

راهنمای آموزشی فزیک صنف یازدهم (دور پنجم)

اهداف آموزشی:

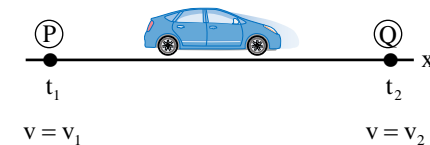
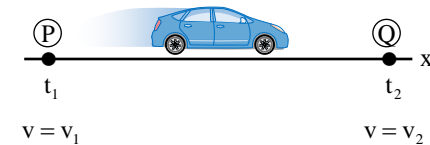
1_ دانش آموزان با مفاهیم اساسی موضوعات (تعیین یا شتاب، شتاب لحظه ای، گراف سرعت- زمان $(v-t)$ ، حرکت یکنواخت، حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت، معادله $(t-x)$ در حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت، سقوط آزاد (مفهوم ساحة جاذبه)) آشنایی کامل دریافت کند.

2_ دانش آموزان با موارد استفاده از شتاب و گراف ها آگاهی کامل کسب نمایند.

3_ دانش آموزان باید با اهمیت موضوعات هذا آشنا شده و بتوانند در زندگی روزمره شان تطبیق نمایند.

بخش اول شتاب و مفهوم آن

آیا می دانید که تعجیل یا شتاب چیست؟ زمانی که متحرک فواصل مساوی را در اوقات مساوی طی نماید به این نوع حرکت، حرکت تعجیلی یا شتابی می گویند. هنگامی که موتوری از حالت سکون شروع به حرکت می کند، سرعت سنج موتور نشان می دهد که سرعت آن به تدریج افزایش می یابد مانند شکل زیر و همیشه $v_2 > v_1$ بوده و شتاب آن مثبت است؛ و بر عکس در هنگام برک گرفتن، سرعت آن به تدریج کاهش می یابد مانند شکل زیر و همیشه $v_2 < v_1$ است و علامت الجبری شتاب منفی می باشد؛ در هر دو مورد فوق حرکت شتابی یا غیر یکنواخت اند؛ یا می توانیم بگوئیم که سرعت، آهنگ تغییر مکان با زمان را توصیف می کند شتاب، بیان گر آهنگ تغییر سرعت با زمان است؛ شتاب هم مثل سرعت یک کمیت وکتوری است و واحد آن در سیستم SI یا M.K.S برابر با m/s^2 می باشد؛ شتاب یا تعجیل را همان طور که می دانید به سمبول a نمایش داده می شود که از واژه (acceleration) گرفته شده که معنی همان شتاب یا تعجیل را می دهد.



شتاب در مقابل سرعت. باید دقت کنید که شتاب را با سرعت اشتباه نگیرید! سرعت بیان می کند که مکان جسم چگونه با زمان تغییر می کند و همین طور جسم در چه جهتی و چقدر سریع حرکت می کند؛ شتاب چگونگی تغییر سرعت با زمان را توصیف می کند و بیان می کند که تندی و جهت حرکت چگونه تغییر می کنند؛ شاید بهتر باشد این عبارت را به خاطر بسپارید که "شتاب نسبت به سرعت، مثل سرعت است نسبت به مکان". همین طور اگر خود را سوار بر جسم متحرک تصور کنید می تواند به شما کمک کند. اگر جسم رو به جلو شتاب بگیرد و تندی آن زیاد شود احساس فشار به عقب در چوکی خود به شما دست می دهد و اگر آن به سمت عقب باشد و سرعت آن کم شود حس فشار به پیش رو خواهید داشت؛ اگر سرعت ثابت باشد و شتابی نباشد حسی نخواهید داشت (در دروس بعدی خواهیم دانست).

گراف سرعت - زمان

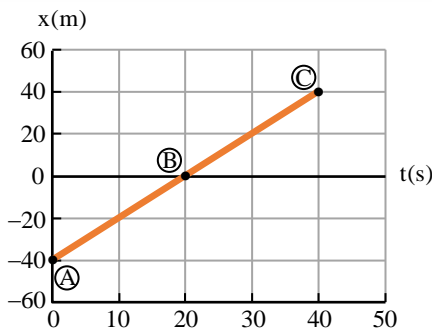
قبلاً گفتیم که برای گراف $(x-t)$ معادله حرکت مهم است؛ اما اکنون برای درک بیش تر گراف سرعت - زمان $(v-t)$ معادله سرعت مهم است؛ یا رابطه ریاضی بین سرعت جسم و زمان سپری شده یک جسم متحرک را معادله سرعت همان جسم یاد می کنیم که از مشتق اول حرکت این معادله حاصل می گردد؛ که به شکل $v_x = f(t)$ سرعت روی محور x ، $v_y = f(t)$ سرعت روی مسیر y و $v_z = f(t)$ سرعت روی مسیر z نوشته می گردد که بیشتر با v_x و v_y سروکار خواهیم داشت و سرعت جسم همیشه تابع زمان است؛ برای کشیدن این گراف محور زمان (t) را به شکل افقی و محور سرعت (v_x) را به شکل عمودی نشان می دهیم.

مثال (1): متحرکی با سرعت ثابت روی مسیر مستقیم بالای محور x در حال حرکت است؛ در لحظه $t_1 = 4.0 s$ از مبدأ در فاصله $10 m$ و در لحظه $t_2 = 8.0 s$ به فاصله $22 m$ از مبدأ قرار دارد؛ گراف سرعت - زمان $(v-t)$ جسم متحرک را رسم نمایید.

حل: می دانیم که اگر جسم سرعت ثابت داشته باشد؛ پس داریم که

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{22 m - 10 m}{8.0 s - 4.0 s} = \frac{12 m}{4 s} = 3 m/s$$

چون در حرکت یکنواخت، سرعت ثابت است؛ پس نظر به قاعده ریاضی، تابع ثابت بوده که معادله آن روی محور x به شکل $v_x = 3$ در سیستم بین المللی می توانیم بنویسیم؛ بناءً گراف سرعت - زمان شکل یک خط مستقیم دارای شیب صفر، را دارا اند و موازی با محور زمان یا عمود با محور سرعت است مانند شکل زیر.



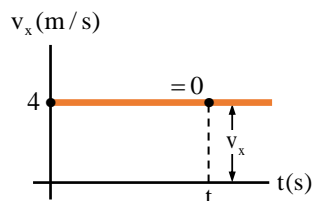
حل: در قدم نخست معادله حرکت جسم متحرک را دریافت می کنیم؛ چون جسم دارای حرکت یک نواخت اند؛ پس داریم که

$$v_x = \frac{x_C - x_B}{t_C - t_B} = \frac{40 \text{ m} - 0}{40 \text{ s} - 20 \text{ s}} = \frac{40 \text{ m}}{20 \text{ s}} \Rightarrow v_x = 2 \text{ m/s}$$

حال می دانیم که فاصله اولیه جسم متحرک $x_0 = -40 \text{ m}$ می باشد؛ پس در معادله حرکت یک نواخت $x = v_x t + x_0$ وضع می کنیم

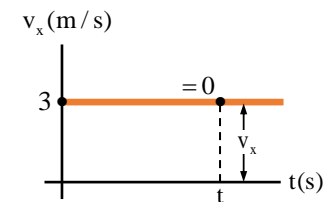
$$x = 2t - 40$$

پس از مشتق اول حرکت نظر به زمان، معادله سرعت $v_x = 2$ به دست می آید؛ که گراف سرعت - زمان $(v-t)$ ، شکل یک تابع ثابت را دارا است که با محور زمان موازی و بالای محور سرعت در نقطه $v_x = 2$ عمود است شکل زیر.



شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

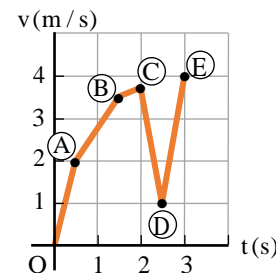
در شکل (زیر) موتوری را در نظر می گیریم که در امتداد محور x حرکت می کند؛ فرض کنید در لحظه t_1 ذره در نقطه P بوده و مؤلفه x سرعت لحظه‌ای آن v_{1x} باشد و در زمان بعدی t_2 در نقطه Q بوده و مؤلفه x سرعت آن v_{2x} باشد؛ بنابراین مؤلفه x سرعت در طی مقطع زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$



مثال (2): در نمودار زیر ذیل سرعت متحرکی که بر روی خط مستقیم در حرکت است؛ در چند لحظه زمانی مشخص شده است؛ گراف $(v-t)$ را رسم نمایید.

t (s)	0	0.5	1.5	2	2.5	3
v (m/s)	0	2	3.5	3.75	1	4

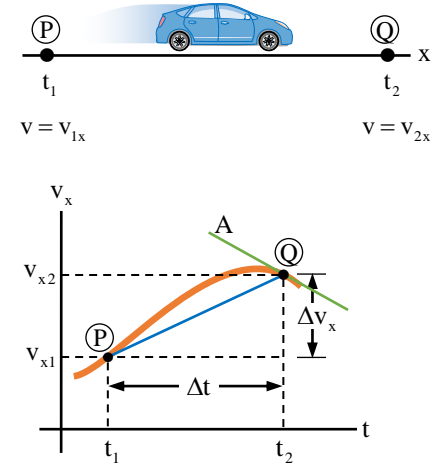
حل: در قدم نخست محورات زمان و سرعت را رسم می کنیم؛ و سپس جوهره‌های مرتب داده شده را توسط نقطه نشانی کرده و این نقاط را به هم وصل می دهیم که گراف سرعت - زمان رسم می گردد مانند (شکل زیر).



مثال (3): در شکل (زیر) گراف موقعیت - زمان داده شده است؛ گراف سرعت - زمان آن را رسم نمایید.



به اندازه $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ تغییر می کند؛ شتاب متوسط موتور را وقتی از P تا Q



حرکت می کند نسبت تغییرات سرعت و مقطع زمانی به دست می آید و به صورت یک کمیت وکتوری نشان داده می شود؛ که به نام میل خط نقاط PQ در گراف سرعت - زمان است که شتاب متوسط متحرک در این مقطع زمانی می نامند؛ این کمیت را با \bar{a}_x یا a_{av-x} نشان می دهیم؛ در نتیجه داریم که

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}$$

و همین قسم در تعجیل لحظه‌ی هنگامی که Δt بسیار کوچک و کوچک تر می شود نقطه P به نقطه Q نزدیک و نزدیک تر می شود و سرانجام خط A به نقطه Q بر گراف سرعت - زمان مماس می گردد. شیب یا میل خط مماس بر گراف در نقطه Q را شتاب لحظه‌ی جسم در لحظه t_2 می نامیم.

اکنون می توان شتاب لحظه‌ی را، مانند سرعت لحظه‌ی به طور دقیق تعریف کرد که: هنگامی که در شتاب متوسط Δt به سمت صفر تقرب می کند ($\Delta t \rightarrow 0$)، شتاب لحظه‌ی جسم را در لحظه t_2 به دست می دهد. به عبارت دیگر، لمبت شتاب متوسط است هنگامی که Δt به سمت صفر تقرب می کند؛ یا به مشتق اول سرعت نسبت به زمان شتاب لحظه‌ی را تعریف می نماید؛ شتاب لحظه‌ی را با a_x نمایش می دهیم. در نتیجه داریم

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

به بیان ریاضی، شتاب لحظه‌ی مشتق دوم حرکت نسبت به زمان شتاب لحظه‌ی را تعریف می کند؛ یعنی

$$a_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

از این به بعد برای اختصار شتاب لحظه‌ی را شتاب می نامیم.

شتاب ممکن است، قیمت‌های مثبت، منفی و یا صفر را به خود بگیرد؛ اگر $v_{2x} > v_{1x}$ باشد شتاب مثبت، اگر $v_{2x} < v_{1x}$ باشد شتاب منفی و شتاب وقتی صفر می گردد که $v_{2x} = v_{1x}$ گردد.

مثال (4): سرعت متحرکی روی محور x در لحظه $t_1 = 13$ s برابر به 10 m/s و در لحظه $t_2 = 23$ s برابر به 26 m/s می باشند؛ شتاب متوسط آن را بین دو لحظه t_1 و t_2 را دریابید.

حل: نظر به قاعده شتاب متوسط داریم که:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{(26 - 10) \text{ m/s}}{(23 - 13) \text{ s}} = 1.6 \text{ m/s}^2$$

مثال (5): روباتی در آغاز با سرعت 2.20 m/s در سالن ورودی یک خط مستقیم روی محور y حرکت می کند؛ سپس به مدت 0.20 s سرعتش 4.80 m/s افزایش می یابد؛ بزرگی یا اندازه شتاب متوسط آن را در این مقطع زمانی دریابید.

حل: نظر به فورمول شتاب داریم که

$$\bar{a}_y = \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta t} = \frac{(4.80 - 2.20) \text{ m/s}}{0.20 \text{ s}} = \frac{2.60 \text{ m/s}}{0.20 \text{ s}} = 13 \text{ m/s}^2$$

مثال (6): موتوری با سرعت 20.0 m/s روی محور x در حال حرکت است؛ ناگهان راننده برک می کند و در 4.2 s موتور را در یک خط مستقیم متوقف می کند؛ بزرگی شتاب متوسط آن چقدر است.

حل: توجه نمایید که سرعت نهایی صفر است در این جا سرعت اولیه بزرگ تر از سرعت نهایی است؛ پس $v_{2x} < v_{1x}$ می باشد بنابراین انتظار می رود که شتاب منفی باشد.

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t} = \frac{0 - 20.0 \text{ m/s}}{4.2 \text{ s}} = -4.76 \text{ m/s}^2$$

مثال (7): در شکل (8.25) سرعت یک توپ بیسبال روی خط مستقیم را در مقطع‌های زمانی نشان داده شده است؛ سرعت لحظه‌ی آن را در نقاط A، B و C را دریابید.

مثال (9): معادله حرکت جسم در SI به صورت $z = 2t^2 - 3t$ داده شده است؛ شتاب متحرک را در دو رقم با معنی بنویسید.

حل: می دانیم که مشتق دو فاصله نظر به زمان شتاب است و در تمام معادله های حرکت درجه 2 شتاب ثابت می باشد (در تمام مقطع زمانی با هم مساوی است).

$$z = 2t^2 - 3t \Rightarrow v_z = z' = 4t - 3$$

$$\Rightarrow a_z = v'_z = z'' = 4.0 \text{ m/s}^2$$

مثال (10): معادله مکان متحرک در SI به صورت $x = t^3 - 2t^2 + 5t$ داده شده است؛ شتاب متوسط آن را در لحظه های $t_1 = 2.0 \text{ s}$ و $t_2 = 3.0 \text{ s}$ چند m/s^2 است.

حل: برای دریافت شتاب متوسط آن نیاز به معادله سرعت آن داریم که پس از مشتق اول حرکت نظر به زمان به دست می آید یعنی:

$$x = t^3 - 2t^2 + 5t \Rightarrow v_x = x' = 3t^2 - 4t + 5$$

حالا در آن مقطع زمانی داده شده مقدار v_{1x} و v_{2x} را داریم

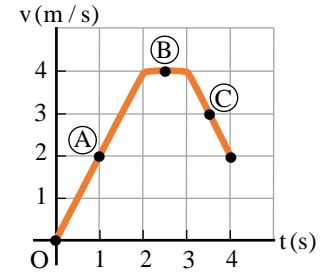
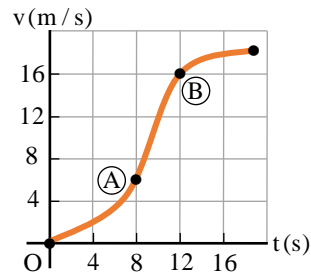
$$v_{2x} = 3(3.0)^2 - 4(3.0) + 5 \Rightarrow v_{2x} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_{1x} = 3(2.0)^2 - 4(2.0) + 5 \Rightarrow v_{1x} = 9.0 \text{ m/s}$$

اکنون نظر به فورمول شتاب متوسط داریم که:

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{(20 - 9.0) \text{ m/s}}{(3.0 - 2.0) \text{ s}} = 11 \text{ m/s}^2$$

مثال (11): در شکل زیر گراف $(v-t)$ یک متحرک را نشان می دهد؛ (الف) شتاب متوسط آن را در نقاط A و B در یابید. (ب) نو بگویند که شتاب لحظه ای در کدام دو نقطه بیش تر است.



حل: شتاب در نقطه A مساوی به میل خط مستقیم که نقاط $(0 \text{ s}, 0 \text{ m/s})$ و $(2.0 \text{ s}, 4.0 \text{ m/s})$ با هم وصل می دهد:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4.0 \text{ m/s} - 0}{2.0 \text{ s} - 0} = +2.0 \text{ m/s}^2$$

شتاب در نقطه B مقدار $\Delta v = 0$ می باشد؛ چون خط آن افقی است:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{4.0 \text{ m/s} - 4.0 \text{ m/s}}{3.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 0 \text{ m/s}^2$$

شتاب در نقطه C مساوی به میل خط مسقیم که از نقاط $(3.0 \text{ s}, 4.0 \text{ m/s})$ و $(4.0 \text{ s}, 2.0 \text{ m/s})$ ساخته شده است:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2.0 \text{ m/s} - 4.0 \text{ m/s}}{4.0 \text{ s} - 3.0 \text{ s}} = -2.0 \text{ m/s}^2$$

مثال (8): معادله سرعت متحرکی در سیستم SI روی مسیر مستقیم $v_x = 3t^2 + 4$ می باشد؛ شتاب متوسط متحرک را در سه ثانیه اول حرکت با دو رقم با ارزش به دست آورید.

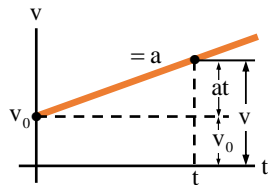
حل: سه ثانیه اول حرکت فاصله زمانی بین دو لحظه ای $t_1 = 0$ و $t_2 = 3.0 \text{ s}$ می باشد پس در قدم نخست مقدار v_{1x} و v_{2x} را داریم

$$v_{2x} = 3(3.0)^2 + 4 \Rightarrow v_{2x} = 31 \text{ m/s}$$

$$v_{1x} = 3(0)^2 + 4 \Rightarrow v_{1x} = 4.0 \text{ m/s}$$

اکنون نظر به قاعده سرعت متوسط چنین می نویسیم

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{(31 - 4.0) \text{ m/s}}{3.0 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{27 \text{ m/s}}{3.0 \text{ s}} = 9.0 \text{ m/s}^2$$



در حرکتی که دارای شتاب ثابت و سرعت جسم متحرک در حال کاهش یا افزود باشد؛ ما می توانیم سرعت متوسط را در یک مقطع زمانی نصف مجموع سرعت اولیه v_0 و سرعت نهایی v بنویسیم، داریم که

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

حال می توانیم برای دریافت معادله تغییر موقعیت، با داشتن سرعت متوسط (اگر $t_1 = 0$ و

$t_2 = t$ و همین قسم $x_1 = x_0$ و $x_2 = x$ تعویض گردد) چنین بنویسیم

$$\frac{x - x_0}{t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x}{t} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow \Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t$$

یا به شکل ساده آن با داشتن شتاب ثابت داریم که:

$$\Delta x = \frac{1}{2} t (v + v_0)$$

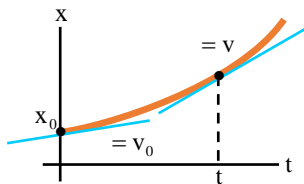
ما می توانیم این معادله را بیش تر انکشاف دهیم؛ چون $v = at + v_0$ می باشد پس می توانیم چنین بنویسیم

$$\Delta x = \frac{1}{2} (v_0 + at + v_0) t \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2} (2v_0 + at) t$$

پس از ساده سازی معادله تغییر موقعیت را چنین بیان می کنیم

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

این رابطه را می توانیم به شکل زیر توضیح خوب تر دهیم که جسم متحرک با تغییرات موقعیت $\Delta x = x - x_0$ اگر موقعیت نهایی جسم از مبدأ x باشد.



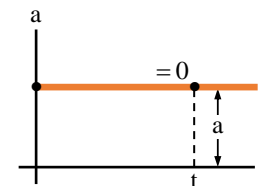
حل: الف) از فورمول شتاب متوسط $\bar{a} = \Delta v / \Delta t$ داریم که:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{(16 - 6) \text{ m/s}}{(12 - 8) \text{ s}} = \frac{10 \text{ m/s}}{4 \text{ s}} = 2.5 \text{ m/s}^2$$

ب) در گراف اگر خط مستقیم را در نقاط A و B به صورت مماس در گراف $(v - t)$ رسم نماییم واضح است که شیب یا میل آن نقطه A بیش تر از نقطه B می گردد؛ پس شتاب لحظه ای نقطه A بیش تر نقطه B می باشد؛ یعنی: $a_A > a_B$.

حرکت با شتاب ثابت

بعضی اوقات ضرورت بر این می افتد که شتاب جسم متحرک در راستای خط مستقیم ثابت باشد؛ این نوع حرکت مهم اند چون این نوع حرکات در طبیعت زیاد می باشد؛ مثلاً اگر یک جسم به صورت آزاد به طرف زمین سقوط نماید (اگر مقاومت هوا ناچیز باشد) گراف شتاب - زمان مقدار شتاب ثابت را نشان می دهد؛ مانند شکل (8.27).



وقتی که جسم متحرک دارای شتاب ثابت باشد؛ شتاب لحظه ای آن تمام نقاط داخل یک انتروال زمانی با شتاب متوسط آن در هر مقطع زمانی مساوی می باشد. در نتیجه سرعت جسم در حال کاهش و یا در حال افزود باشد مقدار یکسان در تمام مسیر حرکت می باشد. اکنون ما می توانیم بنویسیم $a = \bar{a}$ ، و داریم

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

اگر در رابطه بالا $t_1 = 0$ و t_2 را همین قسم به t ، همچنین $v_1 = v_0$ (سرعت اولیه در $t = 0$) و $v_2 = v$ نشان داده شود؛ شتاب جسم را چنین می نویسیم

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad \vee \quad v = v_0 + at$$

مقدار سرعت جسم متحرک در رابطه بالا بستگی به سرعت اولیه، شتاب و زمان دارد؛ برای خوب تر دانستن این موضوع در شکل دارای شتاب ثابت توضیح گردیده شده است.

$$x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$$

$$\Rightarrow x - (-3.0) = \frac{1}{2}(0.50)(6.0)^2 + (2.0)(6.0) \Rightarrow x = 18 \text{ m}$$

مثال (14): متحرک بدن سرعت اولیه با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند و پس از 10 ثانیه سرعت آن به 18 km/h می رسد؛ این متحرک پس از چند ثانیه سرعتش به 72 km/h می رسد.

حل: از رابطه $v = v_0 + at$ داریم که:

$$v = v_0 + at \Rightarrow \begin{cases} 18 \text{ km/h} = (10 \text{ s}) a & \dots \text{ (i)} \\ 72 \text{ km/h} = a \cdot t & \dots \text{ (ii)} \end{cases}$$

حال نسبت رابطه (i) و (ii) را دریافت می کنیم و داریم

$$\frac{18}{72} = \frac{(10 \text{ s}) a}{a \cdot t} \Rightarrow t = \frac{720}{18} \text{ s} \Rightarrow t = 40 \text{ s}$$

مثال (15): متحرکی با شتاب ثابت روی محور x در حرکت است؛ اگر سرعت این متحرک در مدت 15 دقیقه از 60 km/h به 140 km/h برسد؛ سرعت متحرک در این مدت چقدر فاصله را طی کرده است.

حل: می دانیم که $\Delta t = 15 \text{ min} = \frac{1}{4} \text{ h}$ می باشد؛ پس در معادله حرکت داریم

$$\Delta x = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) \Delta t = \left(\frac{140 + 60}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \Delta x = 25 \text{ km}$$

مثال (16): متحرک از حالت سکون با شتاب 10 m/s^2 شروع به حرکت می کند؛ مسافت پیموده شده در ثانیه چهارم چند متر است.

حل: چون متحرک از مبدأ شروع به حرکت نموده پس $v_0 = 0$ است؛ نظر به فورمول فاصله طی شده در ثانیه n-ام داریم که:

$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(2t_n - 1) + v_0 = \frac{1}{2} \cdot 10(2 \cdot 4 - 1) = 35 \text{ m}$$

اگر بخواهیم رابطه بین حرکت و سرعت را به دست آوریم؛ از رابطه $v = at + v_0$ زمان را بدست آورده و در این معادله $(x - t)$ دهیم، در نتیجه رابطه بین موقعیت و سرعت را بدست خواهیم آورد که مستقل از زمان می باشد؛ یعنی

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v + v_0) \left(\frac{v - v_0}{a} \right) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

پس از ساده سازی این رابطه با داشتن شتاب ثابت داریم که:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

این رابطه را به نام معادله سرعت نظر به تغییر فاصله نیز یاد می کند.

بعضی وقتها ضرورت بر این می افتد که فاصله طی شده در ثانیه n-ام را بدانیم که همان فاصله طی شده در جریان همان ثانیه است؛ اولاً فاصله طی شده پس از n ثانیه از مبدأ را دریافت نموده و بعداً این فاصله را از فاصله طی شده در ثانیه (n-1)-ام از مبدأ، تفریق می کنیم؛ فاصله طی شده در ثانیه n-ام به دست می آید. یعنی

$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(t_n^2 - t_{n-1}^2) + v_0 = \frac{1}{2}a(2t_n - 1) + v_0$$

مثال (12): متحرکی با شتاب ثابت 4.0 m/s^2 در مدت 2.0 ثانیه در یک مسیر مستقیم 20 m تغییر مکان می کند؛ سرعت اولیه آن چند متر در ثانیه است.

حل: با داشتن معادله حرکت داریم

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t \Rightarrow 20 = \frac{1}{2}(4.0)(2.0)^2 + v_0(2.0) \\ \Rightarrow (2.0)v_0 = 20 - 8.0 \Rightarrow v_0 = 6.0 \text{ m/s}$$

مثال (13): جسم با سرعت اولیه 2.0 m/s و شتاب ثابت 0.50 m/s^2 از مکان $x_0 - 3.0 \text{ m}$ روی محور x در جهت مثبت به حرکت آغاز می کند؛ این جسم پس از 6.0 ثانیه در چند متری مبدأ مکان خواهد بود.

حل: در معادله حرکت وضع می کنیم اگر $\Delta x = x - x_0$ باشد.

$$a_2 = \frac{10 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}}{10 \text{ min}} = 0$$

$$a_3 = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 10 \text{ m/s}}{5.0 \text{ s}} = \frac{-10 \text{ m/s}}{5.0 \text{ s}} = -2.0 \text{ m/s}^2$$

(الف) برای دریافت مقدار فاصله طی شده، مانند شتاب (مسیر حرکت جسم را در سه بخش تقسیم می کنیم). اول با شتاب ثابت (مثبت) از حالت سکون شروع به حرکت نموده، در مرحله دوم با سرعت ثابت (شتاب صفر) فاصله ی را طی می کند؛ و در آخر این که با شتاب ثابت (منفی) جسم توقف می کند؛ که این سه مسیر طی شده ی جسم را قرار زیر می نویسیم.

$$x_1 = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} (0.50 \text{ m/s})(20 \text{ s})^2 = 1.0 \times 10^2 \text{ m}$$

$$x_2 = vt = (10 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 1.0 \times 10^2 \text{ m}$$

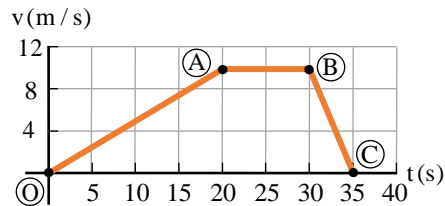
$$x_3 = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = (10 \text{ m/s})(5 \text{ s}) + \frac{1}{2} (-2.0 \text{ m/s})(5.0 \text{ s})$$

$$\Rightarrow x_3 = 50 \text{ m} - 5.0 \text{ m} = 45 \text{ m}$$

حال با یک جا نمودن تمام فاصله های به دست آمده، مسیر کل جسم متحرک بر روی خط مستقیم به دست می آید

$$\sum x = x_1 + x_2 + x_3 = (1.0 \times 10^2 \text{ m}) + (1.0 \times 10^2 \text{ m}) + (45 \text{ m}) = 245 \text{ m}$$

(ب) در گراف $(v-t)$ دیده می شود؛ خطی که از نقاط O و A ساخته شده دارای میل مثبت و شتاب آن نیز مثبت و خط AB دارای شیب صفر (شتاب صفر) و خط BC دارای شیب منفی (شتاب منفی) می باشد؛ شکل (زیر).



مثال (20): در شکل (زیر) گراف $(v-t)$ متحرکی در 35 ثانیه نشان داده شده است؛ (الف) شتاب هر یک از مرحله های AB، BC، CD و DE چقدر است، (ب) مقدار فاصله طی شده ی جسم متحرک را در این طول مسیر دریابید.

مثال (17): اگر معادله حرکت جسم در SI به صورت $x = -2t^2 + 8t$ باشد؛ این جسم پس از طی چند متر متوقف خواهد شد.

حل: می دانیم که جسم وقتی متوقف می گردد که $v = 0$ گردد یعنی

$$v_{(t)} = x'_{(t)} \Rightarrow v = at + v_0 = -4t + 8 \Rightarrow t = 2.0 \text{ s}$$

دریافت نمودیم که جسم متحرک پس از 2.0 s متوقف می گردد؛ پس فاصله که در این مدت زمان طی نموده است داریم که

$$x = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t = \frac{1}{2} (-4)(2.0)^2 + 8(2.0) = 8.0 \text{ m}$$

جسم پس از $x = 8.0 \text{ m}$ متوقف می گردد.

مثال (18): موتوری با سرعت 20 m/s در یک خط راست در حال حرکت است و ناگهان مانعی را در مقابل خود می بیند؛ که در همان لحظه با شتاب -5 m/s^2 برک می کند؛ معلوم کنید متحرک پس از چند ثانیه می ایستد.

حل: دیده می شود که $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ، $v = 0$ و $a = -5.0 \text{ m/s}^2$ می باشد؛ در قدم نخست فاصله که این جسم طی می کند را دریافت می کنیم

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \Rightarrow 0 = (20)^2 + 2(-5.0)x \Rightarrow x = 40 \text{ m}$$

و حالا زمان توقف را از رابطه $v = v_0 + at$ محاسبه می کنیم

$$0 = v_0 + at \Rightarrow (-20) = (-5.0)t \Rightarrow t = 4.0 \text{ s}$$

مثال (19): موتوری در یک مسیر مستقیم با شتاب ثابت شروع به حرکت می کند و پس از 20 ثانیه سرعتش به 36 km/h می رسد؛ سپس با همین سرعت به مدت 10 ثانیه به حرکتش ادامه می دهد و پس از آن با شتاب ثابت برک می کند و بعد به مدت 5.0 ثانیه متوقف می شود؛ (الف) مقدار فاصله طی شده در جریان همین حرکت چه مقدار است. (ب) گراف $(v-t)$ از لحظه شروع حرکت تا لحظه توقف موتور را رسم کنید.

حل: در قدم اول تمام دیتاهای داده شده را در یک سیستم تبدیل می کنیم؛ و می دانیم که $36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$ است و بعد شتاب جسم متحرک را در تمام نقاط مسیر باید بدانیم

$$a_1 = \frac{v - v_0}{t} = \frac{10 \text{ m/s} - 0}{20 \text{ s}} = +0.50 \text{ m/s}^2$$

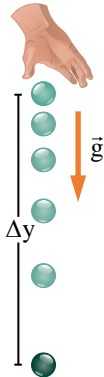
$$x_{DE} = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = (0)(5.0) + \frac{1}{2}(2.4)(5.0)^2 = 30 \text{ m}$$

در قدم آخر تمام فاصله‌های بدست آمده را با هم جمع می‌کنیم

$$\sum x = x_{AB} + x_{BC} + x_{CD} + x_{DE} = 220 \text{ m}$$

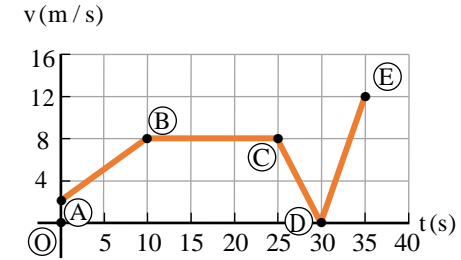
سقوط آزاد اجسام

سقوط آزاد نمونه طبیعی حرکت با شتاب ثابت است؛ در این نوع حرکت، مسیر حرکت مستقیم است و در هنگام سقوط یکنه قوه وارده بر جسم همانا وزن آن است؛ اگر یک سکه و یک ورق کاغذ را از ارتفاع معین رها کنیم، به طور هم‌زمان به زمین نمی‌رسند، چون مقاومت هوا مانع بالای ورق کاغذ بیش‌تر می‌باشد؛ اما اگر همین تجربه را در یک محوطه خلا انجام دهیم، سکه و ورق کاغذ هم‌زمان به زمین می‌رسند؛ مثلاً سقوط یک جسم در خلا و یا سقوط گلوله کوچک فلزی در هوا را (تقریب مناسب) می‌توان فرض کرد؛ شکل (زیر) حرکت یک ساچمه را هنگام سقوط آزاد نشان می‌دهد که در وقفه‌های زمانی متوالی $\Delta t = 1/15 \text{ s}$ از آن عکس‌برداری شده است.



بنابراین اگر از مقاومت هوا صرف نظر کنیم، تمام اجسام در نزدیکی سطح زمین تقریباً با شتاب ثابت سقوط می‌کند، که این همان شتاب جاذبه زمین است با حرف g نمایش داده می‌شود؛ حرکت مستقیم‌الخط با شتاب g را سقوط آزاد می‌نامند، که جهت این شتاب همیشه به طرف پایین (مرکز زمین) است؛ اندازه شتاب g برحسب عرض‌البلد جغرافیایی، اندکی تغییر می‌کند و با افزایش ارتفاع از سطح زمین کاهش می‌یابد.

اندازه این شتاب در نزدیکی سطح زمین نزدیک به 9.80 m/s^2 است؛ اما گاهی برای سهولت محاسبه $g = 10.0 \text{ m/s}^2$ فرض می‌شود؛ همان معادله‌های که با شتاب ثابت مطالعه گردیدند، عین فورمول در سقوط آزاد نیز می‌باشند فقط با $v_0 = 0$ و $x_0 = 0$ در یک حالت خاص در نظر گرفته می‌شوند، در سقوط آزاد تغییر مکان در امتداد قائم است، و موقعیت متحرک به طور معمول با y نشان داده می‌شود و مبدأ حرکت نقطه‌ای است که سقوط از آن شروع می‌شود؛ اگر جهت مثبت را به طرف پایین



حل: اولاً نوعیت حرکت را در تمام مرحله‌ها مشخص می‌کنیم که جسم با سرعت اولیه 2.0 m/s شروع به حرکت نموده و با شتاب ثابت (مثبت) در ظرف 10 ثانیه تا به نقطه B سرعت خویش را به 8.0 m/s می‌رساند؛ سپس حرکت یک‌نواخت به مدت 15 ثانیه را اختیار می‌کند که شتاب آن صفر است از نقطه B تا C می‌باشد؛ بعد از پس از گذشت 25 ثانیه از مبدأ زمان، متحرک حرکت کندشونده (شتاب منفی) داشته سرعت خود را کاهش می‌دهد، و در مدت 5.0 ثانیه به صفر می‌رساند؛ و در آخر دوباره به مدت 5.0 ثانیه سرعت خویش را به 12 m/s می‌رساند، که در این حالت حرکت شتابی (مثبت) دارد.

(الف) اگر بخواهیم که شتاب هریک از مرحله‌ها را دریافت نماییم کافیست که میل آن خطوط را بدانیم که نمایانگر شتاب می‌باشد داریم که

$$a_{AB} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{(8.0 - 2.0) \text{ m/s}}{(10 - 0) \text{ s}} = +0.60 \text{ m/s}^2$$

$$a_{BC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{(8.0 - 8.0) \text{ m/s}}{(25 - 10) \text{ s}} = 0$$

$$a_{CD} = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = \frac{(0 - 8.0) \text{ m/s}}{(30 - 25) \text{ s}} = -1.6 \text{ m/s}^2$$

$$a_{DE} = \frac{v_E - v_D}{t_E - t_D} = \frac{(12 - 0) \text{ m/s}}{(35 - 30) \text{ s}} = +2.4 \text{ m/s}^2$$

(ب) باز هم مقدار فاصله طی شده بسته‌گی به نوعیت حرکت دارد در قدم اول فاصله هر یک مرحله‌های داده شده را جداگانه دریافت می‌کنیم؛ داریم

$$x_{AB} = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = (2.0)(10) + \frac{1}{2}(0.60)(10)^2 = 50 \text{ m}$$

$$x_{BC} = vt = (8.0 \text{ m/s})(15 \text{ s}) = 120 \text{ m}$$

$$x_{CD} = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = (8.0)(5.0) + \frac{1}{2}(-1.6)(5.0)^2 = 20 \text{ m}$$

مثال (24): عمقی چاهی 3.20×10^2 m است، سنگی را با کدام سرعت اولیه به چاه بی اندازیم، تا صدای برخورد سنگ را به قاعده چاه پس از 5.00 s بشنویم؛ در صورتی که $g = 10.0$ m/s²، سرعت صوت 3.20×10^2 m/s و مقاومت هوا ناچیز باشد.

حل: مدت زمانی که سنگ به ته چاه می رسد با t_1 و مدت زمانی را که صدای برخورد آن از ته چاه به گوش شنونده برسد با t_2 می دهیم؛ با توجه به این که صوت با سرعت 3.20×10^2 m/s عمق 3.20×10^2 m/s را در مدت 1.00 s طی می کند یعنی

$y = v_y t_2 \Rightarrow 3.20 \times 10^2 \frac{m}{s} = (3.20 \times 10^2 \frac{m}{s}) t_2 \Rightarrow t_2 = 1.00$ s پس زمان t_1 قرار زیر است

$$5.00 \text{ s} = t_1 + 1.00 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 4.00 \text{ s}$$

اکنون می توانیم سرعت اولیه را قرار رابطه های زیر محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{1}{2} g t_1^2 + v_0 t_1 \\ \Rightarrow 3.20 \times 10^2 \text{ m} &= \frac{1}{2} (10.0 \frac{m}{s^2}) (4.00 \text{ s})^2 + v_0 (4.00 \text{ s}) \\ \Rightarrow 3.20 \times 10^2 \text{ m} &= 80.0 \text{ m} + v_0 (4.00 \text{ s}) \Rightarrow v_0 = 60.0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

مثال (25): دو گلوله به فاصله زمانی 1.0 ثانیه از بالای برجی به ارتفاع y در شرایط خلا رها می شود اگر بیشترین فاصله بین آنها در طول حرکت 45 m باشد؛ ارتفاع این برج چند متر می باشد.

حل: بیشترین فاصله بین دو گلوله زمانی رخ می دهد که یکی از آنها به مقصد رسیده باشد؛ لذا در ابتدا معادله تغییر مکان هر یک را نوشته، سپس تفاوت آنها را برابر 45 m قرار می دهیم؛ اگر زمان حرکت گلوله اول t_1 باشد، زمان دومی $t_2 = t_1 - 1.0$ s خواهد بود؛ لذا داریم که

$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \\ \Delta y_2 = \frac{1}{2} g (t_1 - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \Delta y_1 - \Delta y_2 = \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g (t_1 - 1)^2$$

اکنون با انکشاف رابطه $(t_1 - 1)^2$ داریم که

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g t_1^2 - \frac{1}{2} g t_1^2 + g t_1 - \frac{1}{2} g &= 45 \text{ m} \Rightarrow 10 t_1 = 50 \Rightarrow t_1 = 5.0 \text{ s} \\ \Rightarrow \Delta y &= \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow \Delta y = \frac{1}{2} (9.8 \frac{m}{s^2}) (5.0 \text{ s})^2 = 122.5 \text{ m} \end{aligned}$$

اختیار کنیم، پس در معادله های حرکت $\Delta y = v_{0y} t + \frac{1}{2} g t^2$ و سرعت $v_y = g t + v_{0y}$ اگر $v_{0y} = 0$ گردد پس

$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2 \wedge t = \sqrt{\frac{2 \Delta y}{g}}$$

$$v_y = g t \wedge t = \sqrt{2 g \Delta y}$$

مثال (21): اگر جسم از ارتفاع 4.9 m سقوط آزاد نماید؛ معلوم نمایید که پس از چند ثانیه به زمین می رسد.

حل: جسم وقتی که سقوط آزاد نماید بدون سرعت اولیه ($v_0 = 0$) می باشد؛ پس معادله حرکت $\Delta y = \frac{1}{2} g t^2$ بوده و زمانی که این جسم در جهت قایم می انجامد قرار ذیل محاسبه می کنیم

$$\Delta y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow 4.9 \text{ m} = \frac{1}{2} (9.8 \text{ m/s}^2) \cdot t^2 \Rightarrow t = 1.0 \text{ s}$$

مثال (22): اگر جسمی بدون سرعت اولیه به مدت 3.0 ثانیه در شرایط خلا سقوط کند، در ثانیه سوم تقریباً چند متر فاصله را می پیماید.

حل: فاصله که جسم در ثانیه سوم طی می کند، را داریم

$$\Delta y = \frac{1}{2} g (2t_n - 1) = \frac{9.8}{2} [2(3.0) - 1] = 24.5 \text{ m}$$

مثال (23): جسمی را در شرایط خلا از یک بلندی رها می کنیم، طوری که با سرعت 30.0 m/s به زمین برخورد می کند؛ ارتفاع بلندی چند متر است، در صورتی که $g = 10.0$ m/s² فرض گردد.

حل: با توجه بر این که جسم بدون سرعت اولیه است داریم که

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2g \Delta y \Rightarrow (30.0 \frac{m}{s})^2 - 0^2 = 2(10.0 \frac{m}{s^2}) \cdot \Delta y \\ \Rightarrow 9.00 \times 10^2 \frac{m^2}{s^2} &= (20.0 \frac{m}{s^2}) \cdot \Delta y \Rightarrow \Delta y = 45.0 \text{ m} \end{aligned}$$

مثال (25): از ارتفاع 80.0 متری سطح زمین گلوله‌ی با سرعت اولیه $v_0 = 30.0 \text{ m/s}$ در امتداد قائم به سمت پایین پرتاب می‌شود و هم‌زمان گلوله‌ی دیگری از ارتفاع h بدون سرعت اولیه سقوط می‌کند هر دو گلوله هم‌زمان به زمین می‌رسند؛ اگر $g = 10.0 \text{ m/s}^2$ و مقاومت هوا ناچیز باشد، h چند متر است.

حل: چون دو گلوله هم‌زمان پرتاب شده و هم‌زمان به زمین رسیده اند مدت زمان حرکت آن‌ها با هم یکسان اند؛ از این رو زمان گلوله اول را محاسبه کرده داریم که

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t \Rightarrow 80.0 \text{ m} = \frac{1}{2}(10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})t^2 + (30.0 \frac{\text{m}}{\text{s}})t$$

$$\Rightarrow t = 2.00 \text{ s}$$

حال گذاشتن زمان را در گلوله دوم که سقوط آزاد نموده است داریم

$$\Delta y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(2.00 \text{ s})^2 = 20.0 \text{ m}$$

مثال (26): از نقطه به ارتفاع 20.0 m از سطح زمین گلوله‌ی در شرایط خلا بدون سرعت اولیه رها می‌شود؛ پس از 1.00 ثانیه گلوله دیگری از همان نقطه با سرعت اولیه v_0 پرتاب می‌شود؛ هر دو گلوله با هم به زمین می‌رسند؛ سرعت اولیه گلوله‌ی دوم چند متر بر ثانیه است.

حل: اگر زمان حرکت گلوله اول t_1 باشد، زمان حرکت گلوله دوم $t_2 = t_1 - 1.00 \text{ s}$ است؛ لذا معادله تغییر مکان هر یک را نوشته پس از آن سرعت اولیه گلوله دوم را به دست می‌آوریم داریم که

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t \Rightarrow 20.0 \text{ m} = \frac{1}{2}(10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})t_1^2 + 0 \cdot t_1$$

$$\Rightarrow 20.0 \text{ m} = (5.00 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})t_1^2 \Rightarrow t_1 = 2.00 \text{ s}$$

و زمان حرکت گلوله دوم در این حالت 1.00 ثانیه است یعنی

$$t_2 = t_1 - 1.00 \text{ s} = 2.00 \text{ s} - 1.00 \text{ s} = 1.00 \text{ s}$$

برای تعیین سرعت اولیه گلوله داریم

$$\Delta y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t$$

$$\Rightarrow 20.0 \text{ m} = \frac{1}{2}(10.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(1.00 \text{ s})^2 + v_0(1.00 \text{ s})$$

$$\Rightarrow 20.0 \text{ m} = 5.00 \text{ m} + v_0 \Rightarrow v_0 = 15.0 \text{ m/s}$$