آنرا مشخص نموده و آنرا ترسیم می کنیم.



فعالیت:

- گراف تابع $y = 2^{-x}$ را ترسیم کنید.
- گراف تابع $y = 5 \cdot 3^{-x}$ را ترسیم نمائید.

لوگاریتم

لوگاریتم عبارت از طرز ارائه نوع دیگر طاقت می باشد، یا به عبارت دیگر لوگاریتم عبارت از محاسبه توان مجهول می باشد.

$$y = \log_a x$$

در رابطه بالا

x - عدد لوگاریتمی اند که همیشه بزرگ از صفر اند. ($x > 0$)

a - قاعده لوگاریتم اند که بزرگ از صفر و خلاف یک اند یعنی ($a > 0, a \neq 1$)

$$\log_2 4 \quad \text{و} \quad \log_7 12 \quad \text{و} \quad \log_3 125$$

تابع لوگاریتمی:

معکوس تابع نمایی را به نام تابع لوگاریتمی یاد می نماید.

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

مثال: گراف توابع $y = \log_3 x$ و $y = 3^x$ ترسیم کنید.

6. یک لوگاریتم را به شکل حاصل تقسیم دو لوگاریتم با عین قاعده نوشته می توانیم.

$$\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$$

$$\log_5 12 = \frac{\log_7 12}{\log_7 5} \quad \text{و} \quad \log_2 m = \frac{\log_d m}{\log_d 2}$$

7. اگر یک لوگاریتم معکوس گردد، جاهای قاعده و عدد لوگاریتمی تغییر می کند.

$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$$

$$\log_{125} \sqrt{5} = \frac{1}{\log_{\sqrt{5}} 125} = \frac{1}{\log_{(5)^{\frac{1}{2}}} 5^3} = \frac{1}{6 \log_5 5} = \frac{1}{6}$$

8. لوگاریتم که قاعده آن دارای توان باشد، یک بر توان قاعده را ضرب لوگاریتم قرار می دهیم.

$$\log_{b^n} x = \frac{1}{n} \log_b x$$

$$\log_{4^5} 3 = \frac{1}{5} \log_4 3$$

رابطه بین لوگاریتم طبیعی و معمولی

با در نظر داشت قاعده های این دو لوگاریتم یعنی $(e, 10)$ و با استفاده از قانون $\log_b a = \frac{\log_m a}{\log_m b}$ داریم که

$$\ln x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} x$$

$$\log_{10} e = \log_{10} 2.718281828 \dots = 0,4343$$

پس با وضع این لوگاریتم داریم که

$$\ln x = \frac{1}{0,4343} \cdot \log_{10} x \Rightarrow \boxed{\ln x = 2.3026 \log x}$$

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \log_{10} x = \log x$$

$$\log_{10} 20 = \log 20 \quad \log_{10} 45 = \log 45 \quad \log_{10} 10^3 = 3$$

ب) لوگاریتم طبیعی: عبارت از لوگاریتم اند که قاعده آن عدد اولیر (e) باشد. یعنی

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \log_e x = \ln x \quad : \quad e = 2.718281828653 \dots$$

$$\log_e 12 = \ln 12 \quad \log_e 25 = \ln 25 \quad \log_e 200 = \ln 200$$

قوانین لوگاریتم:

1. لوگاریتم هد عدد به قاعده خودش برابر با یک است؟

$$\log_a a = 1 \quad : \quad a \neq 1 \quad \text{and} \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\log_4 4 = 1 \quad \text{و} \quad \log_{23} 23 = 1$$

2. لوگاریتم یک به هر قاعده برابر با صفر است.

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_3 1 = 0 \quad , \quad \log_{25} 1 = 0$$

3. لوگاریتم حاصل ضرب دو یا چند عدد برابر با حاصل جمع لوگاریتم های آنهاست

$$\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_{10} 5 \cdot 10 = \log_{10} 5 + \log_{10} 10 = 1 + \log_{10} 5$$

4. لوگاریتم حاصل تقسیم دو عدد برابر است با حاصل ضرب لوگاریتم های آنها

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_4 \frac{12y}{3x} = \log_4 \frac{4y}{x} = \log_4 4y - \log_4 x = 1 + \log_4 \frac{y}{x}$$

5. لوگاریتم یک عدد توان دار مساوی است به توان ضرب در لوگاریتم همان عدد.

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

$$\log_4 x^3 = 3 \log_4 x \quad , \quad \log_{12} y^7 = 7 \log_{12} y$$

مثال: $\ln 4.69$ را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه بین لوگاریتم های طبیعی و معمولی داریم که

$$\ln x = 2.3026 \log x$$

$$\Rightarrow \ln 4.69 = 2.3026 \log 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

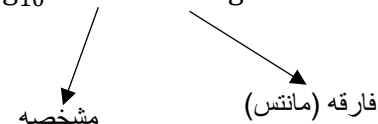
$$\log 4.69 = 0.6712$$

مشخصه و ماننس لوگاریتم

لوگاریتم از دو بخش (قسمت صحیح و قسمت اعشاری) ساخته شده است. که قسمت صحیح آنرا بنام مشخصه و قسمت اعشاری آن را بنام ماننس می گویند. یعنی

$$N = a \cdot 10^n$$

$$\log_{10} N = \log_{10} a \cdot 10^n = \log_{10} a + \log_{10} 10^n = n + \log a$$



$$0 \leq \log a < 1$$

مثال: مشخصه و ماننس لوگاریتم $\log 235$ را دریافت نمائید.

حل: به کمک روش علمی عدد نویسد داریم که $235 = 2.35 \cdot 10^2$ است و از اطراف لوگاریتم می گیریم.

$$\log 235 = \log 2.35 \cdot 10^2 = \log 10^2 + \log 2.35 = 2 + \log 2.35$$

در مثال فوق مشخصه برابر است با 2 و ماننس آن برابر است با 0,371 = $\log 2.35$

روش های محاسبه مشخصه لوگاریتم

اگر عدد لوگاریتمی یک عدد تام باشد، مشخصه لوگاریتم برابر به تعداد ارقام عدد لوگاریتمی منفی یک اند.

$$\log 28871 \quad \text{مشخصه} = 4$$

$$\log 400821 \quad \text{مشخصه} = 5$$

اگر عدد لوگاریتمی کوچکتر از یک باشد، مشخصه برابر است با تعداد صفرهای اطراف علامه اعشاری، که علامه مشخصه منفی در نظر گرفته می شود.

$$\log 0,0234 \quad \text{مشخصه} = -2$$

$$\log 0,000345 \quad \text{مشخصه} = -4$$

جدول لوگاریتم

لوگاریتم اعداد از دو بخش (مشخصه و ماننس) تشکیل گردیده است، در درس قبلی روش محاسبه مشخصه لوگاریتم را خواندیم، درین درس روش دریافت ماننس را بررسی می کنیم.

ماننس یک لوگاریتم عدد بین صفر و یک است یعنی $0 < \text{ماننس} < 1$ پس برای دریافت آن کدام روش عمومی وجود ندارد، لذا برای دریافت ماننس لوگاریتم به جدول از قبل تهیه شده مراجعه می شود که در کتاب های درسی موجود است.

مثال: لوگاریتم $\log 765$ را دریافت نمائید.

حل:

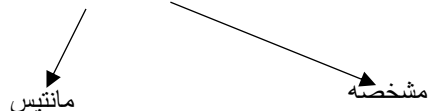
$$\log 765 = \log 7.65 \cdot 10^2 = \log 7.65 + \log 10^2 = \log 7.65 + 2$$

دیده می شود که مشخصه لوگاریتم فوق 2 و ماننس آن $\log 7.65$ است، برای دریافت مقدار عددی ماننس در جدول لوگاریتمی سطر 76 را تحت ستون 5 چک می کنیم که با کدام عدد می خورد.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

دیده می شود که این سطر و ستون به عدد 0.8837 می خورد، پس $\log 7.65 = 0.8837$ است، یعنی

$$\log 765 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$



انقی لوگاریتم

هرگاه $\log_a y = x$ باشد، y را بنام انقی لوگاریتم x می نامند، یعنی $y = \text{antilog } x$.
 مثال: اگر لوگاریتم $\log 34 = 1.5351$ پس انقی لوگاریتم 1.5351 برابر با 34 است.

انترپولیشن خطی

روش محاسبه یک عدد لوگاریتم آن در جدول لوگاریتمی نباشد را از بین دو عدد که لوگاریتم آن در جدول موجود باشد را بنام انترپولیشن خطی (درج خطی) می نامند.

مثال: $\log 5.235$ را دریافت نمائید.

حل: عدد لوگاریتمی لوگاریتم فوق در جدول وجود ندارد ولی اعداد کوچکتر و بزرگتر از آن وجود دارد یعنی 5.230 و عدد 5.240 وجود دارد که لوگاریتم های آنها نیز در جدول موجود است. پس با استفاده از انترپولیشن خطی قرار ذیل لوگاریتم آن را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} \log 5.230 &= 0.7185 \\ \log 5.240 &= 0.7193 \\ \log 5.230 < \log 5.325 < \log 5.240 \\ 0.7185 < \log 5.235 < 0.7193 \\ 0.7185 < x < 0.7193 \end{aligned}$$

اعداد	مانتیس
5.240	0.7193
0.005 $\left[\begin{array}{c} 5.235 \\ 5.230 \end{array} \right] d$	x
5.230	0.7185

0.010 0.0008

از طریق انترپولیشن خطی فرض می شود که این چهار عدد با هم متناسب است. یعنی

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.005}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.0008 \cdot 0.005}{0.010} \Rightarrow d \approx 0.0004$$

$$x = 0.0004 + 0.7185 = 0.7189$$

$$\boxed{\log 5.235 = 0.7189}$$

معادلات نمایی و لوگاریتمی

الف) معادلات نمایی: عبارت از معادلات اند که متحول آن در نمایی آن قرار داشته باشد به نام معادلات نمایی یاد می شود. برای دریافت آن از روش ها و قوانین طاقت ها استفاده می نمائیم.

مثال 1: قیمت x را در معادله نمایی $2^{x-1} = 32$ دریافت نمائید.

حل 1:

$$2^{x-1} = 32 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^5 \Rightarrow x - 1 = 5 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

مثال 2: معادله نمایی $8^{3x-1} = 2^4$ را حل نمائید.

حل 2:

$$8^{3x-1} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{3x-1} = 2^4 \Rightarrow 2^{9x-3} = 2^4$$

$$\Rightarrow 9x - 3 = 4 \Rightarrow 9x = 7 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7}{9}}$$

ب) معادلات لوگاریتمی: معادلات که بجای عدد لوگاریتمی متحول قرار داشته باشد، برای حل این معادلات ابتداء آنها را به کمک قوانین لوگاریتم و طاقت ساده می سازیم و بعدا حل می نمائیم.

مثال 1: قیمت x را در معادله لوگاریتمی $\log_2(x^2 - 1) = 3$ را دریافت نمائید.

حل 1: لوگاریتم فوق را از حال لوگاریتمی به حالت نمایی تبدیل میکنیم.

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

$$x^2 - 1 = 2^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 8 \Rightarrow x^2 = 9 \quad / \cdot \quad \sqrt{\quad}$$

$$x = \pm 3$$

مثال 2: قیمت x را در معادله لوگاریتمی $\log_3(3^{2x} + 2) = x + 1$ دریافت نمائید.

حل 2: ابتداء آنها را به معادله نمایی تبدیل می کنیم.

$$\log_3(3^{2x} + 2) = x + 1$$

$$3^{2x} + 2 = 3^{x+1} \Rightarrow (3^x)^2 + 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

از تعویض استفاده می کنیم و $3^x = y$ تعویض نموده آنها را در معادله وضع می کنیم که یک معادله یک مجهوله درجه دوم حاصل می گردد.

$$\log \frac{8750}{3,49} = \log 8750 - \log 3,49 = 3,9420 - 0,5428 = 3,3992$$

$$\text{anti log } 3,3992 = 2507,16$$

$$\Rightarrow \frac{8750}{3,49} = 2507,16$$

❖ دریافت طاقت ها به کمک لوگاریتم

با استفاده از قانون سوم لوگاریتم می توانیم طاقت های یک عدد را ساده نمائیم.

مثال: طاقت $(1,05)^6$ را دریافت نمائید.

حل:

$$\log(1,05)^6 = 6 \log 1,05 = 6 \cdot (0,0212) = 0,1272$$

$$\text{anti log } 0,1272 = 1,340$$

$$\Rightarrow (1,05)^6 = 1,340$$

متریکس ها

اهداف آموزشی: در پایان این بخش شاگردان باید:

- قادر به تعریف و شناسایی متریکس ها گردد.
- متریکس ها را تشکیل داده بتوانند.
- قادر به جمع و تفریق کتریکس ها گردد.
- قادر به ترتیب ترانسئوز متریکس گردد.
- قادر به انجام ضرب متریکس در اسکالر گردد.
- قادر به انجام ضرب دو متریکس گردد.
- قادر به حل سوالات مربوط به متریکس ها گردد.

نکته: قرار است درین بخش موارد ذیل را یاد بگیریم.

$$(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x + 2 = y^2 + 3y + 2 = 0$$

$$y^2 + 3y + 2 = (y - 1)(y - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases}$$

$$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$$

$$3^x = 2 \Rightarrow x = \log_3 2$$

استفاده از لوگاریتم در اجرای عملیه های ریاضی

❖ دریافت حاصل ضرب توسط لوگاریتم

حاصل ضرب دو یا چند عدد را توسط لوگاریتم به کمک قانون $\log M \cdot N = \log M + \log N$ دریافت کرده می توانیم.

مثال: می خواهیم حاصل ضرب اعداد $3,17 \cdot 88,2$ را به کمک لوگاریتم دریافت نمائید.

حل:

$$\log(3,17 \cdot 88,2) = \log 3,17 + \log 88,2 = 0,5011 + 1,9544 = 2,4466$$

با استفاده از انترپولیشن خطی مانتیس را دریافت می نمائیم و در نتیجه حاصل ضرب قرار ذیل دریافت می گردد.

$$\text{antilog } 2,4466 = 279,375$$

$$\Rightarrow 3,17 \cdot 88,2 = 279,375$$

❖ دریافت خارج قسمت ها به کمک لوگاریتم

با استفاده از قانون $\log \frac{N}{M} = \log N - \log M$ می توان خارج قسمت یک عملیه تقسیم را دریافت نمائیم.

مثال: خارج قسمت $\frac{8750}{3,49}$ را به کمک لوگاریتم دریافت نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & h \\ 5 & c \\ -1 & p \end{pmatrix}$$

حل: متریكس فوق دارای سه سطر و دو ستون است، پس یک متریكس سه در دو (3×2) است یعنی مرتبه یا درجه متریكس فوق (3×2) است.

انواع متریكس ها:

1. **متریكس سطری:** عبارت از متریكس است که تنها دارای یک سطر باشد. به مثال ذیل توجه کنید.

$$B = (2 \ 6 \ m \ 7 \ f)_{1 \times 5}$$

2. **متریكس ستونی:** عبارت از متریكس است که تنها دارای یک ستون باشد. به مثال ذیل توجه کنید.

$$N = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}_{4 \times 1}$$

3. **متریكس صفری:** متریكس که تمام عناصر آن صفرها باشد، بنام متریكس صفری یاد می گردد. به مثال ذیل توجه کنید.

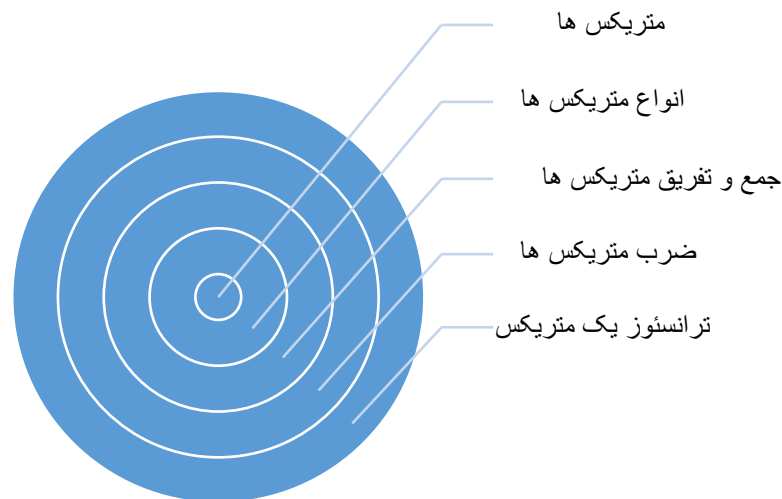
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow 0_{2 \times 3}$$

4. **متریكس مربعی:** عبارت از متریكس است که تعداد سطرها و ستون های آن با هم برابر باشد.

$$K = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

1.4 **قطر اصلی متریكس:** هر متریكس مربعی دارای یک قطر اصلی اند که از عنصر اول سطر و ستون اول شروع تا عنصر آخر سطر و ستون آخری تمام را در بر دارد. در متریكس فوق عناصر قطر اصلی متریكس است. (a, e, i)

2.4 **قطر فرعی متریكس:** قطر فرعی متریكس بر عکس قطر اصلی متریكس در یک متریكس مربعی تعریف می گردد. در متریكس فوق (g, e, c) عناصر قطر فرعی اند.



متریكس

تعریف: عبارت از جدول متشکل از سطرها و ستون ها است که در آن اعداد، اشیا و کمیت ها جابجا می گردد. هر متریكس توسط یک حرف کلان انگلیسی نام گذاری می گردد.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

در متریكس فوق ردیف های عمودی را بنام ستون و ردیف های افقی را بنام سطرها یاد می نماید.

نکته: برای نشان دادن یک عنصر دلخواه متریكس از (a_{ij}) استفاده می گردد که به ترتیب i نشان دهنده موقعیت سطر و j نشان دهند موقعیت ستون است.

مرتبه یا درجه متریكس:

تعداد ستون های متریكس در سطرهای آن را بنام مرتبه یا درجه متریكس یاد می نماید. و معمولاً آنرا به شکل $m \times n$ می نویسند.

مثال: مرتبه متریكس ذیل را نشان دهید.

نکته: قطر ها تنها در متریكس های مربعی تعریف می گردد. در سایر انواع متریكس ها قطر ها تعریف نمی شود.

5. **متریكس مثلثی:** اگر در یک متریكس مربعی تمام عناصر بالا یا پائین قطر اصلی متریكس صفر ها باشند، متریكس را مثلثی می نامند.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ x & p & 0 \\ k & t & u \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

متریكس های A و B به ترتیب متریكس های مثلثی بالایی و پائینی است.

6. **متریكس سکالر:** متریكس که تمام عناصر قطر اصلی آن عین عدد یا کمیت باشد بنام متریكس سکالر یاد می شود. به مثال ذیل توجه کنید.

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

7. **متریكس قطری:** متریكس عناصر قطر اصلی آن خلاف صفر و سایر عناصر آن صفر ها باشد بنام متریكس قطری یاد می گردد. به مثال ذیل توجه کنید.

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

8. **متریكس واحد:** اگر در یک متریكس قطری یا سکالر، عناصر قطر اصلی آن عدد یک (1) باشد، متریكس را واحد می نامند و به حرف I نشان می دهد.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

9. **متریكس متضاد (متقابل):** متریكس متضاد یک متریكس عبارت از متریكس است که عناصر متناظر آن باهم متضاد باشد، متضاد متریكس A را به $-A$ نشان می دهد.

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow -A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

جمع و تفریق متریكس ها

جمع متریكس ها: برای جمع دو متریكس عناصر متناظر آنها را باهم جمع می نمائیم. یعنی

$$\begin{cases} A = (a_{ij})_{m \times n} \\ B = (a_{ij})_{m \times n} \end{cases} \Rightarrow C = A + B = (a_{ij})_{m \times n} + (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\Rightarrow C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

مثال: متریكس های $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ را باهم جمع کنید.

حل:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 3+1 & 2+2 \\ 1-2 & 2+0 \\ 0+1 & -4+7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

تفریق متریكس ها: تفریق متریكس مانند عملیه جمع متریكس ها است تنها علامه آنها فرق دارد.

$$\begin{cases} A = (a_{ij})_{m \times n} \\ B = (a_{ij})_{m \times n} \end{cases} \Rightarrow D = A - B = (a_{ij})_{m \times n} - (a_{ij})_{m \times n}$$

$$\Rightarrow D = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$$

مثال: متریكس های $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ داده شده است، $A - B$ را دریافت نمائید.

حل:

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-1 & 9-5 \\ 6-(-2) & -3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

مثال 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ داده شده باشد، پس $A \times B$ را دریافت نمائید.

حل 1:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0(-1) \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

مثال 2: اگر $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ داده شده باشند، حاصل ضرب $M \times N$ را دریابید.

حل 2:

$$M \times N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+1 & 6+0-2 \\ -2+2-2 & -6+0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

فعالیت: سوالات ذیل را حل نمائید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A \times B = ?$$

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow K \times L = ?$$

خواص ضرب ماتریکس ها

1. ضرب دو ماتریکس دارای خاصیت تبدیل است ولی بالعموم درست نیست.

$$A \cdot B = B \cdot A$$

2. ضرب ماتریکس ها دارای خاصیت اتحادی است. یعنی

$$(AB)C = A(BC)$$

3. ضرب ماتریکس ها دارای خاصیت توزیعی برای ضرب بالای جمع می باشد. یعنی

ضرب سکالر در ماتریکس: اگر یک عدد سکالر به یک ماتریکس ضرب شود، آن سکالر (عدد) به تمام عناصر ماتریکس ضرب می شود.

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

مثال: اگر $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$ و $k = 2$ باشد، kA را دریافت نمائید.

حل:

$$k \cdot A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

خواص ضرب سکالر در ماتریکس: اگر A و B دو ماتریکس هم مرتبه و α و β دو عدد حقیقی باشد، آنگاه داریم که:

- ✓ $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- ✓ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- ✓ $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

ضرب دو ماتریکس

برای اینکه دو ماتریکس باهم ضرب پذیر باشد باید تعداد ستون های ماتریکس اول برابر با تعداد سطر های ماتریکس دوم باشد. یعنی

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$B = (b_{ij})_{n \times p}$$

$$\Rightarrow C = A \cdot B = (c_{ij})_{m \times p}$$

$$(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot b_{ij} = (c_{ij})_{m \times p}$$

7. ترانسپوز متریكس چیست؟

8. متریكس متناظر چیست و با ترانسپوز متریكس چه ارتباط دارد؟ با مثال شرح دهید.

9. از خواص ترانسپوز متریكس یک مثال کار کنید.

آنچه قرار است درین بخش بیاموزیم

$$1. A(B + C) = AB + AC$$

$$2. (A + B)C = AC + BC$$

$$3. K(AB) = (KA)B = A(KB)$$

ترانسپوز یک متریكس

تعریف: هرگاه یک متریكس مربعی موجود باشد سطرها به ستون ها و ستون ها به سطرها تبدیل شود، متریكس جدید که بدست می آید را ترانسپوز متریكس می نامند. ترانسپوز متریكس A را به شکل A^T نشان میدهد.

مثال: ترانسپوز متریكس $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ را دریافت نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

خواص ترانسپوز متریكس

- ❖ $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
- ❖ $(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \dots$
- ❖ $(AB)^T = B^T \cdot A^T$
- ❖ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- ❖ $(-A)^T = -A^T$

فعالیت ها:

1. متریكس را تعریف کنید.
2. یک متریكس را ترتیب داده سطرها و ستون های آنها را نشان دهید.
3. در متریكس ها موقعیت سطرها و ستون ها چگونه دریافت و معلوم می شود؟
4. متریكس ها چند نوع اند؟ از هر کدام نوع یک مثال ارائه نمائید.
5. عملیه های جمع، تفریق و ضرب را در متریكس های ذیل اعمال نمائید.

$$A = \begin{pmatrix} w & 1 & 9 \\ p & r & 4 \\ s & -2 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 12 \\ 5 & 1 & l \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

6. از خواص ضرب متریكس ها سه مثال ارائه نمائید.

دیترمنانت

- محاسبه دیترمنانت 2 در 2
- محاسبه دیترمنانت 3 در 3
- خواص دیترمنانت
- مترکس الحاقی یک متریكس

حل معادلات

- سیستم حل معادلات خط با استفاده از معکوس متریكس
- حل سیستم معادلات خطی به طریق کرامر
- حل سیستم معادلات خطی به طریق حذفی

اهداف آموزشی: در ختم این بخش شاگردان قادر گردد تا:

- ❖ دیترمنانت را تعریف بتوانند.
- ❖ دیترمنانت متریكس های 2×2 را دریافت کرده بتوانند.
- ❖ دیترمنانت متریكس های 3×3 را دریافت کرده بتوانند.
- ❖ خواص دیترمنانت را بدانند.
- ❖ مترکس متوصله یک مترکس را تعریف و دریافت بتوانند.
- ❖ معادلات خطی را به روش های مختلف حل بتوانند.
- ❖ مثال های مربوط به درس را واضح تشریح و بیان بتوانند.

دیترمنانت

اگر یک متریكس به یک عدد حقیقی نسبت داده شود بنام دیترمنانت یاد می شود. دیترمنانت مترکس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ را به یکی از اشکال $|A|$ ، $Det A$ ، یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نشان داده می شود.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

مثال: دیترمنانت متریكس $B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ را به روش ماینور کوفکتور دریافت کنید.

حل:

$$\begin{aligned} B &= \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (12 + 3)4 - (4 + 15)(-1) + (2 - 30)7 \\ &= 15 \cdot 4 + 19 + (-28) \cdot 7 = 60 + 19 - 196 = -117 \\ \Rightarrow |B| &= -117 \end{aligned}$$

خواص دیترمنانت

- هرگاه تمام عناصر یک سطر یا ستون یک متریكس صفرها باشند، دیترمنانت آن برابر با صفر است.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 8 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow |A| = 0$$

- هرگاه دو سطر یا دو ستون متریكس یکسان یا متناسب باشند، دیترمنانت آن متریكس برابر با صفر است.

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow |B| = 0$$

- اگر عناصر یک متریكس مضرب یک سطر یا ستون دیگر باشند، دیترمنانت آن برابر با صفر است.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \beta a & \beta b & \beta c \\ d & e & f \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow |A| = 0$$

- دیترمنانت $|A|$ و $|A^T|$ باهم مساوی اند.

$$|A| = |A^T|$$

نکته: تنها متریكس های مربعی دارای دیترمنانت اند نه تمام متریكس ها

محاسبه دیترمنانت متریكس های 2×2

دیترمنانت متریكس $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ قرار ذیل تعریف می گردد.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Det}A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: دیترمنانت متریكس $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ را دریافت نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 28 - (-16) = 28 + 16 = 44$$

محاسبه دیترمنانت متریكس های 3×3

برای محاسبه دیترمنانت متریكس های 3×3 دو روش وجود دارد (روش ساروس و روش ماینور-کوفکتور)

الف) روش ساروس: درین روش دو سطر متریكس را در قسمت پائین کاپی می کنیم یا دو ستون متریكس را در قسمت راست کاپی می کنیم.

مثال: دیترمنانت متریكس $B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ را دریافت کنید.

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow (14 + 48 + 15) - (-12 - 4 + 210) = -117$$

$$\Rightarrow |B| = -117$$

ب) روش ماینور-کوفکتور: درین روش یک عنصر یک سطر یا ستون را ماینور میگیریم و از عناصر خارج از سطر و ستون عنصر گرفته شده یک متریكس 2×2 تشکیل داده و از آن دیترمنانت می گیریم و داریم که.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

متریکس الحاقی (متوصله) یک متریکس:

برای دریافت متریکس الحاقی مترکس های 2×2 مرتبه و جاهای سطر و ستون قطر اصلی را تغییر داده و عناصر قطر فرعی را تغییر علامه می‌دهیم.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

نکته:

برای دریافت معکوس متریکس یکی بر دیترمنانت همان متریکس را با متریکس الحاقی آن ضرب می‌کنیم.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA \quad : \quad |A| \neq 0$$

مثال: معکوس ضربی متریکس $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ را دریافت نمایید.

حل:

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 10 = -8 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

• هرگاه در یک دیترمنانت جای دو سطر یا ستون متوالی و غیر متوالی را با یکدیگر تبدیل کنیم علامت دیترمنانت تغییر می‌کند.

مثال:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Rightarrow |A| = -|B|$$

معکوس ضربی متریکس های 2×2

تعریف: متریکس مربعی $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را در نظر گرفته، اگر متریکس مربعی B وجود داشته باشد؛ طوری که $AB = BA = I$ گردد، درین صورت B را معکوس ضربی متریکس A گویند و آنرا به شکل A^{-1} نشان م‌دهد.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

نکته 1:

متریکس منفرد (singular): اگر دیترمنانت متریکس صفر گردد متریکس را منفرد می‌نامند.

متریکس منظم/غیر منفرد (non-singular): عبارت از متریکس است که دیترمنانت آن خلاف صفر باشد.

نکته 2:

یک متریکس زمانی معکوس پذیر اند که:

✓ مربعی باشد

✓ دیترمنانت آن خلاف صفر باشد (متریکس غیر منفرد باشد)

مثال: نشان دهید که $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ معکوس یک دیگر اند.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

▪ حل سیستم معادلات خطی به روش کرامر

درین روش یک متریكس از ضرایب مجهول ها می سازیم و نام آن را A می گذاریم، یک متریكس نظر به متحول x یک متریكس نظر به متحول y و یک متریكس نظر به متحول z می سازیم، در نهایت قیمت مجهول ها را دریافت می نمائیم.

مثلاً اگر $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}$ یک سیستم معادلات خطی سه مجهوله درجه اول باشد، به روش کرامر آنرا می توان قرار ذیل حل نمود.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : |A| \neq 0$$

مقادیر x ، y و z قرار ذیل دریافت می شود.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

مثال: سیستم معادلات خطی $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases}$ را به روش کرامر حل نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -58$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -58$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} + \frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4} + \frac{15}{4} & -\frac{5}{4} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

حل سیستم معادلات خطی

▪ حل سیستم معادلات خطی با استفاده از معکوس متریكس

سیستم معادلات خطی $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ را در نظر می گیریم و سه متریكس را از آن قرار ذیل جدا می کنیم.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

درین صورت متریكس معکوس متریكس های فوق قرار ذیل دریافت می گردد.

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = IX = X$$

مثال: سیستم معادلات دو مجهوله $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ را با استفاده از معکوس متریكس حل نمائید.

حل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

با استفاده از معکوس متریكس داریم که

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 14 \\ -5 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-35z = -105 \Rightarrow z = \frac{105}{35} \Rightarrow z = 3$$

$$-7y + 7z = 7 \Rightarrow -7y + 7(3) = 7$$

$$-7y = -14 \Rightarrow y = \frac{14}{7} \Rightarrow y = 2$$

$$x = 1$$

فعالیت ها:

دیترمنانت را تعریف نمائید.

انواع دیترمنانت را شماره وار بنویسید.

سیستم معادلات خطی به چند روش حل می شود.

سیستم معادلات $\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 5x + 4y + z = 0 \\ 2x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$ را به روش های حذفی و کرامر حل نمائید.

متریكس الحاقی چیست؟ و چه نقشی در تعیین متریكس معكوس یک متریكس دارد؟

آنچه قرار است درین بخش بخوانیم



اهداف آموزشی: در پایان این بخش شاگردان باید قادر گردد تا.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} = 87$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{87}{-29} = -3$$

حل سیستم معادلات خطی به روش حذفی

درین روش با استفاده از تغییرات در سطرها و ستون های متریكس ضرایب و ثابت ها تحت عملیه های اساسی چهار گانه، می توانیم قیمت مجهول را دریافت نمائیم.

درین روش ضریب یک یا دو مجهول را به صفر می رسانیم تا قیمت یک مجهول پیدا شود، و بعد با استفاده از آن سایر مجهول ها دریافت می شود.

مثال 1: سیستم معادلات خطی $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ را توسط طریقه حذفی حل نمائید.

حل 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 1 & 3 & : & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{نوایی}]{R_1 - R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 0 & -1 & : & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2(-1) \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & : & 5 \\ 0 & 1 & : & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 2$$

$$x + 2y = 5 \Rightarrow x + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow x = 1$$

مثال 2: سیستم معادلات خطی $\begin{cases} 2x + 3y - z = 5 \\ 3x + y + 2z = 11 \\ 4x - 2y + z = 3 \end{cases}$ را به روش حذفی حل نمائید.

حل 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 3 & 1 & 2 & : & 11 \\ 4 & -2 & 1 & : & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_1 + 2R_2 \rightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 0 & -7 & 7 & : & 7 \\ 4 & -2 & 1 & : & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_1 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 0 & -7 & 7 & : & 7 \\ 0 & -8 & 3 & : & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{-8R_2 + 7R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & : & 5 \\ 0 & -7 & 7 & : & 7 \\ 0 & 0 & -35 & : & -105 \end{pmatrix}$$

نکته: نشان دادن یک وکتور در مستوی بخاطر بکار برده می شود که برای ارائه، یک نقطه در سیستم مختصات قایم تنها یک محل در سیستم مختصات وجود دارد در حالیکه برای ارائه یک وکتور در مستوی بی نهایت جاها وجود دارد.

فاصله و نقطه وسطی بین دو نقطه

برای هر دو نقطه اختیاری $P(x_1, y_1)$ آغاز و $Q(x_2, y_2)$ انجام وکتور $\vec{a} = PQ$ باشد، درین صورت وکتور را به $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$ نشان داده می شود و طول وکتور عبارت اند از.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نقطه وسطی وکتور PQ عبارت اند از.

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$

مثال: نقطه وسطی و فاصله بین دو نقطه $A(2,4)$ و $B(5,5)$ را دریافت نمائید.
حل:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2 + 5}{2} \\ \frac{5 + 4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

وکتورها در سطح و فضا

تعریف: ست تمام جوهره های مرتب که برای آنها مانند قاعده جمع و ضرب سکالری صدق کند، به نام فضای وکتوری \mathbb{R}^2 یا وکتورها در مستوی یاد می شود.

➤ وکتور را تعریف نمایند.

➤ مختصات قایم را بشناسد و آنرا ترسیم کرده بتوانند.

➤ فاصله بین دو نقطه و نقطه وسطی یک خط مستقیم را دریافت کرده بتوانند.

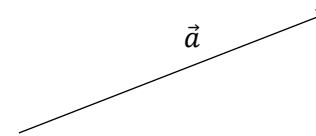
➤ وکتورها را در سطح و فضا تعریف کرده بتوانند.

➤ مختصات نقطه در فضای سه بعدی را دریافت و تعیین کرده بتوانند.

➤ زاویه جهت وکتور را بشناسند و نسبت های آن را دریافت نمایند.

وکتور در سیستم مختصات قایم

تعبیر هندسی وکتور: وکتور یک قطعه خط جهت دار است که دارای سه پارامتر باشد



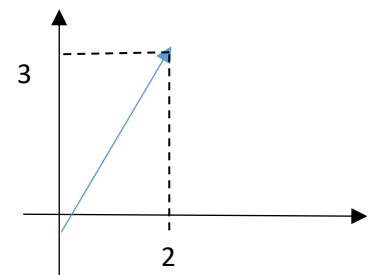
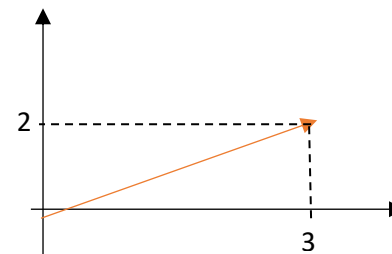
1. طول معین داشته باشد
2. جهت معین داشته باشد.
3. مبدا و انجامش معلوم باشد.

تعبیر الجبری وکتور: وکتور یک متریکس ستونی است.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

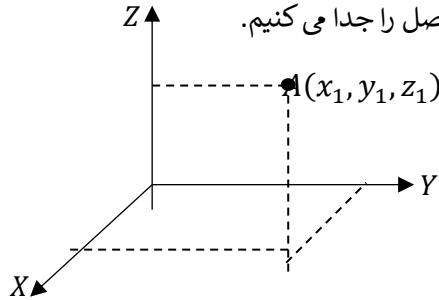
یک وکتور در سیستم مختصات قایم به شکل ستونی $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ درحالیکه a_x مختصه روی x و a_y مختصه روی y است.

مثال: وکتورهای $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ را در سیستم مختصات قایم، نشان دهید.



تعیین یک نقطه در فضای سه بعدی

برای مشخص کردن موقعیت یک نقطه $A(x_1, y_1, z_1)$ در دستگاه مختصات قائم به ارتباط هر محور با در نظر داشت علامه، فواصل را جدا می‌کنیم.



نکته: در فضای سه بعدی نیز قاعده جمع و قاعده ضرب در اسکالر برای هر دو وکتور u و v و اسکالر a درست است. یعنی

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

مثال: هرگاه $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ باشد، $v + w$ و $v - w$ و $|v - 2w|$ را دریافت

نمائید.

حل:

$$1) \quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = i + 5j + 3k$$

$$2) \quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3i - 3j + 3k$$

$$3) \quad |\vec{v} - 2\vec{w}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \\ = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74}$$

اگر $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ و یک عدد اسکالری $a \in \mathbb{R}$ باشد قواعد جمع و ضرب با اسکالر را قرار ذیل داریم.

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix} \quad \text{قاعده جمع}$$

$$a \cdot \vec{u} = a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x \\ a \cdot y \end{pmatrix} \quad \text{قاعده ضرب اسکالری}$$

وکتور واحد ها

عبارت از وکتور های اند که طول آنها یک واحد بوده و فقط برای تزیید جهت مختصه بکار می‌رود.

واحد وکتور ها نظر به ساحه به \vec{i} ، \vec{j} و \vec{k} نشان داده می‌شود.

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

برای یک وکتور اختیاری $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ داریم که

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

مثال: هرگاه $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ باشد، قیمت های ذیل را می‌توان دریافت نمود.

$$1) \quad u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3i + 2j$$

$$2) \quad 4u + 2v = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -12+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = 8i - 2j$$

$$3) \quad u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = -i - 8j$$

مختصات نقطه در فضای سه بعدی

تعریف: فضای \mathbb{R}^3 عبارت از مجموعه تمام سه تایی های مرتب (x, y, z) می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

مثال 2: اگر $\vec{u} = 2i + 3j + k$ و $\vec{v} = 4i + 6j + 2k$ و $\vec{w} = 6i + 9j - 3k$ باشند قیمت $|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}|$ را دریافت کنید.

حل 2:

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} &= 2i + 3j + k - 4i - 6j - 2k - 6i - 9j + 3k \\ &= -8i - 12j + 2k\end{aligned}$$

$$|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = |-8i - 12j + 2k| = \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + (2)^2} = \sqrt{212}$$

زوایای جهت و کوساین های جهت یک وکتور

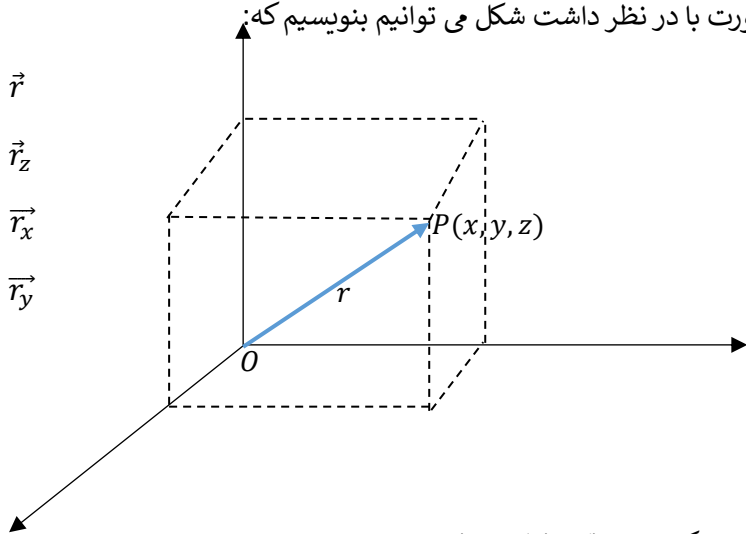
تعریف: هرگاه وکتور شعاع r با محورهای مختصات قایم به ترتیب زاویه های α ، β و γ را بسازد در این صورت با در نظر داشت شکل می توانیم بنویسیم که:

$$\vec{OP} = \vec{r}$$

$$\vec{OA} = \vec{r}_z$$

$$\vec{OB} = \vec{r}_x$$

$$\vec{OC} = \vec{r}_y$$



کوساین های جهت وکتور r را قرار ذیل دریافت می نمایم.

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma$$

اگر اطراف سه رابطه فوق را طرف به طرف مربع نموده جمع نمایم داریم که.

نکته: وکتور واحد ها در فضای سه بعدی عبارت اند از.

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

برای یک وکتور $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ در فضای سه بعدی داریم که.

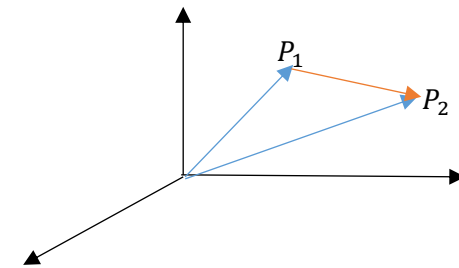
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

فاصله بین دو نقطه در فضا

هرگاه \vec{OP}_1 و \vec{OP}_2 دو شعاع وکتور نقاط $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ باشند، درین صورت با در نظر داشت فاصله بین نقاط P_1 و P_2 داریم که.

$$\vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1}$$

$$\vec{P_1P_2} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$$



$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

فاصله یک نقطه از مبدا مختصات قایم قرار ذیل دریافت می گردد.

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

مثال 1: اگر $a = (-5, 4, 5)$ باشد، طول این شعاع وکتور را دریافت کنید.

حل 1:

$$|\vec{P_1P_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{66}$$

مسائل تطبیقاتی	حاصل ضرب مخلوط (ضرب سه گانه)	حاصل ضرب وکتوری دو وکتور	حاصل ضرب سکالری دو وکتور
-------------------	---	--------------------------------------	--------------------------------------

اهداف آموزشی

شاگردان در ختم این بخش باید قادر گردد تا

- ✓ حاصل ضرب سکالری دو وکتور را بدانند.
- ✓ وکتورها را بتوانند به شکل سکالری ضرب نمایند.
- ✓ حاصل ضرب وکتوری دو وکتور را بدانند.
- ✓ حاصل ضرب مخلوط (ضرب سه گانه) را انجام داده بتوانند.
- ✓ مسائل تطبیقاتی را انجام داده بتوانند.
- ✓ مثال های مربوط به درس ها را کار کرده بتوانند.

حاصل ضرب سکالری دو وکتور

تعریف: دو وکتور خلاف صفر \vec{u} و \vec{v} را در مستوی و یا فضا در نظر میگیریم، حاصل ضرب سکالری آنها به شکل $\vec{u} \cdot \vec{v}$ نشان داده، عبارت اند از $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$ در حالیکه θ زاویه بین \vec{u} و \vec{v} اند و مقدار آن $0 \leq \theta \leq \pi$.

خواص ضرب سکالری

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{z}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

یعنی اگر v یک وکتور خلاف صفر در فضا، $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ داده شده باشد. درین صورت بین

کوسین های جهت آن رابطه

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

برقرار است.

از طرف دیگر، وکتور واحد جهت یا مسیر $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ عبارت اند از

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_y}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix}$$

فعالیت ها

- وکتور را تعریف کنید.
- در کتابچه های یک وکتور ترسیم نموده سه پارامتر آن را مشخص کنید.
- اگر $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ باشند. $u + 2v$ و $u - 2v$ و $2u + 4v$ را دریافت کنید.
- نقاط $A(2,4,3)$ و $B(-2,-3,3)$ را در فضای سه بعدی نشان دهید.
- واحد وکتور را تعریف و واحد وکتور ها را در فضای دو بعدی و سه بعدی نشان دهید.

آنچه درین بخش است قرار است بیاموزیم

حاصل ضرب وکتوری دو وکتور

تعریف: دو وکتور خلاف صفر \vec{u} و \vec{v} را در نظر میگیریم. حاصل ضرب وکتوری دو وکتور عبارت اند از $(\vec{u} \times \vec{v})$ خوانده می شود (u کراس v)، عبارت اند از $(|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \theta) \vec{n}$ در حالیکه θ زاویه بین وکتور و مقدار آن برابر است با $0 \leq \theta \leq \pi$ و \vec{n} عبارت از یک وکتور واحد نارمل که عمود بر مستوی u و v بوده و توسط قاعده دست راست ارائه می شود.

ترکیب خطی وکتورها

مجموع مضرب های سکالری و وکتوری یک ست بنام ترکیب خطی وکتورهای آن ست یاد می شود. اگر وکتورهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ یک ست وکتورها و $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ سکالرها باشند درین صورت

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

بنام ترکیب خطی وکتورهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n$ می نامند.

مثال: هرگاه وکتورهای $\vec{a}_1 = 2i + j - 3k$ و $\vec{a}_2 = i + 2j + 2k$ داده شده باشد، ترکیب خطی وکتورهای $5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$ را دریابید.

حل:

$$\begin{aligned} 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 &= 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k) \\ &= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k \\ &= 12i + 9j - 11k \end{aligned}$$

ارائه یک وکتور در شکل ترکیب خطی وکتورهای واحد طبیعی

اگر وکتورهای موضعی (شعاع وکتور) در فضای دو بعدی و سه بعدی، و بالاخره در فضای n بعدی داده شده باشند می توان آنها را در شکل مجموعه مضرب های وکتورهای واحد طوری زیر ارائه نمود.

الف) در فضای دو بعدی

$$(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1)$$

اگر $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$ باشند، پس داریم که.

$$(x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$$

$$4. (c \cdot \vec{u}) \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$5. \text{if } \vec{a} = a_1 i + b_1 j \text{ and } \vec{b} = a_2 i + b_2 j \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

$$6. \text{if } \vec{a} = a_1 i + b_1 j + c_1 k \text{ and } \vec{b} = a_2 i + b_2 j + c_2 k \\ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

نکته: حاصل ضرب سکالری واحد وکتورها عبارت اند از.

$$1. i \cdot i = 1, j \cdot j = 1, k \cdot k = 1$$

$$2. i \cdot j = 0, j \cdot k = 0, k \cdot i = 0$$

مثال: هرگاه وکتورهای $\vec{u} = i + 2j - k$ و $\vec{v} = i + 2j - k$ داده شده باشد، حاصل ضرب سکالری آنها را دریافت کنید.

حل:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (i + 2j - k) \cdot (i + 2j - k) = i^2 + 4j^2 + k^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

مثال 2: نشان دهید که وکتورهای $u = 2i - 4j + 5k$ و $v = -4i - 3j - 4k$ بالای هم عمود اند.

حل 2: اگر حاصل ضرب آنها صفر گردد، وکتورها بالای هم عمود اند.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2i - 4j + 5k) \cdot (-4i - 3j - 4k) \\ &= 2 \cdot 4i^2 + (-4)(-3)j^2 + 5(-4)k^2 \\ &= 8 + 12 - 20 = 0 \\ &\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

مثال 3: قیمت α را طوری بیابید که وکتورهای $u = 2i + \alpha j + 5k$ و $v = 3i + j + \alpha k$ بالای هم عمود باشد.

حل: اگر دو وکتور بالای هم عمود باشد، حاصل ضرب سکالری آنها مساوی به صفر است، ازینرو داریم که.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2i + \alpha j + 5k) \cdot (3i + j + \alpha k) = 0$$

$$6i^2 + \alpha j^2 + 5\alpha k^2 = 0$$

$$6 + \alpha + 5\alpha = 0 \Rightarrow 6\alpha = -6 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$$

$$(\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3 + 3\alpha_3 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$(\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

از حل سیستم معادلات خطی سه مجهوله درجه اول داریم که:

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha_2 = 0 \quad \text{و} \quad \alpha_3 = 0$$

در نتیجه وکتورهای فوق دارای استقلال خطی (خطاً مستقل) اند.

خواص حاصل ضرب وکتوری دو وکتور

دو وکتور خلاف صفر u و v را در نظر میگیریم و داریم که.

1. $\vec{u} \times \vec{u} = 0$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
3. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
4. $\vec{u} \times k\vec{v} = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k \times (\vec{u} \times \vec{v}) \quad k \in \mathbb{R}$
5. $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_1 - c_1 b_2)\vec{i} + (a_1 c_1 - c_1 a_2)\vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\vec{k}$

مثال: اگر $\vec{a} = 2i + j + k$ و $\vec{b} = 4i + 2j - k$ باشد حاصل ضرب $\vec{a} \times \vec{b}$ را دریافت نمائید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -i + 6j$$

حاصل ضرب مخلوط (حاصل ضرب سه گانه)

تعریف: برای ضرب دو وکتور بیشتر از آن چندین امکان وجود دارد که هرکدام از آن ها را مورد مطالعه قرار می دهیم.

و می توان قرار ذیل نیز نوشت.

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

(ب) در فضای سه بعدی

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = xi + yj + zk$$

(ج) در فضای n - بعدی (حالت عمومی)

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ \Rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

استقلال خطی (خطاً مستقل) یا ارتباط خطی (خطاً مربوط)

استقلال خطی (وکتورهای خطاً مستقل):

وکتورهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ در یک ساحه خطاً مستقل اند طوریکه

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad \text{اگر } \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \text{ باشند.}$$

ارتباط خطی (وکتورهای خطاً مربوط):

وکتورهای $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ در یک ساحه خطاً مربوط یا دارای انحصار خطی اند طوریکه

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \quad \text{باشد اگر حد اقل یکی از ضرایب } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ خلاف صفر باشند.}$$

مثال: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ داده شده باشند، طوریکه $a_1 = (1, 2, 0), a_2 = (0, 1, 3), a_3 = (2, 3, 1)$ نشان دهید که این وکتورها دارای استقلال خطی اند یا ارتباط خطی.

حل:

طبق تعریف برای مساوات فوق می توانیم بنویسیم.

$$|b||c| \sin(\pi - A) = |c||a| \sin(\pi - B)$$

$$\Rightarrow bcsin A = ca \sin B \Rightarrow b \sin A = a \sin B$$

$$\Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \dots\dots 1$$

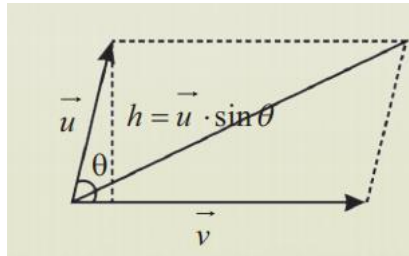
مشابه رابطه فوق داریم که

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots 2$$

از رابطه 1 و 2 داریم که.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال 3: برای دریافت مساحت یک متوزی الاضلاع دو وکتور خلاف صفر u و v را طوری در نظر می گیریم که بین هم زاویه θ را داشته باشد.



مساحت متوزی الاضلاع فوق عبارت اند از قیمت مطلقه حاصل ضرب وکتوری اضلاع متوزی الاضلاع یعنی

$$S = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

فعالیت ها

1. حاصل ضرب سکالری را تعریف و بیان کنید.
2. ضرب وکتوری دو وکتور خلاف صفر با ضرب سکالری چه تفاوت دارد؟
3. ضرب مخلوط چیست؟
4. آیا حاصل ضرب سکالری و وکتوری دو وکتور بالای آنها عمود اند؟ واضح سازید.

$$1. (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = abc \cdot cab$$

در حاصل ضرب فوق دو وکتور a و b قسمی سکالری ضرب شده است و حاصل ضرب آن با وکتور c ضرب گردیده که نتیجه آن یک وکتور است که جهت آن به جهت وکتور c اند.

$$2. \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$3. \vec{a}(b \times c) = \vec{b}(c \times a) = \vec{c}(b \times a)$$

$$4. a(a \times b) = 0$$

مسائل تطبیقاتی

مثال 1: اگر وکتور $a = 4i + 3j + k$ و $b = 2i - j + 2k$ در فضا داده شده باشند، مطلوب است وکتوری که بالای هر دو وکتور عمود باشند. آیا این وکتور یگانه اند یا خیر.

حل:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7i + 6j - 10k$$

بنابراین وکتور $7i + 6j - 10k$ بالای وکتور a و b عمود اند اما یگانه نیست. زیرا $b \times a$ نیز بالای این وکتورها عمود اند.

مثال 2: برای یک مثلث اختیاری ABC نشان دهید که

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

حل:

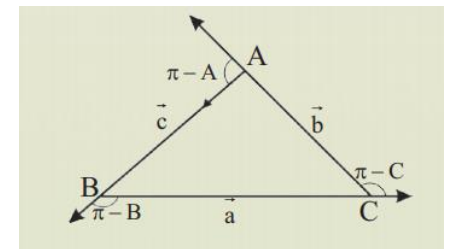
$$a + b + c = 0$$

$$b + c = -a$$

$$(b + c) \times c = -a \times c$$

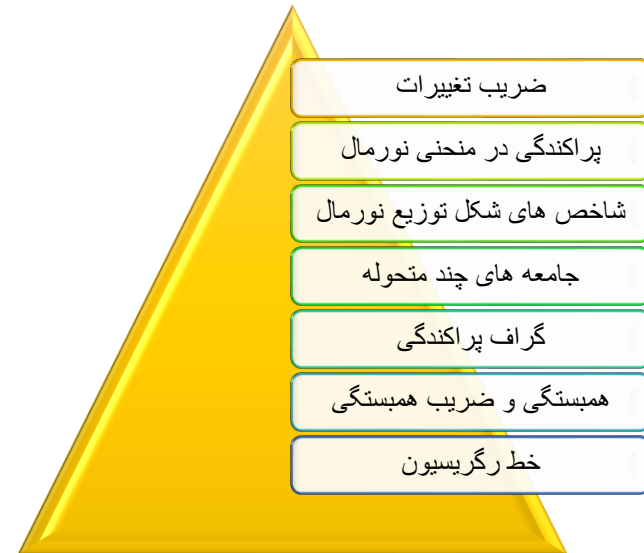
$$(b \times c) + (c \times c) = -a \times c = c \times a$$

$$b \times c = c \times a \Rightarrow |b \times c| = |c \times a|$$



5. ثبوت کنید که $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

آنچه درین بخش خواهیم آموخت



اهداف آموزشی

شاگردان در ختم این بخش قادر گردند تا:

- ✓ ضریب تغییرات را بدانند.
- ✓ پراکندگی در منحنی نورمال را بشناسند.
- ✓ شاخص های توزیع نورمال را بدانند.
- ✓ جامعه ها چند متحوله را بشناسند.
- ✓ گراف پراکندگی را ترسیم بتوانند.
- ✓ همبستگی و ضریب همبستگی را بشناسند.
- ✓ خط رگرسیون را بدانند.

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات که به CV نشان داده می شود عبارت از خارج قسمت انحراف معیاری بر اوسط که عدد مطلق (بدون واحد) است.

$$CV = \frac{S}{x} \quad \text{یا} \quad \text{انحراف معیاری} = \frac{\text{ضریب تغییرات}}{\text{اوسط}}$$

اگر ضریب تغییرات با عدد 100 ضرب شود، ضریب تحول بدست می آید.

$$CV\% = 100 \cdot \frac{S}{x}$$

- ضری تغییرات فقط برای داتا مثبت تعریف می گردد.
- اگر همه داتا باهم برابر باشند ضریب تغییرات صفر است.
- اگر همه داتا را در یک عدد مثبت ضرب کنیم ضریب تغییرات تغییر نمی کند.
- اگر به همه داتا یک عدد مثبت اضافه کنیم ضریب تغییرات جدید کوچکتر از ضریب تغییرات داتا اولیه است.

مثال: ضریب تغییرات داتای 1 3 5 را دریافت نمائید.

حل:

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{4 + 0 + 4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

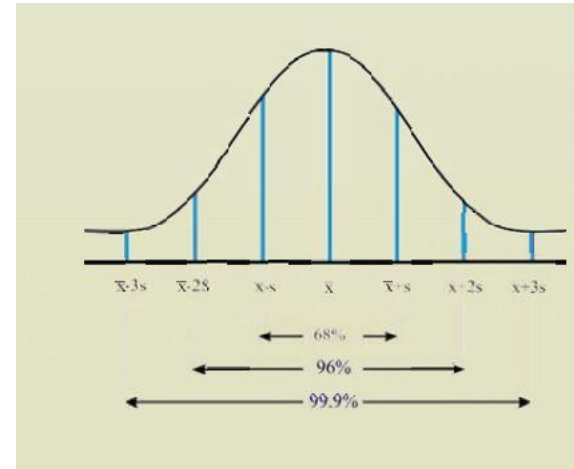
$$S = \sqrt{2.67}$$

$$CV = \frac{S}{x} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

پراکندگی در منحنی نورمال

منحنی نورمال وسیله مهم برای توصیف از مجموع های آماری است. در توزیع نورمال در حالی که داده ها دارای توزیع نورمال و منحنی کثرت متناظر باشد، واریانس نقشی عمده پی دارد. در واقع با مشخص بودن دو پارامتر اوسط و انحراف معیاری در توزیع نورمال، این توزیع در کل مشخص خواهد بود و محاسبه هر نوع شاخص مساعد است.

گراف منحنی نورمال قرار ذیل ترسیم می گردد.



مثال: اگر اوسط معاش کارمندان یک موسسه برابر با مبلغ 12500 افغانی و انحراف معیاری برابر با 700 افغانی باشد.

الف: با استفاده از فیصدی های توزیع نورمال، توزیع معاش داده شده را شرح دهید.

ب: آیا معاش معادل 1400 افغانی غیر عادی است؟ چرا؟

حل الف:

ابتدا مقادیر $\bar{x} \pm S$, $\bar{x} \pm 2S$, $\bar{x} \pm 3S$ را محاسبه می کنیم.

فاصله بر حسب S	فاصله بر حسب افغانی	فیصدی
$\bar{x} \pm S$	13200 – 11800	68%
$\bar{x} \pm 2S$	13900 – 11100	96%
$\bar{x} \pm 3S$	14600 – 10400	99.6%

حل ب:

ابتدا $\bar{x} - 1400$ را حساب می کنیم که برابر است با 1500 یعنی معاش 1400 افغانی به اندازه 1500 افغانی بیشتر از اوسط است. حال اگر این رقم را به S تقسیم کنیم.

$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

بنابراین معاش 1400 افغانی است غیر عادی زیرا به اندازه بیش از 2S بالاتر از \bar{x} قرار دارد.

شاخ های شکل توزیع نورمال

به کمک اوسط و انحراف معیاری می توان چگونگی داتا را به شکل شاخص خمیدگی و شاخص کشیدگی بهتر توضیح و ارائه نمود.

1. شاخص خمیدگی skewness

توزیعی که در اطراف اوسط متناظر نباشد خمیدگی گفته می شود. این شاخص توسط دو ضریب زیر نشان می دهد.

الف: ضریب خمیدگی: شاخصی است که برای تعیین میزان خمیدگی به کار می رود و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

α_3 یک عدد مطلق است که برای مقایسه مورد استفاده قرار می گیرد.

اگر $\alpha_3 = 0$ توزیع متناظر، اگر $\alpha_3 > 0$ توزیع دارای خمیدگی مثبت و اگر $\alpha_3 < 0$ توزیع دارای خمیدگی منفی است.

ب: ضریب خمیدگی پیرسون: ضریب پیرسون به صورت زیر تعریف می شود.

$$SK(p) = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

در توزیع متناظر ضریب خمیدگی پیرسون برابر صفر است. کیمیت های مثبت و منفی ضریب خمیدگی پیرسون به ترتیب نشان دهنده خمیدگی مثبت یا منفی توزیع است.

2. شاخص کشیدگی Kurtosis

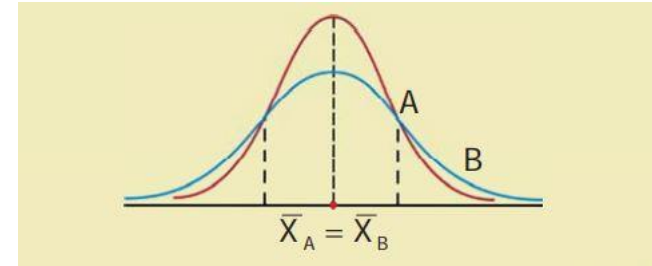
شاخص کشیدگی نشان دهنده آن است که یک توزیع چه وقت دارای اوج و چه وقت دارای پخشی می باشد. ضریب کشیدگی معمولترین شاخص است که برای اندازه گیری کشیدگی به کار رفته و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

اگر جدول کثرت را در دست داشته باشیم پس فارمول شاخصی کشیدگی قرار ذیل است.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

شاخص کشیدگی بستگی به موقعیت و پراکندگی توزیع ندارد. این شاخص برای مقایسه مورد استفاده قرار می گیرد.



جامعه های چند متحوله

یکی از اهداف عمده در اکثریت تحقیقات احصائیوی پیشبینی و پیش گویی نمودن و تعیین یک متحول از جنس متحول دیگر است. زمان که ارتباط بین دو شی را مورد بررسی قرار می دهیم، منظور از جامعه دو متحوله است.

مانند: رابطه بین حجم و فشار، ارتباط بین صحت و میزان مرگ و میر، رابطه بین کشت و محصول ... رابطه بین دو متحول را بیان می کند. برای سهولت ارتباط بین دو متحول را معمولاً توسط معادلات ریاضیکی بیان می کند.

مثال: یک متخصص تاثیر نوع رژیم غذایی را روی یک تعداد خرگوش ها بررسی کرده است، بدین سبب وزن اولیه هر خرگوش را اندازه گرفته و سپس عملیه رژیم غذایی را بالای آن ها تطبیق و دوباره وزن آنها را اندازه گیری نموده است. داتاهای بدست آمده عبارت اند از:

(1,8), (2,3), (1,7), (3,5), (2,4)

مختصه اول بیانگر وزن اولیه و مختصه دوم بیانگر وزن خرگوش پس از تطبیق رژیم غذایی اند.

- داتا را بصورت جدول سطری و ستونی بیان کنید.

- اگر داتای بالا را به عنوان یک جامعه فرض نمائیم، آیا این جامعه دارای چند متحول است؟

حل:

شماره خرگوش ها	1	3	4	5
وزن اولیه خرگوش ها	1	1	3	2
وزن خرگوش ها بعد از تطبیق رژیم غذایی	8	7	5	4

جدول ستونی زیر را در نظر می گیریم.

شماره خرگوش ها	وزن اولیه	وزن بعد از رژیم
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

داتای بالا جامعه دو متحوله را بیان می کند.

گراف پراکندگی

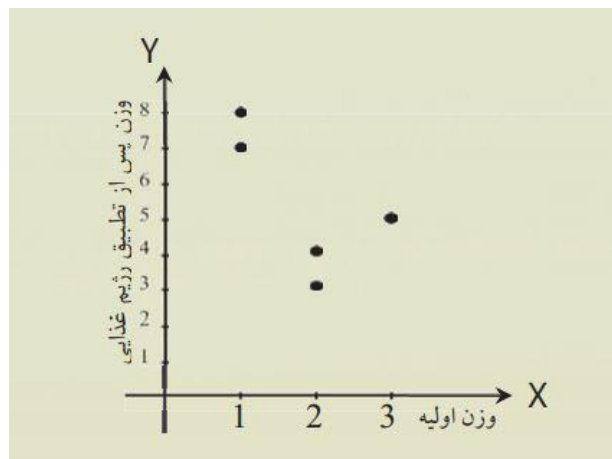
گراف پراکندگی (پراکنش) مجموعه پی از نقاط در مستوی محورهای مختصات است که از ترسیم داتای مربوطه به اندازه گیری در جامعه های دو متحوله بدست می آید.

برای ترسیم گراف پراکندگی داده ها را به صورت جوره های مرتب ارائه و توسط نقاط در یک مستوی محور های مختصات نمایش می دهیم. این گراف می تواند سه نوع اطلاعات را در اختیار ما قرار دهد.

- نمونه پی، که نشان دهنده نوعی ارتباط بین مشاهدات باشد موجود است یا نه؟
- در صورت موجودیت نوعی ارتباط آیا ارتباط خطی است یا غیر خطی؟
- در صورتی که رابطه خطی باشد نوع ارتباط چگونه است؟

مثال: جوره های مرتب زیر را که از تاثیر رژیم غذایی خرگوش ها در مال قبلی بدست آمده است در نظر گرفته و گراف پراکندگی آنها قرار ذیل ترسیم می نمائیم.

حل:



$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \frac{(8 - 5.4)^2 + (3 - 5.4)^2 + (7 - 5.4)^2 + (5 - 5.4)^2 + (4 - 5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$= \frac{\sum x \sum y}{n} = \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

در نتیجه ضریب همبستگی عبارت اند از.

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - (\bar{x})(\bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{10.2 - (1.8)(5.6)}{0.74 \cdot 1.86} = \frac{0.12}{1.375} = 0.09$$

$$\boxed{r = 0.09}$$

خط رگرسیون

رگرسیون (تخمین)، سنجش و دریافت ارزش یک متحول تابع نظر به ارزش یک یا چند متحول مستقل می باشد.

معادله که ارتباط بین متحول ها را افاده می نماید به نامه معادله ی رگرسیون یا معادله سنجش یاد می کند و این معادله را می توان به روش کمترین مربعات محاسبه و ضرایب a و b را به کمک این روش به صورت زیر بدست آورد.

$$a = r \frac{S_y}{S_x}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$b = \frac{\sum xy - n \bar{x} \bar{y}}{\sum x^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

نکته: خط رگرسیون وسیله یا ابزاری است برای پیش بینی مقدار یک متحول بر حسب متحول دیگر که به آن وابسته است مورد استفاده قرار گیرد.

همبستگی و گراف همبستگی

همبستگی به سنجش و دریافت درجه ارتباط بین متحوله ها می باشد ارتباط بین متحول ها می تواند به صورت خطی توسط یک خط مستقیم و یا به صورت غیر خطی به وسیله یک منحنی ارائه گردد. همبستگی عموماً به صورت مثبت و منفی بین دو متحول بیان می شود.

اگر اندازه دو متحول در یک جهت تغییر کند یعنی x و y هر دو بزرگ یا هر دو کوچک شوند همبستگی مثبت (خط مستقیم) است.

بهترین معیار تشخیص وجود همبستگی یا عدم همبستگی و حتی نوع، جهت و میزان همبستگی خطی ضریب همبستگی است که توسط فورمول زیر ارائه می گردد.

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - (\bar{x})(\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

مثال: داتای مربوط به وزن اولیه و وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی خرگوش ها را مانند جدول زیر در نظر بگیرید.

شماره خرگوش ها	وزن اولیه x	وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی y	حاصل ضرب x و y
	1	8	8
1	2	3	6
2	1	7	7
3	3	5	15
4	2	4	8
5	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

ضریب همبستگی بین وزن اولیه و وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی را محاسبه کنید.

حل:

اگر x ها وزن اولیه و y ها وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی و $n = 5$ تعداد موش ها باشد، درین صورت برای محاسبه اوسط x ها و y ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad \bar{y} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$S_x^2 = \frac{(1 - 1.8)^2 + (2 - 1.8)^2 + (1 - 1.8)^2 + (3 - 1.8)^2 + (2 - 1.8)^2}{5}$$

مثال: داتای زیر را درد نظر گرفته خط رگرسیون y نسبت به x را دریافت کنید.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2 \Rightarrow S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2 \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - (\bar{x})(\bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{5}(4-6)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = \frac{(-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2 - (-1)3 = 2 + 3 = 5$$

پس معادله خط رگرسیون عبارت اند از

$$y = ax + b \Rightarrow y = -x + 5$$

فعالیت ها

- خط رگرسیون را بدانند.
- ضریب تغییرات چیست؟ و فیصدی یا ضریب تحول چگونه بدست می آید؟
- پراکندگی چیست؟

- جامعه چند متحوله چیست؟
- چگونه داتا ها را می توان در جامعه چند متحوله ارزیابی کرد؟
- گراف پراکنش چیست؟
- پراف پراکنش چه چیز را در یک جامعه احصائیوی نشان می دهد؟

آنچه قرار است درین بخش بیاموزیم

ترتیب	
ترکیب ها	
تبدیل ها	
قضیه بینوم	
احتمال دو جمله یی	

اهداف آموزشی

در ختم این بخش شاگردان قادر خواهد شد تا

- ✓ ترتیب ها را بدانند.
- ✓ ترکیب چیست؟ و فورمول ترکیب ها چگونه اند؟
- ✓ تبدیل ها را بدانند و فورمول تبدیل ها را بیاموزد.
- ✓ بینوم و قضیه بینوم را درک کند.
- ✓ احتمال را بدانند و احتمال دو جمله پی را درک کند.
- ✓ مثال های مربوط به درس را بیاموزد.

ترتیب

تعریف فکتوریل: حاصل ضرب یک عدد به مرتبه های کوچکتر آن را بنام فکتوریل یاد می کند و به (!) نشان می دهدو مثلاً

$$0! = 1 \quad 1! = 1$$

با در نظر داشت محلات ارقام و امکانات قرار گیری ارقام در موقعیت های موجوده و با در نظر داشت فورمول داریم که.

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$

ترکیب ها

طرز نوشتن نوشته $\binom{n}{k}$ که بشکل n بالای k خوانده می شود و در حقیقت ضرایب بینوم بوده که عدد k در آن توان بینوم را مشخص نموده عبارت اند از.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \quad k, n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq k \leq n$$

خواص ترکیب ها

برای هر عدد طبیعی n و $0 \leq k \leq n$ بوده داریم که.

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

تعداد ترکیب های r یک ست n عضوی عبارت اند از ترکیب r شی از n بوده که C_r^n نشان داده می شود.

مثال: در یک مکتب به تعداد 7 صنف دهم وجود دارد، اداره مکتب می خواهد از جمله هفت نفر اول نمره های صنف دهم را به تعداد 4 نفر انتخاب نماید. به چند شکل این انتخاب صورت می گیرد؟

حل:

دیده می شود که در انتخاب 4 نفر از 7 نفر هیچگونه برتری و ترتیبی وجود ندارد، یعنی مهم نیست که اول نمره کدام صنف است، پس مسئله ترکیب 4 نفر از 7 نفر است. یعنی

$$C_4^7 = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{6 \cdot 4!} = 35$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

تعریف ترتیب: تعداد ترتیب n عنصر تحت یک شرط که بنام پرموتیشن n عنصر نیز یاد می گردد و به P_n (در صورت که تکرار مجاز یا ممکن نباشد) نشان داده می شود.

$$P_n = n!$$

در صورتیکه در ترتیب تکرار مجاز و یا مطلوب باشد، درین صورت تعداد ترتیب های با تکرار را به $P_n^{(k)}$ نشان می دهد. و چنین معنی میدهد که یک عنصر k مرتبه در n ترتیب تکرار گردیده است که با دقت به حالات بدون تکرار تعداد مجموعی عبارت اند از.

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \quad k \leq n$$

مثال: در یک سالون امتحان 16 شاگرد ممتاز صنوف مختلط بخاطر اخذ امتحان سویه گرد هم جمع گردیده است، به چند شکل می توانند روی 16 میز باهم بنشینند، در صورتی که تغییر محل هر شاگرد به حیث یک حالت در نظر گرفته شود.

حل:

هرگاه 16 شاگرد مذکور با بکس های مکتبی خود جاهای خود را بگیرند و به تعداد 4 تن از آنها بکس ها یکسان داشته باشد عبارت اند از.

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

مثال 2: با استفاده از ارقام 2، 7، 8، 5 و چند عدد سه رقمی (بدون تکرار) می توان نوشت؟

حل 2:

با توجه به این که عدد سه رقمی است، سه محل خالی داریم که به صورت زیر امکان پر شدن آن است

محل رقم سوم	محل رقم دوم	محب رقم اول	محل ها
2	3	4	تعداد امکانات

تبدیل ها

تعریف: تعداد ترکیب های مسلسل k عنصر انتخابی مورد نظر از n عنصر در آن در نظر داشت باشد مساوی به $C_k^n \cdot k!$ می باشد. این ترکیب را بنام تبدیل یاد نموده و معمولا آنرا به V_k^n نشان داده می شود.

$$V_k^n = K! \cdot C_k^n = k! \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: چند امکان وجود دارد که در جلسه انتخابی از جمله ۳۰ نفر اشتراک کننده به تعداد ۴ تن برای رهبری طوریکه یک نفر رئیس، یک معاون اول، یک معاون دوم و نفر چهارم به حیث منشی اشغال وظیفه نماید.

حل:

مسئله در حقیقت تبدیل 4 از 30 تن بوده که نظر به تعریف تعداد امکانات آن عبارت اند از.

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26!} = 657520$$

قضیه بینوم

طرز نوشتن $B(n, p, k)$ طرز ارایه بینوم یا احتمال پرابلم برنولی یاد می گردد که عبارت اند از.

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

انکشاف دو جمله بی $(a+b)^n$ عبارت اند از.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

در تکرار n تجربه تصادفی دو جمله بی که هر حالت دارای احتمال P و $q = 1-p$ بوده و احتمال k بار پیروزی یعنی p از n بار بقیه حالت ها که ناکامی یعنی $q = 1-p$ بوده داریم.

$$0 \leq k \leq n \quad \text{و} \quad \text{احتمال} = \binom{n}{k} P^{n-k} (1-q)^k \quad \text{بار پیروزی و انجام } n \text{ بار تجربه}$$

مثال: از n نفر به تعداد k نفر به صورت اتفاقی انتخاب م گردند. مطلوب است احتمال انتخاب تحت k شخص که انتخاب گردیده به تعداد 2 تن شان در یک روز تولد شده باشد.

حل:

ما فرض می کنیم که هر سال دارای عین احتمال $\frac{1}{365}$ بحیث روز تولد برای فردی شخصی مورد سوال بوده نه سال تولد بودن اینکه در نظر گرفته شود، مورد نظر نیست.

بنا برین فضای نمونه Ω از تمام امکان k حادثه اتفاقی در 365 روز است داریم.

$$|\Omega| = (365)k$$

حادثه A : حد اقل یک روز تولد یافته اند، طوری که ساده تر قابل محاسبه است که در برابر آن حادثه \bar{A} را در نظر می گیریم. بنابراین \bar{A} عبارت اند از k نفر که در روزهای مختلف سالگره دارند. ویا تولد گردیده اند. بنابراین \bar{A} عبارت از k پرموتیشن با ترتیب از 365 بوده داریم.

$$P(\bar{A}) = \binom{365}{k} = \frac{365!}{(365-k)!}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \binom{365}{k} = 1 - \frac{365!}{(365-k)!} \cdot \frac{1}{(365)^k}$$

احتمال دو جمله بی

هر تجربه تصادفی را می توان به یک تجربه که دارای دو حالت باشد تقلیل دهیم.

- هر فضای نمونه و یک تجربه دو حالت دارد اگر یکی از حالت ها بحیث پیروزی دارای احتمال P در نظر گرفته شود حالت دیگر آن عبارت از حالت ناکامی بوده که دارای احتمال $1-P$ می باشد.
- با تکرار n بار تجربه احتمال k بار پیروزی یعنی P از این n بار که بقیه حالت ها که باخت یا شکست یعنی $q = 1-p$ بوده داریم.

$$\text{احتمال} = \binom{n}{k} \cdot P^k (1-P)^{n-k} \quad \text{ام } k \text{ بار پیروزی در انجام } n \text{ بار تجربه}$$

مثال ۱: در یک فامیل 5 فرزند احتمال اینکه دو تن از اولاد ها پسر و بقیه دختر باشد چند است؟ هر گاه چانس تولد پسر و دختر نوزاد را برابر در نظر بگیریم.

حل:

درین مثال $p = \frac{1}{2}$ و $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ بوده و نظر به فورمول به دست می آید:

احتمال اینکه دو پسر و سه دختر باشد عبارت اند از.

$$\frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16}$$

فعالیت ها:

- ترتیب را تعریف نمائید.
- مسایل مهم ترتیب را حل نمائید.
- ترکیب چیست؟
- تبدیل چیست؟
- فورمول ترکیب و تبدیل را بنویسید.
- چه تفاوتی بین ترتیب، ترکیب و تبدیل وجود دارد؟
- در مسایل ترتیب و ترکیب و تبدیل اگر یک عدد یا کمیت تکراری باشد، چگونه باید در نظر گرفته شود؟