



شما دست می‌دهد و اگر آن به سمت عقب باشد و سرعت آن کم شود حس فشار به پیش‌رو خواهید داشت؛ اگر سرعت ثابت باشد و شتابی نباشد حسی نخواهید داشت (در دروس بعدی خواهیم دانست).

گراف سرعت - زمان

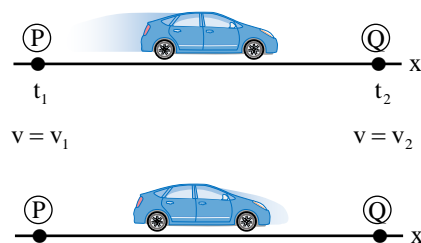
قبلاً گفتیم که برای گراف $(x - t)$ معادله حرکت مهم است؛ اما اکنون برای درک بیشتر گراف سرعت - زمان $(v - t)$ معادله سرعت مهم است؛ یا رابطه ریاضی بین سرعت جسم و زمان سپری شده یک جسم متحرک را معادله سرعت همان جسم یاد می‌کنیم که از مشتق اول حرکت این معادله حاصل می‌گردد؛ که به شکل $v_x = f(t)$ سرعت روی محور x ، $v_y = f(t)$ سرعت روی مسیر y و $v_z = f(t)$ سرعت روی مسیر z نوشته می‌گردد که بیشتر با v_x و v_y سروکار خواهیم داشت و سرعت جسم همیشه تابع زمان است؛ برای کشیدن این گراف محور زمان (t) را به شکل افقی و محور سرعت (v_x) را به شکل عمودی نشان می‌دهیم.

مثال (1): متحرکی با سرعت ثابت روی مسیر مستقیم بالای محور x در حال حرکت است؛ در لحظه $t_1 = 4.0$ s از مبدأ در فاصله 10 m و در لحظه $t_2 = 8.0$ s به فاصله 22 m از مبدأ قرار دارد؛ گراف سرعت - زمان $(v - t)$ جسم متحرک را رسم نمایید.

حل: می‌دانیم که اگر جسم سرعت ثابت داشته باشد؛ پس داریم که

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{22 \text{ m} - 10 \text{ m}}{8.0 \text{ s} - 4.0 \text{ s}} = \frac{12 \text{ m}}{4 \text{ s}} = 3 \text{ m/s}$$

چون در حرکت یک نواخت، سرعت ثابت است؛ پس نظر به قاعده ریاضی، تابع ثابت بوده که معادله آن روی محور x به شکل $v_x = 3$ در سیستم بین‌المللی می‌توانیم بنویسیم؛ بناءً گراف سرعت - زمان شکل یک خط مستقیم دارای شیب صفر، را دارا اند و موازی با محور زمان یا عمود با محور سرعت است مانند شکل زیر.



مثال (2): در نمودار زیر ذیل سرعت متحرکی که بر روی خط مستقیم در حرکت است؛ در چند لحظه زمانی مشخص شده است؛ گراف $(v - t)$ را رسم نمایید.

t(s)	0	0.5	1.5	2	2.5	3
v(m/s)	0	2	3.5	3.75	1	4

حل: در قدم نخست محورات زمان و سرعت را رسم می‌کنیم؛ و سپس جوره‌های مرتب داده شده را توسط نقطه نشانی کرده و این نقاط را به هم وصل می‌دهیم که گراف سرعت - زمان رسم می‌گردد مانند (شکل زیر).

راهنمای آموزشی فزیک تسریعی ب - دوره یازدهم

اهداف آموزشی:

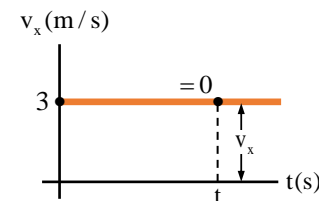
1_ دانش آموزان با مفاهیم اساسی موضوعات (تعجیل یا شتاب، شتاب لحظه‌ای، گراف سرعت- زمان $(v-t)$ ، حرکت یکنواخت، حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت، معادله $(x-t)$ در حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت، سقوط آزاد (مفهوم ساحة جاذبه)) آشنایی کامل دریافت کند.

2_ دانش آموزان با موارد استفاده از شتاب و گراف ها آگاهی کامل کسب نمایند.

3_ دانش آموزان باید با اهمیت موضوعات هذا آشنا شده و بتوانند در زندگی روزمره شان تطبیق نمایند.

بخش اول شتاب و مفهوم آن

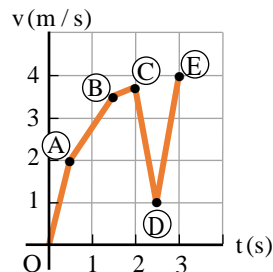
آیا می‌دانید که تعجیل یا شتاب چیست؟ زمانی که متحرک فواصل مساوی را در اوقات مساوی طی نماید به این نوع حرکت، حرکت تعجیلی یا شتابی می‌گویند. هنگامی که موتوری از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، سرعت سنج موتور نشان می‌دهد که سرعت آن به تدریج افزایش می‌یابد مانند شکل زیر و همیشه $v_2 > v_1$ بوده و شتاب آن مثبت است؛ و بر عکس در هنگام برک گرفتن، سرعت آن به تدریج کاهش می‌یابد مانند شکل زیر و همیشه $v_2 < v_1$ است و علامت الجبری شتاب منفی می‌باشد؛ در هر دو مورد فوق حرکت شتابی یا غیر یکنواخت اند؛ یا می‌توانیم بگوییم که سرعت، آهنگ تغییر مکان با زمان را توصیف می‌کند شتاب، بیان‌گر آهنگ تغییر سرعت با زمان است؛ شتاب هم مثل سرعت یک کمیت وکتوری است و واحد آن در سیستم SI یا $M.K.S$ برابر با m/s^2 می‌باشد؛ شتاب یا تعجیل را همان‌طور که می‌دانید به سمبول a نمایش داده می‌شود که از واژه $(acceleration)$ گرفته شده که معنی همان شتاب یا تعجیل را می‌دهد.



شتاب در مقابل سرعت، باید دقت کنید که شتاب را با سرعت اشتباه نگیرید! سرعت بیان می‌کند که مکان جسم چگونه با زمان تغییر می‌کند و همین‌طور جسم در چه جهتی و چقدر سریع حرکت می‌کند؛ شتاب چگونگی تغییر سرعت با زمان را توصیف می‌کند و بیان می‌کند که تندی و جهت حرکت چگونه تغییر می‌کنند؛ شاید بهتر باشد این عبارت را به خاطر بسپارید که "شتاب نسبت به سرعت، مثل سرعت است نسبت به مکان". همین‌طور اگر خود را سوار بر جسم متحرک تصور کنید می‌تواند به شما کمک کند. اگر جسم رو به جلو شتاب بگیرد و تندی آن زیاد شود احساس فشار به عقب در چوکی خود به

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

در شکل (زیر) موتوری را در نظر می‌گیریم که در امتداد محور x حرکت می‌کند؛ فرض کنید در لحظه t_1 ذره در نقطه P بوده و مؤلفه x سرعت لحظه‌ای آن v_{1x} باشد و در زمان بعدی t_2 در نقطه Q بوده و مؤلفه x سرعت آن v_{2x} باشد؛ بنابراین مؤلفه x سرعت در طی مقطع زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ به اندازه $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ تغییر می‌کند؛ شتاب متوسط موتور را وقتی از P تا Q



حرکت می‌کند نسبت تغییرات سرعت و مقطع زمانی به دست می‌آید و به صورت یک کمیت وکتوری نشان داده می‌شود؛ که به نام میل خط نقاط PQ در گراف سرعت - زمان است که شتاب متوسط متحرک در این مقطع زمانی می‌نامند؛ این کمیت را با \bar{a}_x یا a_{av-x} نشان می‌دهیم؛ در نتیجه داریم که

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}$$

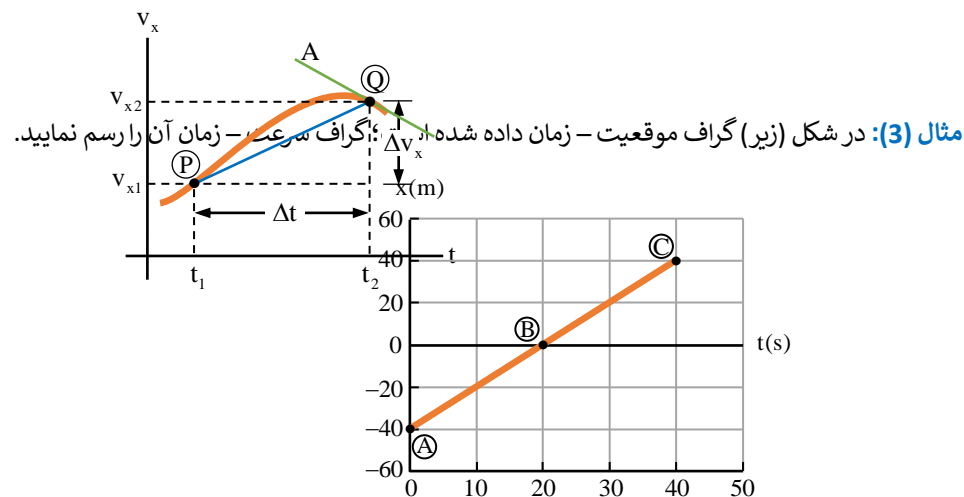
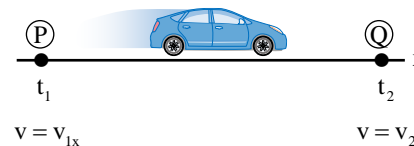
و همین قسم در تعجیل لحظه‌ای هنگامی که Δt بسیار کوچک و کوچک‌تر می‌شود نقطه P به نقطه Q نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود و سرانجام خط A به نقطه Q بر گراف سرعت - زمان مماس می‌گردد. شیب یا میل خط مماس بر گراف در نقطه Q را شتاب لحظه‌ای جسم در لحظه t_2 می‌نامیم.

اکنون می‌توان شتاب لحظه‌ای را، مانند سرعت لحظه‌ای به طور دقیق تعریف کرد که: هنگامی که در شتاب متوسط Δt به سمت صفر تقرب می‌کند ($\Delta t \rightarrow 0$)، شتاب لحظه‌ای جسم را در لحظه t_2 به دست می‌دهد. به عبارت دیگر، لیمت شتاب متوسط است هنگامی که Δt به سمت صفر تقرب می‌کند؛ یا به مشتق اول سرعت نسبت به زمان شتاب لحظه‌ای را تعریف می‌نماید؛ شتاب لحظه‌ای را با a_x نمایش می‌دهیم. در نتیجه داریم

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

به بیان ریاضی، شتاب لحظه‌ای مشتق دوم حرکت نسبت به زمان شتاب لحظه‌ای را تعریف می‌کند؛ یعنی

$$a_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$



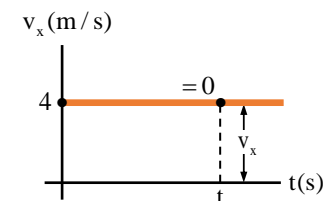
حل: در قدم نخست معادله حرکت جسم متحرک را دریافت می‌کنیم؛ چون جسم دارای حرکت یک‌نواخت اند؛ پس داریم که

$$v_x = \frac{x_C - x_B}{t_C - t_B} = \frac{40 \text{ m} - 0}{40 \text{ s} - 30 \text{ s}} = \frac{40 \text{ m}}{10 \text{ s}} \Rightarrow v_x = 4 \text{ m/s}$$

حال می‌دانیم که فاصله اولیه جسم متحرک $x_0 = -40 \text{ m}$ می‌باشد؛ پس در معادله حرکت یک‌نواخت

$$x = v_x t + x_0$$

پس از مشتق اول حرکت نظر به زمان، معادله سرعت $v_x = 4$ به دست می‌آید؛ که گراف سرعت - زمان $(v - t)$ ، شکل یک تابع ثابت را دارا است که با محور زمان موازی و بالای محور سرعت در نقطه $v_x = 4$ عمود است شکل زیر.



حل: شتاب در نقطه A مساوی به میل خط مستقیم که نقاط $(0\text{ s}, 0\text{ m/s})$ و $(2.0\text{ s}, 4.0\text{ m/s})$ با هم وصل می‌دهد:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4.0\text{ m/s} - 0}{2.0\text{ s} - 0} = +2.0\text{ m/s}^2$$

شتاب در نقطه B مقدار $\Delta v = 0$ می‌باشد؛ چون خط آن افقی است:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4.0\text{ m/s} - 4.0\text{ m/s}}{3.0\text{ s} - 2.0\text{ s}} = 0\text{ m/s}^2$$

شتاب در نقطه C مساوی به میل خط مسقیم که از نقاط $(3.0\text{ s}, 4.0\text{ m/s})$ و $(4.0\text{ s}, 2.0\text{ m/s})$ ساخته شده است:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2.0\text{ m/s} - 4.0\text{ m/s}}{4.0\text{ s} - 3.0\text{ s}} = -2.0\text{ m/s}^2$$

مثال (8): معادله سرعت متحرکی در سیستم SI روی مسیر مستقیم $v_x = 3t^2 + 4$ می‌باشد؛ شتاب متوسط متحرک را در سه ثانیه اول حرکت با دو رقم با ارزش به دست آورید.

حل: سه ثانیه اول حرکت فاصله زمانی بین دو لحظه $t_1 = 0$ و $t_2 = 3.0\text{ s}$ می‌باشد پس در قدم نخست مقدار v_{1x} و v_{2x} را داریم

$$v_{2x} = 3(3.0)^2 + 4 \Rightarrow v_{2x} = 31\text{ m/s}$$

$$v_{1x} = 3(0)^2 + 4 \Rightarrow v_{1x} = 4.0\text{ m/s}$$

اکنون نظر به قاعده سرعت متوسط چنین می‌نویسیم

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{(31 - 4.0)\text{ m/s}}{3.0\text{ s} - 0\text{ s}} = \frac{27\text{ m/s}}{3.0\text{ s}} = 9.0\text{ m/s}^2$$

مثال (9): معادله حرکت جسم در SI به صورت $z = 2t^2 - 3t$ داده شده است؛ شتاب متحرک را در دو رقم با معنی بنویسید.

حل: می‌دانیم که مشتق دو فاصله نظر به زمان شتاب است و در تمام معادله‌های حرکت درجه 2 شتاب ثابت می‌باشد (در تمام مقطع زمانی با هم مساوی است).

$$z = 2t^2 - 3t \Rightarrow v_z = z' = 4t - 3$$

$$\Rightarrow a_z = v_z' = z'' = 4.0\text{ m/s}^2$$

مثال (10): معادله مکان متحرک در SI به صورت $x = t^3 - 2t^2 + 5t$ داده شده است؛ شتاب متوسط آن را در لحظه‌های $t_1 = 2.0\text{ s}$ و $t_2 = 3.0\text{ s}$ چند m/s^2 است.

حل: برای دریافت شتاب متوسط آن نیاز به معادله سرعت آن داریم که پس از مشتق اول حرکت نظر به زمان به دست می‌آید یعنی:

از این به بعد برای اختصار شتاب لحظه‌ی را شتاب می‌نامیم.

شتاب ممکن است، قیمت‌های مثبت، منفی و یا صفر را به خود بگیرد؛ اگر $v_{2x} > v_{1x}$ باشد شتاب مثبت، اگر $v_{2x} < v_{1x}$ باشد شتاب منفی و شتاب وقتی صفر می‌گردد که $v_{2x} = v_{1x}$ گردد.

مثال (4): سرعت متحرکی روی محور x در لحظه $t_1 = 13\text{ s}$ برابر به 10 m/s و در لحظه $t_2 = 23\text{ s}$ برابر به 26 m/s می‌باشند؛ شتاب متوسط آن را بین دو لحظه t_1 و t_2 را دریابید.

حل: نظر به قاعده شتاب متوسط داریم که:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{(26 - 10)\text{ m/s}}{(23 - 13)\text{ s}} = 1.6\text{ m/s}^2$$

مثال (5): روباتی در آغاز با سرعت 2.20 m/s در سالن ورودی یک خط مستقیم روی محور y حرکت می‌کند؛ سپس به مدت 0.20 s سرعتش 4.80 m/s افزایش می‌یابد؛ بزرگی یا اندازه شتاب متوسط آن را در این مقطع زمانی دریابید.

حل: نظر به فورمول شتاب داریم که

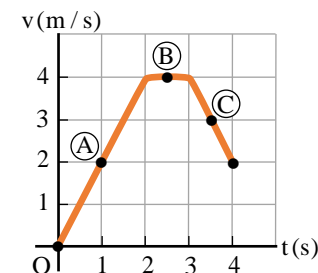
$$\bar{a}_y = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta t} = \frac{(4.80 - 2.20)\text{ m/s}}{0.20\text{ s}} = \frac{2.60\text{ m/s}}{0.20\text{ s}} = 13\text{ m/s}^2$$

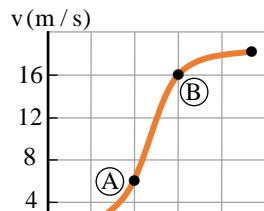
مثال (6): موتوری با سرعت 20.0 m/s روی محور x در حال حرکت است؛ ناگهان راننده برک می‌کند و در 4.2 s موتر را در یک خط مستقیم متوقف می‌کند؛ بزرگی شتاب متوسط آن چقدر است.

حل: توجه نمایید که سرعت نهایی صفر است در این جا سرعت اولیه بزرگ‌تر از سرعت نهایی است؛ پس $v_{2x} < v_{1x}$ می‌باشد بنابراین انتظار می‌رود که شتاب منفی باشد.

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t} = \frac{0 - 20.0\text{ m/s}}{4.2\text{ s}} = -4.76\text{ m/s}^2$$

مثال (7): در شکل (8.25) سرعت یک توپ بیسبال روی خط مستقیم را در مقطع‌های زمانی نشان داده شده است؛ سرعت لحظه‌ی آن را در نقاط A، B، C و در نقاط B و C را دریابید.





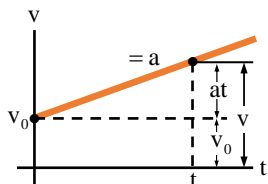
وقتی که جسم متحرک دارای شتاب ثابت باشد؛ شتاب لحظه‌ای آن تمام نقاط داخل یک انتروال زمانی با شتاب متوسط آن در هر مقطع زمانی مساوی می‌باشد. در نتیجه سرعت جسم در حال کاهش و یا در حال افزودن باشد مقدار یک‌سان در تمام مسیر حرکت می‌باشد. اکنون ما می‌توانیم بنویسیم $\bar{a} = a$ ، و داریم

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$$

اگر در رابطه بالا $t_1 = 0$ و t_2 را همین قسم به t ، همچنین $v_1 = v_0$ (سرعت اولیه در $t = 0$) و $v_2 = v$ نشان داده شود؛ شتاب جسم را چنین می‌نویسیم

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_0}{t} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$$

مقدار سرعت جسم متحرک در رابطه بالا بستگی به سرعت اولیه، شتاب و زمان دارد؛ برای خوبتر دانستن این موضوع در شکل دارای شتاب ثابت توضیح گردیده شده است.



در حرکتی که دارای شتاب ثابت و سرعت جسم متحرک در حال کاهش یا افزودن باشد؛ ما می‌توانیم سرعت متوسط را در یک مقطع زمانی نصف مجموع سرعت اولیه v_0 و سرعت نهایی v بنویسیم، داریم که

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

حال می‌توانیم برای دریافت معادله تغییر موقعیت، با داشتن سرعت متوسط (اگر $t_1 = 0$ و $t_2 = t$) و همین قسم $x_2 = x$ و $x_1 = x_0$ تعویض گردد) چنین بنویسیم

$$\frac{x - x_0}{t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t$$

یا به شکل ساده آن با داشتن شتاب ثابت داریم که:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$x = t^3 - 2t^2 + 5t \Rightarrow v_x = x' = 3t^2 - 4t + 5$$

حالا در آن مقطع زمانی داده شده مقدار v_{1x} و v_{2x} را داریم

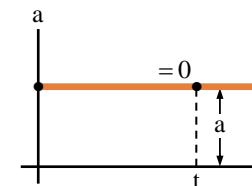
$$v_{2x} = 3(3.0)^2 - 4(3.0) + 5 \Rightarrow v_{2x} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{1x} = 3(2.0)^2 - 4(2.0) + 5 \Rightarrow v_{1x} = 9.0 \text{ m/s}$$

اکنون نظر به فورمول شتاب متوسط داریم که:

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{(20 - 9.0) \text{ m/s}}{(3.0 - 2.0) \text{ s}} = 11 \text{ m/s}^2$$

مثال (11): در شکل زیر گراف $(v - t)$ یک متحرک را نشان می‌دهد؛ (الف) شتاب متوسط آن را در نقاط A و B در یابید. (ب) نو بگویید که شتاب لحظه‌ای در کدام دو نقطه بیش‌تر است.



حل: (الف) از فورمول شتاب متوسط $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ داریم که:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(16 - 6) \text{ m/s}}{(12 - 8) \text{ s}} = \frac{10 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

(ب) در گراف اگر خط مستقیم را در نقاط A و B به صورت مماس در گراف $(v - t)$ رسم نماییم واضح است که شیب یا میل آن نقطه A بیش‌تر از نقطه B می‌گردد؛ پس شتاب لحظه‌ای نقطه A بیش‌تر نقطه B می‌باشد؛ یعنی: $a_A > a_B$.

حرکت با شتاب ثابت

بعضی اوقات ضرورت بر این می‌افتد که شتاب جسم متحرک در راستای خط مستقیم ثابت باشد؛ این نوع حرکت مهم اند چون این نوع حرکات در طبیعت زیاد می‌باشد؛ مثلاً اگر یک جسم به صورت آزاد به طرف زمین سقوط نماید (اگر مقاومت هوا ناچیز باشد) گراف شتاب - زمان مقدار شتاب ثابت را نشان می‌دهد؛ مانند شکل (8.27).

حل: با داشتن معادله حرکت داریم

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 20 = \frac{1}{2}(4.0)(2.0)^2 + v_0(2.0)$$

$$\Rightarrow (2.0)v_0 = 20 - 8.0 \Rightarrow v_0 = 6.0 \text{ m/s}$$

مثال (13): جسم با سرعت اولیه 2.0 m/s و شتاب ثابت 0.50 m/s^2 از مکان $x_0 - 3.0 \text{ m}$ روی محور x در جهت مثبت به حرکت آغاز می‌کند؛ این جسم پس از 6.0 ثانیه در چند متری مبدأ مکان خواهد بود.

حل: در معادله حرکت وضع می‌کنیم اگر $\Delta x = x - x_0$ باشد.

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$\Rightarrow x - (-3.0) = \frac{1}{2}(0.50)(6.0)^2 + (2.0)(6.0) \Rightarrow x = 18 \text{ m}$$

مثال (14): متحرک بدن سرعت اولیه با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از 10 ثانیه سرعت آن به 18 km/h می‌رسد؛ این متحرک پس از چند ثانیه سرعتش به 72 km/h می‌رسد.

حل: از رابطه $v = v_0 + at$ داریم که:

$$v = v_0 + at \Rightarrow \begin{cases} 18 \text{ km/h} = (10 \text{ s}) a & \dots (i) \\ 72 \text{ km/h} = a \cdot t & \dots (ii) \end{cases}$$

حال نسبت رابطه (i) و (ii) را دریافت می‌کنیم و داریم

$$\frac{18}{72} = \frac{(10 \text{ s}) a}{a \cdot t} \Rightarrow t = \frac{720}{18} \text{ s} \Rightarrow t = 40 \text{ s}$$

مثال (15): متحرکی با شتاب ثابت روی محور x در حرکت است؛ اگر سرعت این متحرک در مدت 15 دقیقه از 60 km/h به 140 km/h برسد؛ سرعت متحرک در این مدت چقدر فاصله را طی کرده است.

حل: می‌دانیم که $\Delta t = 15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h}$ می‌باشد؛ پس در معادله حرکت داریم

$$\Delta x = \left(\frac{v+v_0}{2}\right)\Delta t = \left(\frac{140+60}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta x = 25 \text{ km}$$

مثال (16): متحرک از حالت سکون با شتاب 10 m/s^2 شروع به حرکت می‌کند؛ مسافت پیموده شده در ثانیه چهارم چند متر است.

حل: چون متحرک از مبدأ شروع به حرکت نموده پس $v_0 = 0$ است؛ نظر به فورمول فاصله طی شده در ثانیه n -ام داریم که:

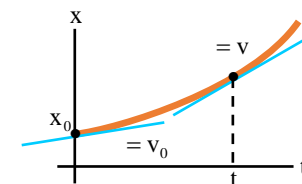
ما می‌توانیم این معادله را بیشتر انکشاف دهیم؛ چون $v = at + v_0$ می‌باشد پس می‌توانیم چنین بنویسیم

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + at + v_0)t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}(2v_0 + at)t$$

پس از ساده‌سازی معادله تغییر موقعیت را چنین بیان می‌کنیم

$$\Delta x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

این رابطه را می‌توانیم به شکل زیر توضیح خوب‌تر دهیم که جسم متحرک با تغییرات موقعیت $\Delta x = x - x_0$ اگر موقعیت نهایی جسم از مبدأ x باشد.



اگر بخواهیم رابطه بین حرکت و سرعت را به دست آوریم؛ از رابطه $v = at + v_0$ زمان را بدست آورده و در این معادله $(x - t)$ دهیم، در نتیجه رابطه بین موقعیت و سرعت را بدست خواهیم آورد که مستقل از زمان می‌باشد؛ یعنی

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v + v_0) \left(\frac{v - v_0}{a}\right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

پس از ساده‌سازی این رابطه با داشتن شتاب ثابت داریم که:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

این رابطه را به نام معادله سرعت نظر به تغییر فاصله نیز یاد می‌کنند.

بعضی وقت‌ها ضرورت بر این می‌افتد که فاصله طی شده در ثانیه n -ام را بدانیم که همان فاصله طی شده در جریان همان ثانیه است؛ اولاً فاصله طی شده پس از n ثانیه از مبدأ را دریافت نموده و بعداً این فاصله را از فاصله طی شده در ثانیه $(n - 1)$ -ام از مبدأ، تفریق می‌کنیم؛ فاصله طی شده در ثانیه n -ام به دست می‌آید. یعنی

$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(t_n^2 - t_{n-1}^2) + v_0 = \frac{1}{2}a(2t_n - 1) + v_0$$

مثال (12): متحرکی با شتاب ثابت 4.0 m/s^2 در مدت 2.0 ثانیه در یک مسیر مستقیم 20 m تغییر مکان می‌کند؛ سرعت اولیه آن چند متر در ثانیه است.

(الف) برای دریافت مقدار فاصله طی شده، مانند شتاب (مسیر حرکت جسم را در سه بخش تقسیم می‌کنیم). اول با شتاب ثابت (مثبت) از حالت سکون شروع به حرکت نموده، در مرحله دوم با سرعت ثابت (شتاب صفر) فاصله‌ی را طی می‌کند؛ و در آخر این که با شتاب ثابت (منفی) جسم توقف می‌کند؛ که این سه مسیر طی شده‌ی جسم را قرار زیر می‌نویسیم.

$$x_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(0.50 \text{ m/s})(20 \text{ s})^2 = 1.0 \times 10^2 \text{ m}$$

$$x_2 = vt = (10 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 1.0 \times 10^2 \text{ m}$$

$$x_3 = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (10 \text{ m/s})(5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-2.0 \text{ m/s})(5.0 \text{ s})$$

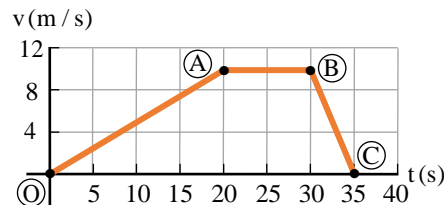
$$\Rightarrow x_3 = 50 \text{ m} - 5.0 \text{ m} = 45 \text{ m}$$

حال با یک‌جا نمودن تمام فاصله‌های به دست آمده، مسیر کل جسم متحرک بر روی خط مستقیم به دست می‌آید

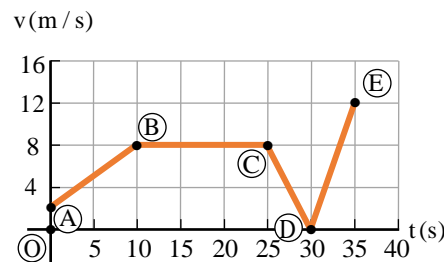
$$\sum x = x_1 + x_2 + x_3 = (1.0 \times 10^2 \text{ m}) + (1.0 \times 10^2 \text{ m}) + (45 \text{ m})$$

$$= 245 \text{ m}$$

(ب) در گراف ($v - t$) دیده می‌شود؛ خطی که از نقاط O و A ساخته شده دارای میل مثبت و شتاب آن نیز مثبت و خط AB دارای شیب صفر (شتاب صفر) و خط BC دارای شیب منفی (شتاب منفی) می‌باشد؛ شکل (زیر).



مثال (20): در شکل (زیر) گراف ($v - t$) متحرکی در 35 ثانیه نشان داده شده است؛ (الف) شتاب هر یک از مرحله‌های AB ، BC ، CD ، DE چقدر است، (ب) مقدار فاصله طی شده جسم متحرک را در این طول مسیر دریابید.



$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(2t_n - 1) + v_0 = \frac{1}{2} \cdot 10(2 \cdot 4 - 1) = 35 \text{ m}$$

مثال (17): اگر معادله حرکت جسم در SI به صورت $x = -2t^2 + 8t$ باشد؛ این جسم پس از طی چند متر متوقف خواهد شد.

حل: می‌دانیم که جسم وقتی متوقف می‌گردد که $v = 0$ گردد یعنی

$$v(t) = x'(t) \Rightarrow v = at + v_0 = -4t + 8 \Rightarrow t = 2.0 \text{ s}$$

دریافت نمودیم که جسم متحرک پس از 2.0 s متوقف می‌گردد؛ پس فاصله که در این مدت زمان طی نموده است داریم که

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t = \frac{1}{2}(-4)(2.0)^2 + 8(2.0) = 8.0 \text{ m}$$

جسم پس از $x = 8.0 \text{ m}$ متوقف می‌گردد.

مثال (18): موتوری با سرعت 20 m/s در یک خط راست در حال حرکت است و ناگهان مانعی را در مقابل خود می‌بیند؛ که در همان لحظه با شتاب -5 m/s^2 برک می‌کند؛ معلوم کنید متحرک پس از چند ثانیه می‌ایستد.

حل: دیده می‌شود که $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ، $v = 0$ و $a = -5.0 \text{ m/s}^2$ می‌باشد؛ در قدم نخست فاصله که این جسم طی می‌کند را دریافت می‌کنیم

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow 0 = (20)^2 + 2(-5.0)x \Rightarrow x = 40 \text{ m}$$

و حالا زمان توقف را از رابطه $v = v_0 + at$ محاسبه می‌کنیم

$$0 = v_0 + at \Rightarrow (-20) = (-5.0)t \Rightarrow t = 4.0 \text{ s}$$

مثال (19): موتوری در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از 20 ثانیه سرعتش به 36 km/h می‌رسد؛ سپس با همین سرعت به مدت 10 ثانیه به حرکتش ادامه می‌دهد و پس از آن با شتاب ثابت برک می‌کند و بعد به مدت 5.0 ثانیه متوقف می‌شود؛ (الف) مقدار فاصله طی شده در جریان همین حرکت چه مقدار است. (ب) گراف ($v - t$) از لحظه شروع حرکت تا لحظه توقف موتور را رسم کنید.

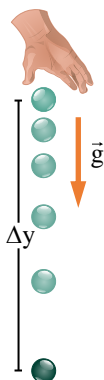
حل: در قدم اول تمام دیتاهای داده شده را در یک سیستم تبدیل می‌کنیم؛ و می‌دانیم که $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$ است و بعد شتاب جسم متحرک را در تمام نقاط مسیر باید بدانیم

$$a_1 = \frac{v-v_0}{t} = \frac{10 \text{ m/s}-0}{20 \text{ s}} = +0.50 \text{ m/s}^2$$

$$a_2 = \frac{10 \text{ m/s}-10 \text{ m/s}}{10 \text{ min}}$$

$$a_3 = \frac{v-v_0}{t} = \frac{0-10 \text{ m/s}}{5.0 \text{ s}} = \frac{-10 \text{ m/s}}{5.0 \text{ s}} = -2.0 \text{ m/s}^2$$

می توان فرض کرد؛ شکل (زیر) حرکت یک ساچمه را هنگام سقوط آزاد نشان می دهد که در وقفه های زمانی متوالی $\Delta t = 1/15$ s از آن عکس برداری شده است.



بنابراین اگر از مقاومت هوا صرف نظر کنیم، تمام اجسام در نزدیکی سطح زمین تقریباً با شتاب ثابت سقوط می کنند، که این همان شتاب جاذبه زمین است با حرف g نمایش داده می شود؛ حرکت مستقیم الخط با شتاب g را سقوط آزاد می نامند، که جهت این شتاب همیشه به طرف پایین (مرکز زمین) است؛ اندازه شتاب g برحسب عرض البلد جغرافیایی، اندکی تغییر می کند و با افزایش ارتفاع از سطح زمین کاهش می یابد.

اندازه این شتاب در نزدیکی سطح زمین نزدیک به 9.80 m/s^2 است؛ اما گاهی برای سهولت محاسبه $g = 10.0 \text{ m/s}^2$ فرض می شود؛ همان معادله های که با شتاب ثابت مطالعه گردیدند، عین فورمول در سقوط آزاد نیز می باشند فقط با $v_0 = 0$ و $x_0 = 0$ در یک حالت خاص در نظر گرفته می شوند، در سقوط آزاد تغییر مکان در امتداد قائم است، و موقعیت متحرک به طور معمول با y نشان داده می شود و مبدأ حرکت نقطه ای است که سقوط از آن شروع می شود؛ اگر جهت مثبت را به طرف پایین اختیار کنیم، پس در معادله های حرکت $\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$ و سرعت $v_y = gt + v_{0y}$ اگر $v_{0y} = 0$ گردد پس

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \wedge \quad t = \sqrt{\frac{2\Delta y}{g}}$$

$$v_y = gt \quad \wedge \quad t = \sqrt{2g\Delta y}$$

مثال (21): اگر جسم از ارتفاع 4.9 m سقوط آزاد نماید؛ معلوم نمایید که پس از چند ثانیه به زمین می رسد.

حل: جسم وقتی که سقوط آزاد نماید بدون سرعت اولیه ($v_0 = 0$) می باشد؛ پس معادله حرکت $\Delta y = \frac{1}{2}gt^2$ بوده و زمانی که این جسم در جهت قائم می انجامد قرار ذیل محاسبه می کنیم

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 4.9\text{m} = \frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2) \cdot t^2 \Rightarrow t = 1.0 \text{ s}$$

حل: اولاً نوعیت حرکت را در تمام مرحله ها مشخص می کنیم که جسم با سرعت اولیه 2.0 m/s شروع به حرکت نموده و با شتاب ثابت (مثبت) در ظرف 10 ثانیه تا به نقطه B سرعت خویش را به 8.0 m/s می رساند؛ سپس حرکت یک نواخت به مدت 15 ثانیه را اختیار می کند که شتاب آن صفر است از نقطه B تا C می باشد؛ بعد از پس از گذشت 25 ثانیه از مبدأ زمان، متحرک حرکت کندشونده (شتاب منفی) داشته سرعت خود را کاهش می دهد، و در مدت 5.0 ثانیه به صفر می رسد؛ و در آخر دوباره به مدت 5.0 ثانیه سرعت خویش را به 12 m/s می رساند، که در این حالت حرکت شتابی (مثبت) دارد.

(الف) اگر بخواهیم که شتاب هریک از مرحله ها را دریافت نماییم کافیست که میل آن خطوط را بدانیم که نمایانگر شتاب می باشد داریم که

$$a_{AB} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{(8.0 - 2.0) \text{ m/s}}{(10 - 0) \text{ s}} = +0.60 \text{ m/s}^2$$

$$a_{BC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{(8.0 - 8.0) \text{ m/s}}{(25 - 10) \text{ s}} = 0$$

$$a_{CD} = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = \frac{(0 - 8.0) \text{ m/s}}{(30 - 25) \text{ s}} = -1.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_{DE} = \frac{v_E - v_D}{t_E - t_D} = \frac{(12 - 0) \text{ m/s}}{(35 - 30) \text{ s}} = +2.4 \text{ m/s}^2$$

(ب) باز هم مقدار فاصله طی شده بسته گی به نوعیت حرکت دارد در قدم اول فاصله هر یک مرحله های داده شده را جداگانه دریافت می کنیم؛ داریم

$$x_{AB} = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (2.0)(10) + \frac{1}{2}(0.60)(10)^2 = 50 \text{ m}$$

$$x_{BC} = vt = (8.0 \text{ m/s})(15 \text{ s}) = 120 \text{ m}$$

$$x_{CD} = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (8.0)(5.0) + \frac{1}{2}(-1.6)(5.0)^2 = 20 \text{ m}$$

$$x_{DE} = v_0t + \frac{1}{2}at^2 = (0)(5.0) + \frac{1}{2}(2.4)(5.0)^2 = 30 \text{ m}$$

در قدم آخر تمام فاصله های بدست آمده را با هم جمع می کنیم

$$\sum x = x_{AB} + x_{BC} + x_{CD} + x_{DE} = 220 \text{ m}$$

سقوط آزاد اجسام

سقوط آزاد نمونه طبیعی حرکت با شتاب ثابت است؛ در این نوع حرکت، مسیر حرکت مستقیم است و در هنگام سقوط یگانه قوه وارده بر جسم همانا وزن آن است؛ اگر یک سکه و یک ورق کاغذ را از ارتفاع معین رها کنیم، به طور هم زمان به زمین نمی رسند، چون مقاومت هوا مانع بالای ورق کاغذ بیشتر می باشد؛ اما اگر همین تجربه را در یک محوطه خلا انجام دهیم، سکه و ورق کاغذ هم زمان به زمین می رسند؛ مثلاً سقوط یک جسم در خلا و یا سقوط گلوله کوچک فلزی در هوا را (تقریب مناسب)



$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \\ \Delta y_2 = \frac{1}{2} g (t_1 - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta y_1 - \Delta y_2 = \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g (t_1 - 1)^2$$

اکنون با انکشاف رابطه $(t_1 - 1)^2$ داریم که

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g (t_1 - 1)^2 + g t_1 - \frac{1}{2} g &= 45 \text{ m} \Rightarrow 10 t_1 = 50 \Rightarrow t_1 = 5.0 \text{ s} \\ \Rightarrow \Delta y &= \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2} (9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (5.0 \text{ s})^2 = 122.5 \text{ m} \end{aligned}$$

مثال (25): از ارتفاع 80.0 متری سطح زمین گوله‌ی با سرعت اولیه $v_0 = 30.0 \text{ m/s}$ در امتداد قائم به سمت پایین پرتاب می‌شود و هم‌زمان گوله‌ی دیگری از ارتفاع h بدون سرعت اولیه سقوط می‌کند هر دو گوله هم‌زمان به زمین می‌رسند؛ اگر $g = 10.0 \text{ m/s}^2$ و مقاومت هوا ناچیز باشد، h چند متر است.

حل: چون دو گوله هم‌زمان پرتاب شده و هم‌زمان به زمین رسیده اند مدت زمان حرکت آن‌ها با هم یکسان اند؛ از این رو زمان گوله اول را محاسبه کرده داریم که

$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \Rightarrow 80.0 \text{ m} = \frac{1}{2} (10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) t^2 + (30.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}) t \Rightarrow t = 2.00 \text{ s}$$

حال گذاشتن زمان را در گوله دوم که سقوط آزاد نموده است داریم

$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} (10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (2.00 \text{ s})^2 = 20.0 \text{ m}$$

مثال (26): از نقطه‌ی به ارتفاع 20.0 m از سطح زمین گوله‌ی در شرایط خلا بدون سرعت اولیه رها می‌شود؛ پس از 1.00 ثانیه گوله دیگری از همان نقطه با سرعت اولیه v_0 پرتاب می‌شود؛ هر دو گوله با هم به زمین می‌رسند؛ سرعت اولیه گوله‌ی دوم چند متر بر ثانیه است.

حل: اگر زمان حرکت گوله اول t_1 باشد، زمان حرکت گوله دوم $t_2 = t_1 - 1.00 \text{ s}$ است؛ لذا معادله تغییر مکان هر یک را نوشته پس از آن سرعت اولیه گوله دوم را به دست می‌آوریم داریم که

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= \frac{1}{2} g t_1^2 + v_0 t \Rightarrow 20.0 \text{ m} = \frac{1}{2} (10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) t_1^2 + 0 \cdot t_1 \\ &\Rightarrow 20.0 \text{ m} = (5.00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) t_1^2 \Rightarrow t_1 = 2.00 \text{ s} \end{aligned}$$

و زمان حرکت گوله دوم در این حالت 1.00 ثانیه است یعنی

$$t_2 = t_1 - 1.00 \text{ s} = 2.00 \text{ s} - 1.00 \text{ s} = 1.00 \text{ s}$$

برای تعیین سرعت اولیه گوله داریم

مثال (22): اگر جسمی بدون سرعت اولیه به مدت 3.0 ثانیه در شرایط خلا سقوط کند، در ثانیه سوم تقریباً چند متر فاصله را می‌پیماید.

حل: فاصله که جسم در ثانیه سوم طی می‌کند، را داریم

$$\Delta y = \frac{1}{2} g (2t_n - 1) = \frac{9.8}{2} [2(3.0) - 1] = 24.5 \text{ m}$$

مثال (23): جسمی را در شرایط خلا از یک بلندی رها می‌کنیم، طوری که با سرعت 30.0 m/s به زمین برخورد می‌کند؛ ارتفاع بلندی چند متر است، در صورتی که $g = 10.0 \text{ m/s}^2$ فرض گردد.

حل: با توجه بر این که جسم بدون سرعت اولیه است داریم که

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2g\Delta y \Rightarrow (30.0 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - 0^2 = 2(10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot \Delta y \\ &\Rightarrow 9.00 \times 10^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = (20.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) \cdot \Delta y \Rightarrow \Delta y = 45.0 \text{ m} \end{aligned}$$

مثال (24): عمقی چاهی $3.20 \times 10^2 \text{ m}$ است، سنگی را با کدام سرعت اولیه به چاه بی‌اندازیم، تا صدای برخورد سنگ را به قاعده چاه پس از 5.00 s بشنویم؛ در صورتی که $g = 10.0 \text{ m/s}^2$ ، سرعت صوت $3.20 \times 10^2 \text{ m/s}$ و مقاومت هوا ناچیز باشد.

حل: مدت زمانی که سنگ به ته چاه می‌رسد با t_1 و مدت زمانی را که صدای برخورد آن از ته چاه به گوش شنونده برسد با t_2 می‌دهیم؛ با توجه به این که صوت با سرعت $3.20 \times 10^2 \text{ m/s}$ عمق $3.20 \times 10^2 \text{ m/s}$ را در مدت 1.00 s طی می‌کند یعنی

$$y = v_y t_2 \Rightarrow 3.20 \times 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = (3.20 \times 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}}) t_2 \Rightarrow t_2 = 1.00 \text{ s}$$

$t = t_1 + t_2$ می‌باشد؛ پس زمان t_1 قرار زیر است

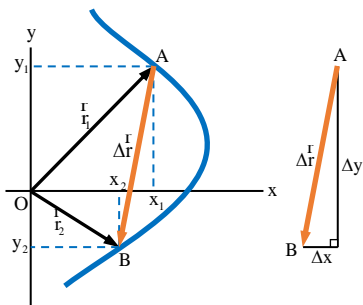
$$5.00 \text{ s} = t_1 + 1.00 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 4.00 \text{ s}$$

اکنون می‌توانیم سرعت اولیه را قرار رابطه‌های زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{2} g t_1^2 + v_0 t_1 \\ &\Rightarrow 3.20 \times 10^2 \text{ m} = \frac{1}{2} (10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) (4.00 \text{ s})^2 + v_0 (4.00 \text{ s}) \\ &\Rightarrow 3.20 \times 10^2 \text{ m} = 80.0 \text{ m} + v_0 (4.00 \text{ s}) \Rightarrow v_0 = 60.0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

مثال (25): دو گوله به فاصله زمانی 1.0 ثانیه از بالای برجی به ارتفاع y در شرایط خلا رها می‌شود اگر بیشترین فاصله بین آن‌ها در طول حرکت 45 m باشد؛ ارتفاع این برج چند متر می‌باشد.

حل: بیشترین فاصله بین دو گوله زمانی رخ می‌دهد که یکی از آن‌ها به مقصد رسیده باشد؛ لذا در ابتدا معادله تغییر مکان هر یک را نوشته، سپس تفاوت آن‌ها را برابر 45 m قرار می‌دهیم؛ اگر زمان حرکت گوله اول t_1 باشد، زمان دومی $t_2 = t_1 - 1.0 \text{ s}$ خواهد بود؛ لذا داریم که



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}, \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وکتورهای \vec{i} و \vec{j} را به نام وکتورهای واحد یاد می‌کنند، که وکتور آروزی محور x و \vec{j} روی محور y قرار دارند، در (شکل زیر) بخش الف وکتور موقعیت \vec{r}_1 جسم را در نقطه A و وکتور موقعیت \vec{r}_2 جسم را در نقطه B نشان می‌دهند. که مؤلفه‌های هر دو وکتور را چنین می‌نویسیم

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$$

حالا فرض کنید (شکل 9.2) بخش الف جسم از نقطه A (مکان \vec{r}_1) به نقطه B (مکان \vec{r}_2) انتقال می‌کند، در این صورت وکتور تغییر مکان (موقعیت) وکتوری است که از نقطه A به نقطه B ترسیم می‌شود، (شکل 9.2) بخش ب وکتور تغییر موقعیت را به $\Delta\vec{r}$ نشان داده و چنین محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\Delta r = (\Delta x)\vec{i} + (\Delta y)\vec{j}, \quad |\Delta r| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

مثال (9.1): اگر جسمی از مکان $\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ به مکان $\vec{r}_2 = -\vec{i} + 7\vec{j}$ منتقل شده باشد، اندازه تغییر مکان متحرک را در SI دریابید؟

حل:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{i} + 7\vec{j} - (2\vec{i} + 3\vec{j}) = -3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\Rightarrow |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}m = 5m$$

مثال: موقعیت متحرکی در دو لحظه t_1 و t_2 به ترتیب \vec{r}_1 و \vec{r}_2 است، اگر اندازه‌های هریک از وکتورها به ترتیب $6m$ و $8m$ باشد، اندازه تغییر مکان بین این دو لحظه چقدر است در صورتی که زاویه بین وکتور موقعیت‌ها 90° باشد؟

حل: گفته می‌توانیم، که وکتور تغییر موقعیت یعنی $\Delta\vec{r}$ عبارت از وتر مثلث قائم‌الزاویه است، که اضلاع آن $6m$ و $8m$ است، پس داریم که:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}m = \sqrt{100}m = 10m$$

مثال: متحرک از نقطه $A(8, -6)$ به نقطه $B(-7, 2)$ منتقل شده است، تغییر مکان متحرک را از نقطه A تا B را در SI حساب کنید؟

حل:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\Delta y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t$$

$$\Rightarrow 20.0 \text{ m} = \frac{1}{2}(10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(1.00 \text{ s})^2 + v_0(1.00 \text{ s})$$

$$\Rightarrow 20.0 \text{ m} = 5.00 \text{ m} + v_0 \Rightarrow v_0 = 15.0 \text{ m/s}$$

اهداف آموزشی:

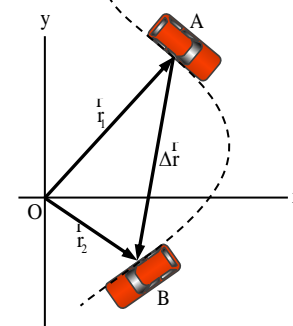
1_ دانش آموزان با مفاهیم اساسی موضوعات (حرکت های دو بعدی، تغییر مکان و سرعت متوسط، سرعت لحظه‌ای، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای، حرکت های پرتابی، پرتاب افقی، پرتاب مایل) آشنایی کامل دریافت کند.

2_ دانش آموزان با موارد استفاده از حرکت های دو بعدی و حرکت های پرتابی آگاهی کامل کسب نمایند.

3_ دانش آموزان باید با اهمیت موضوعات هذا آشنا شده و بتوانند در زندگی روزمره شان تطبیق نمایند.

بخش اول: وکتور مکان (موقعیت) و وکتور تغییر مکان

یک موتر که در سطح xoy در مقطع زمانی Δt تغییر موقعیت نماید؛ این موتر در نقطه A وکتور موقعیت r_1 و در نقطه B دارای وکتور موقعیت r_2 می‌باشد؛ شکل (زیر).



وکتور مکان موتر وکتوری است که مبدأ را به مکان متحرک وصل می‌کند، که به \vec{r} نشان می‌دهیم، اگر اندازه مؤلفه‌های وکتور \vec{r} را بر روی محورهای دستگاه مختصات نشان دهیم، وکتور مکان جسم را می‌توان چنین تعریف کرد.

مثال: معادله حرکت یک جسم در SI به ترتیب $x = 2t^2$ و $y = 4t$ داده شده است، وکتور سرعت متوسط آنرا در وقفه زمانی $t_1 = 4s$ و $t_2 = 8s$ تعیین کند.

حل:

$$f(t) = x = 2t^2, f(4) = 2(4)^2 = 32, f(8) = 2(8)^2 = 128$$

$$g(t) = y = 4t, g(4) = 4(4) = 16, f(8) = 4(8) = 32$$

$$\Delta x = f(8) - f(4) = 128 - 32 = 96$$

$$\Delta y = g(8) - g(4) = 32 - 16 = 16$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{96}{4} \vec{i} + \frac{16}{4} \vec{j} = 24\vec{i} + 4\vec{j}$$

مثال: وکتور موقعیت نقطه مادی در SI به شکل $\vec{r} = (3t^2 - 2)\vec{i} + (t^2 + 3t)\vec{j}$ داده شده است، وکتور سرعت را بعد از 2s حساب کنید؟

حل:

$$g(t) = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (6t)\vec{i} + (2t + 3)\vec{j} \Rightarrow g(2) = 12\vec{i} + 7\vec{j}$$

مثال: وکتور موقعیت نقطه مادی در SI به صورت $\vec{r} = (t^2 + 4t)\vec{i} + (3t)\vec{j}$ داده شده است، اندازه وکتور سرعت را بعد از 3 ثانیه تعیین کنید؟

حل:

$$g(t) = \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2t + 4)\vec{i} + (3)\vec{j}$$

$$g(3) = \vec{v} = 10\vec{i} + 3\vec{j}, |\vec{v}| = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109} m/s$$

مثال: معادلات حرکت یک جسم در SI به صورت $x = 10t$ و $y = -2t^2$ است، سرعت متوسط این متحرک در 3 ثانیه دوم حرکت چه اندازه است؟

حل: سه ثانیه دوم حرکت، انتروال زمانی بین 3 تا 6 ثانیه می باشد، که تغییر مکان بین این دو لحظه قرار ذیل محاسبه می گردد.

$$f(t) = x = 10t, f(6) = 10(6) = 60, f(3) = 10(3) = 30$$

$$g(t) = y = -2t^2, g(6) = -2(6)^2 = -72, g(3) = -2(3)^2 = -18$$

$$\Delta x = f(6) - f(3) = 60 - 30 = 30$$

$$\Delta y = g(6) - g(3) = -72 + 18 = -54$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{30}{3} \vec{i} - \frac{54}{3} \vec{j} = 10\vec{i} - 18\vec{j}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{10^2 + (-18)^2} = \sqrt{100 + 324} \Rightarrow |\vec{v}| \approx 20.6 m/s$$

مثال: یک جسم روی صفحه xoy از نقطه $P(-4, 2)$ به نقطه $Q(4, 1)$ در مدت 4 ثانیه انتقال می یابد، (شکل 9.4). مقدار سرعت متوسط جسم متحرک را در این زمان محاسبه کنید؟

$$= \sqrt{(-7 - 8)^2 + (2 + 6)^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} \Rightarrow |\Delta \vec{r}| = 17m$$

مثال: وکتور تغییر مکان خرگوش را در انتروال $[1s, 4s]$ با معادلات حرکت $x = 3t^2 + 2t$ و $y = 2t^2 - 4t$ دریابید؟

حل:

$$f(t) = x = 3t^2 + 2t, f(4) = 3(4)^2 + 2(4) = 56, f(1) = 5$$

$$g(t) = y = 2t^2 - 4t, g(4) = 2(4)^2 - 4(4) = 16, g(1) = -2$$

$$\Delta x = f(4) - f(1) = 56 - 5 = 51, \Delta y = g(4) - g(1) = 16 + 2 = 18$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} = 51\vec{i} + 18\vec{j}$$

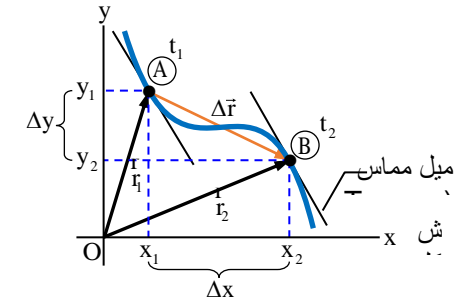
سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

تعریف 1. اگر جسم متحرک از نقطه A تا به نقطه B در مدت Δt تغییر مکان نماید، (شکل 9.3). پس نسبت تغییر مکان و زمان سرعت متوسط را تعریف می کند، پس داریم که:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j}$$

تعریف 2. لیمت سرعت متوسط وقتی که Δt به طرف صفر تقرب کند، یعنی وقتی که Δt به صفر نزدیک شود، وکتور سرعت لحظه‌ای بر مسیر حرکت در همان نقطه مماس خواهد شد، (شکل 9.3). و یا سرعت لحظه‌ای مشتق وکتور مکان جسم نسبت به زمان است، که به زبان ریاضیکی چنین تعریف می گردد.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$



مثال: موتوری که در یک سطح افقی xoy حرکت می کند، معادله‌های حرکت آن در سیستم SI به صورت $x = 6t + 5$ و $y = 4t^2$ است، اندازه سرعت موتور را در $t = 1s$ دریابید؟

حل: در پرسش فوقانی یک زمان مشخص را تعیین نموده است، باید سرعت لحظه‌ای را محاسبه کنیم، پس داریم که:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6 \Rightarrow v_x(1s) = 6m/s, v_y = \frac{dy}{dt} = 8t \Rightarrow v_y(1s) = 8m/s$$

$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \Rightarrow v = 10m/s$$

$$y' = v_y = \frac{dy}{dt} = -15t^2 \Rightarrow v_y(1) = -15 \frac{m}{s}$$

در نتیجه وکتور سرعت لحظه‌ی در $t = 1s$ چنین می‌نویسیم.

$$v = 40\vec{i} - 15\vec{j}$$

برای تعیین وکتور شتاب نیز ابتدا مرکب‌های شتاب یعنی a_x و a_y را به دست می‌آوریم. داریم که:

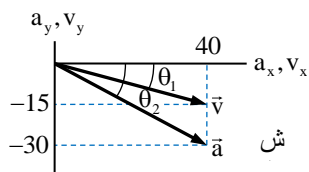
$$(v_x)' = a_x = \frac{dv_x}{dt} = 40 \Rightarrow a_x(1) = 40 \frac{m}{s^2}$$

$$(v_y)' = a_y = \frac{dv_y}{dt} = -30t \Rightarrow a_y(1) = -30 \frac{m}{s^2}$$

و وکتور شتاب را در $t = 1s$ چنین خواهد بود.

$$a = 40\vec{i} - 30\vec{j}$$

وکتورهای \vec{a} و \vec{v} در زمان $t = 1s$ می‌توان فهمید که این دو وکتور با هم موازی نیستند، (شکل 9.5).



مثال: معادلات حرکت ذره‌ی در SI روی صفحه‌ی xoy به صورت $x = t^3$ و $y = t^3$ است، در کدام فاصله از مبدأ اندازه‌ی شتاب متحرک $12\sqrt{2}m/s^2$ می‌رسد؟

حل:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 \Rightarrow a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 3t^2 \Rightarrow a_y = \frac{dv_y}{dt} = 6t$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow 12\sqrt{2} = \sqrt{36t^2 + 36t^2} \Rightarrow t = 2s$$

$$x(2) = y(2) = (2)^3 = 8 \Rightarrow |r| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}m$$

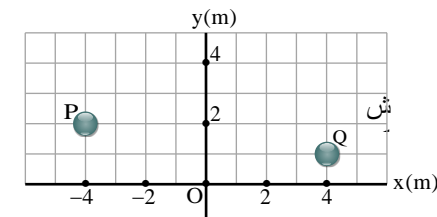
حرکت پرتابی (Projectile Motion)

حرکت پرتابی نوعی از حرکت دو بُعدی که با شتاب ثابت است، برای مطالعه و تحلیل حرکت‌های دو بُعدی در مرحله‌ی نخست باید سه فرضیه‌ی ذیل را در نظر بگیریم.

الف: شتاب جاذبه‌ی (g)، در محدوده‌ی حرکت جسم ثابت و جهت شان به طرف پایین است، که شتاب مؤلفه‌ی افقی ندارد.

ب: از تأثیر مقاومت هوا می‌توان صرف نظر کرد.

ج: چرخش زمین بر روی این حرکت تأثیری ندارد.



حل:

$$P(x_1, y_1) = P(-4, 2), Q(x_2, y_2) = Q(4, 1)$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} = \frac{4 - (-4)}{4} \vec{i} + \frac{1 - 2}{4} \vec{j} = 2\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{65} \Rightarrow |\vec{v}| \approx 2m/s$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ی

تعریف 1: اگر وکتور سرعت متحرک تغییر کند، آن حرکت را شتاب‌دار گویند، این تغییر می‌تواند در اندازه و وکتور سرعت و یا جهت آن باشد، وکتور شتاب متوسط به صورت نسبت تغییر وکتور سرعت و زمان این تغییر سرعت تعریف می‌گردد، شتاب متوسط و وکتور آن را چنین نشان می‌دهیم.

$$\bar{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta \vec{v}_y}{\Delta t} \vec{j} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j}, \quad |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2}$$

تعریف 2: شتاب لحظه‌ی برابر با لیمت شتاب متوسط در زمانی بی‌نهایت کوچک، به سمت آن میل کند، یعنی شتاب لحظه‌ی برابر با مشتق وکتور سرعت نسبت به زمان است، به زبان ریاضیکی طور ذیل نشان می‌دهیم.

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

جهت شتاب متوسط (\bar{a}) فقط با تغییرات سرعت ($\Delta \vec{v}$) هم‌جهت اند، اما در حرکت روی مسیر منحنی هیچ‌وقت وکتور شتاب متوسط با وکتور وکتورهای \vec{v}_1 و \vec{v}_2 هم‌جهت نیستند و وقتی که Δt به طرف صفر تقرب کند وکتورهای \vec{v}_1 و \vec{v}_2 بسیار نزدیک می‌شود، باز هم شتاب لحظه‌ی با سرعت لحظه‌ی هم‌جهت نخواهد بود و باید گفت که در حرکت دارای سرعت ثابت روی مسیر منحنی وقتی که Δt به طرف صفر تقرب کند، $\Delta \vec{v}$ بر \vec{v} عمود است.

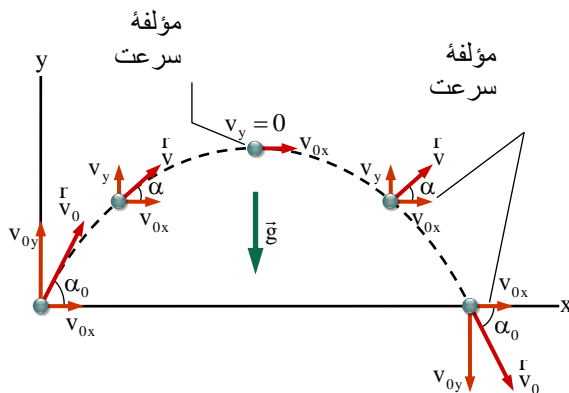
مثال: معادله‌ی حرکت دو بُعدی جسمی در SI به صورت ذیل است: $\begin{cases} x = 20t^2 \\ y = -5t^3 \end{cases}$ ، وکتورهای

سرعت و شتاب آن را در $t = 1s$ به دست آورید، و بگویید که آیا این دو وکتور هم‌جهت اند؟

حل: برای تعیین وکتور سرعت، در مرحله‌ی نخست مرکب‌های v_x و v_y را در $t = 1s$ دریافت می‌کنیم.

و باید گفت که زمان رسیدن جسم به زمین برای همیشه با زمان سقوط آزاد برابر است، که توسط رابطه $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ محاسبه می‌شود.

تعریف 2. اگر موقعیت جسم را در مبدأ سیستم کمیات وضعیه قایم در نظر بگیریم یعنی $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$ و $\mathbf{t}_0 = \mathbf{0}$ ، تحت زاویه α_0 روی صفحه xoy پرتاب گردد، (شکل 9.7)، طوری که جسم پرتاب شده روی محور x حرکت یک‌نواخت ($a_x = 0$) و روی محور y حرکت تعجیلی ($a_y = -g$) را داشته باشد (شکل 9.7).



معادله حرکت، سرعت، و مسیر حرکت جسم پرتاب شده و همین‌طور زمان رسیدن جسم به نقطه اوج، زمان کلی پرتاب، ارتفاع نقطه اوج و بُرد اعظمی و یا رنج پرتاب جسم را طور ذیل محاسبه می‌کنیم

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos \alpha_0 t$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin \alpha_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha_0 - gt$$

اگر مقدار زمان را از معادله حرکت (مسیر x) را در معادله حرکت (مسیر y) بگذاریم، در نتیجه معادله مسیر حرکت را چنین می‌نویسیم.

$$\Delta y = \tan \alpha_0 x - \frac{gx^2}{2(v_{0x})^2} = \tan \alpha_0 x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}$$

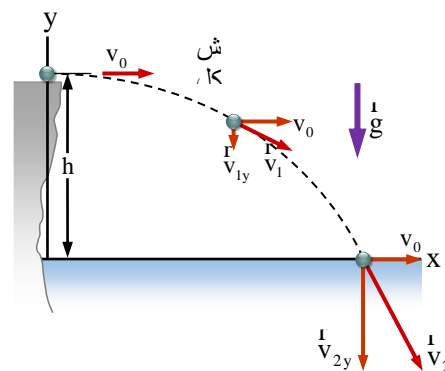
جسم پرتاب شده وقتی که به نقطه اوج می‌رسد، $v_y = 0$ می‌گردد، پس زمان رسیدن جسم به نقطه اوج را از معادله سرعت روی مسیر y طور ذیل دریافت می‌کنیم

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt \Rightarrow 0 = v_0 \sin \alpha_0 - gt$$

یکی از اصطلاحاتی که در حرکت‌های پرتابی با آن زیاد سروکار داریم عبارت از جسم پرتاب شده است. جسم پرتاب شده عبارت از جسمی است که در آغاز با سرعت اولیه پرتاب و یا بر اثر ضربه در جهتی به حرکت در آید و سپس تحت تأثیر قوه جاذبه، حرکت شتاب‌دار (حد اقل در یکی از محورهای کمیات وضعیه) داشته باشد. مری که از تفنگ خارج می‌شود، سنگی که با یک زاویه پرتاب می‌شود، جریان آبی که از سوراخی فوران می‌کند، همه گی مثال‌های از حرکت پرتابی هستند که مسیر پارابول شکل را در فضا می‌پیمایند. که اثبات فورمول‌ها و مسایل آن توسط قواعد ریاضیکی آسان‌تر می‌گردد. که در این بخش دو پرتاب دیگر (پرتاب افقی و پرتاب مایل) را مطالعه می‌کنیم.

پرتاب افقی و مایل (Lateral and Inclined Projectile)

تعریف 1. هرگاه جسمی را ارتفاع h و یا فاصله y تحت زاویه صفر درجه با جهت محور مثبت x یا موازی به محور x با سرعت اولیه v_0 پرتاب گردد، چنین پرتاب را پرتاب افقی یاد می‌کنیم، جسم پرتاب شده به حرکت خود به صورت افقی ادامه نمی‌تواند، بلکه آهسته آهسته به طرف پایین کشانیده می‌شود، (شکل 9.6). که بالاخره به زمین تصادم می‌کند و باید گفت که حرکت جسم روی محور x یک‌نواخت دارای سرعت v_0 و به امتداد محور y تعجیلی می‌باشد، که سرعت آن در این محور رو به افزایش است.



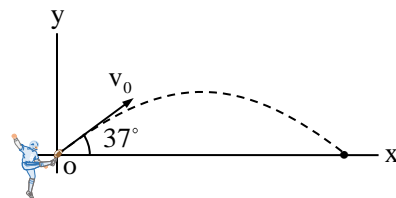
که معادلات حرکت، سرعت و مسیر حرکت آن طور ذیل نشان داده می‌توانیم.

$$x = v_0 t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_x = v_0$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = v_y = gt$$

اگر از معادله حرکت روی محور x مقدار زمان $t = \frac{x}{v_0}$ را در معادله حرکت روی محور y وضع گردد، معادله مسیر حرکت را چنین می‌توان نوشت.

$$y = \frac{g}{2v_0^2}x^2 = cx^2, \frac{g}{2v_0^2} = cost$$

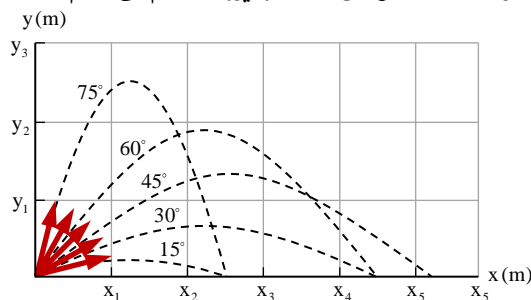


الف: زمان رسیدن جسم به نقطه اوج را به دست آورید؟
ب: بگویید که پس از چه زمانی توپ به زمین بر می‌گردد؟
حل:

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{10 \frac{m}{s} \cdot \sin 37^\circ}{9.8 \frac{m}{s^2}} \approx 0.6s$$

$$T = 2t = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} = \frac{2 \cdot 10 \frac{m}{s} \cdot \sin 37^\circ}{9.8 \frac{m}{s^2}} \approx 1.2s$$

مثال: گاليله در یکی از کتاب‌های خود نوشته است که برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از زاویه 45° بیش‌تر یا کم‌تر اند، بُردها مساوی اند، درستی این گفته را اثبات کنید.
حل: نظر به رابطه فوقانی شکل (زیر) را رسم می‌کنیم.



و اکنون بُرد پرتاب را داریم که:

$$\alpha_0 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \Rightarrow R_1 = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 30^\circ)}{g} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}$$

$$\alpha_0 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ \Rightarrow R_2 = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 60^\circ)}{g} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{2g}$$

حالا دریافتیم که $R_1 = R_2$ می‌باشد.

$$\Rightarrow gt = v_0 \sin \alpha_0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

و اکنون زمان کلی فقط با 2 چندشدن زمان رسیدن جسم به نقطه اوج به دست می‌آید، اگر زمان کلی را به T نشان بدهیم داریم که:

$$T = 2t = \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g}$$

می‌دانیم که فاصله افقی جسم پرتاب شده دارای زمان $2t$ است، پس با قرار دادن زمان کلی پرتاب را در معادله حرکت روی مسیر x فاصله افقی جسم پرتاب شده که به نام رنج (Rang) نیز یاد می‌کند، به دست می‌آید، بیش‌ترین بُرد پرتاب افقی تحت زاویه 45° صورت می‌گیرد.

$$x = v_0 \cos \alpha_0 t = v_0 \cos \alpha_0 \left(\frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g} \right) \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

و در آخر ارتفاع نقطه اوج را محاسبه می‌کنیم، وقتی که جسم به نقطه اوج می‌رسد $v_y = 0$ می‌گردد، پس داریم که:

$$v_y^2 - v_{0y}^2 = -2gh \Rightarrow 0 - v_{0y}^2 = -2gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g}$$

مثال: جسمی از بالای قله کوهی که به ارتفاع $180m$ از سطح زمین فاصله دارد با سرعت $50m/s$ به صورت افقی پرتاب می‌گردد، زمان رسیدن به نقطه سقوط آن و سرعت برخورد جسم به زمین را دریابید؟
حل:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 180m}{10m/s^2}} = \sqrt{36s^2} = 6sec$$

$$v_x = v_0 \cos t = 50 \frac{m}{s} \quad v_y = gt, \quad |v_x| = 10 \frac{m}{s^2} \cdot 6s = 60 \frac{m}{s}$$

$$v = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}, \quad |v| = \sqrt{50^2 + 60^2} \frac{m}{s} \approx 78.1m/s$$

مثال: یک بازیکن فوتبال، توپی را تحت زاویه 37° نسبت به افق با سرعت اولیه $10m/s$ ، شوت می‌کند، با فرض این که توپ در صفحه xoy حرکت کند و مقاومت هوا ناچیز باشد، (شکل زیر).