

مواد درسی با توجه به سطح ۲ OFQUAL بریتانیا برای مضمون ریاضی تنظیم گردیده است. محتویات آن قرار ذیل است.

شماره	فصل ها (Units)	محتویات
1	اعداد و عملیه های اساسی	۱/۱ - عملیه های اساسی بالای اعداد کامل، کسری و اعشاری در زمینه های روزمره. ۱/۲ - تخمین گرد و کردن (رواندا) اعداد برای حل مسائل واقعی زندگی. ۱/۳ - به کار بردن و استفاده از نسبت های ساده برای مقایسه کمیت ها در کارهای عملی.
2	نسبت، نسبت های مساوی و فیصدی	۲/۱ - محاسبه افزایش و کاهش فیصدی در زمینه های مالی و روزمره. ۲/۲ - حل مسائل مربوط به مفاد، زیان و تخفیف. ۲/۳ - استفاده از تناسب مستقیم برای تغییر مقیاس در دستوره های آشپزی، نقشه ها یا تبدیل واحدها.
3	اشکال هندسی و اندازه گیری	۳/۱ - شناسایی و توصیف ویژگی های شکل های دو بعدی رایج. ۳/۲ - محاسبه محیط و مساحت مربع ها، مستطیل ها، مثلث ها و ذوزنقه ها. ۳/۳ - محاسبه حجم و مساحت سطح منشورها و استوانه ها. ۳/۴ - استفاده و تبدیل بین واحدهای استاندارد اندازه گیری (طول، مساحت، حجم، کتله).
4	زاویه ها، مثلث ها و قضیه فیثاغورث	۴/۱ - شناسایی و طبقه بندی انواع مثلث ها و ویژگی های زاویه ای آن ها. ۴/۲ - به کار بردن قضیه فیثاغورث فقط برای مثلث های قائم الزاویه. ۴/۳ - حل مسائل واقعی زندگی که شامل مثلث های قائم الزاویه می شود (مانند ارتفاع، فاصله).
5	گراف ها، مختصات و معادلات خطی	۵/۱ - نقطه گذاری و نمایش نقاط روی سیستم مختصات کارتزین. ۵/۲ - تشخیص و ساختن معادله خط مستقیم از روی میل و نقطه تقاطع. ۵/۳ - حل معادلات خطی و نشان دادن حل ها به صورت گرافیکی.
6	مدیریت اطلاعات و احصایه (بخش اول)	۶/۱ - جمع آوری و تنظیم منظم اطلاعات خام. ۶/۲ - ساختن جدول های کثرت (فریکونسی) و مجموعه های اطلاعات گروه بندی شده. ۶/۳ - نمایش اطلاعات با استفاده از گراف های ستونی، خطی و دایره ای. ۶/۴ - محاسبه و تفسیر معیارهای میانگین و میانه.
7	مدیریت اطلاعات و احصایه (بخش دوم)	۷/۱ - شناسایی شاخص های پراکندگی با استفاده از دامنه به عنوان روش اصلی. ۷/۲ - درک مفهوم تغییرپذیری در اطلاعات از طریق مقایسه ساده بصری. ۷/۳ - نشان دادن اینکه چگونه اطلاعات می توانند متفاوت باشند حتی وقتی میانگین ها یکسان است.
8	تعارف احتمال	۸/۱ - توصیف مثال های روزمره احتمال با استفاده از زیان ساده (محتمل، غیرمحتمل، قطعی). ۸/۲ - محاسبه احتمال رویدادهای منفرد با استفاده از کسرها، اعشار یا درصد ها. ۸/۳ - ساختن نمودار درختی برای آزمایش های بسیار ساده دو مرحله ای (مانند دو بار پرتاب یک سکه)

فصل اول

اعداد و عملیه های اساسی

۱/۱ - عملیه های اساسی بالای اعداد کامل، کسری و اعشاری در زمینه های روزمره.

تعريفات:

عدد (Number): مفکوره ذهنی است که برای پیمایش و اندازه گیری استفاده میشود.

رقم (Digit): نشانه هایی اند که برای ارایه و ترتیب نمودن اعداد از آنها استفاده می شود. در سیستم هندی و عربیک ده رقم اساسی (0 الی 9) وجود دارد.

کمیت (Quantity): هر چیزی که قابل اندازه گیری باشد و قابلیت افزایش و یا کاهش را داشته باشد، کمیت نامیده می شود. مانند: موترها، درخت ها و غیره.

واحد (Unit): مقدار معین از یک کمیت را واحد گویند. مانند واحد طول (m) و غیره.

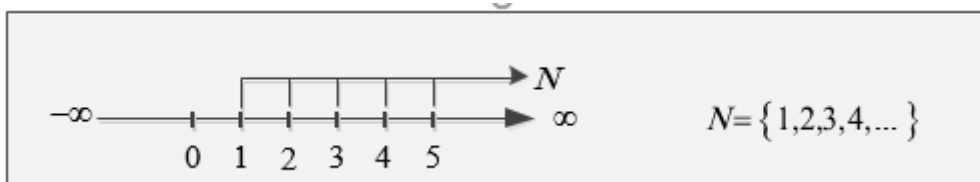
اعداد کامل (Whole Number):

اعداد کامل به مجموعه ای از اعداد گفته می شود که شامل صفر و تمام اعداد مثبت هستند که جزء کسری یا اعشاری ندارند.

به زبان ساده، اعداد کامل همان اعداد طبیعی¹ (اعدادی هستند که ما برای شمردن چیزها از آنها استفاده می کنیم)، به اضافه صفر.

مجموعه اعداد کامل عبارتند از:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

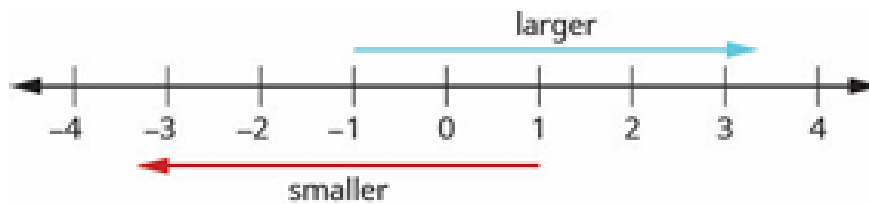


اعداد تام (Integers Number)

به اعدادی گفته می شود که تعداد کامل از اشیا را نشان میدهد و اعداد کامل مثبت و منفی به شمول صفر را در بر دارد.

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

¹ Natural or Counting Number



اعداد ناطق یا کسری (Rational Number):

شامل

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in Z \wedge b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

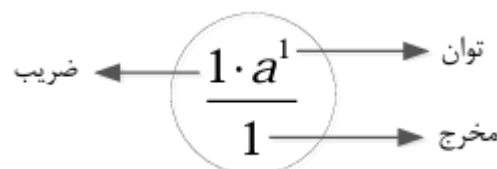
طوری‌که

مثالها:

1) $1.5 = \frac{15}{10}$, 2) $2.07 = \frac{207}{100}$

3) $0.01 = \frac{1}{1000}$, 4) 1.008

نکته: هر عدد در حالت عادی دارای سه مشخصه ذیل می باشد:



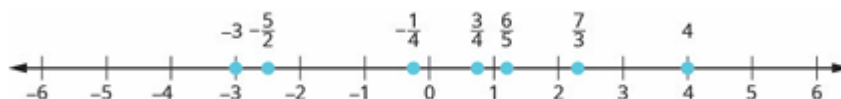
از نکته فوق نتیجه می‌گردد که اعداد طبیعی، اعداد کامل و اعداد تام شامل اعداد ناطق می‌باشد که مخرج آن یک است.

اعداد غیرناطق (Irrational Number): اعداد می‌باشد که به شکل کسری ارائه شده نمی‌تواند.

$$\dot{Q} = \{ \pi = 3.1428 \dots, e = 2.71 \dots, \sqrt{2} = 1.414 \dots, \dots \}$$

اعداد حقیقی (Real Number): اتحاد ست‌های اعداد ناطق و غیرناطق ست اعداد حقیقی را تشکیل می‌دهند.

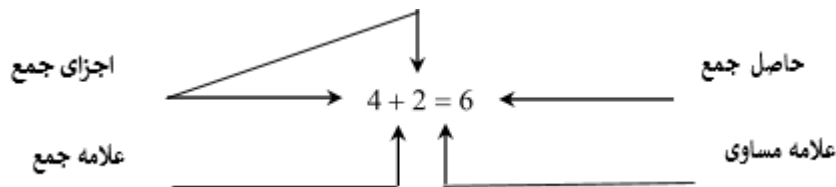
$$IR = Q \cup \dot{Q}$$



محور اعداد حقیقی

عملیه‌های اساسی (Fundamental Operations)

الف) عملیه جمع (Addition Operation) ۱ یکجا نمودن چند عدد و یا یکجا نمودن اشیا هم جنس را که دارای واحد مشترک باشند، عملیه جمع گویند.



مثال 2: اعداد ذیل را جمع نمایید.

20065	9874	594	1332	245
+ 30986	+ 1126	+ 266	+ 9770	+ 356
51051	11000	860	11102	601

خواص و قوانین عملیه جمع

1. عنصر خنثی (Identity Element): صفر (0) عنصر خنثی یا عنصر عینیت عملیه جمع می باشد.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$1) 5 + 0 = 5 \quad 2) \frac{2}{5} + 0 = \frac{2}{5} \quad 3) \sqrt{7} + 0 = \sqrt{7} \quad 4) -6 + 0 = -6$$

2. خاصیت تبدیلی (Commutative Property): اگر جاهای اجزای جمعی تبدیل گردد، در حاصل جمع تغییر نمی آید.

$$A + B = B + A$$

$$1) \left. \begin{matrix} 3 + 6 = 9 \\ 6 + 3 = 9 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 9 = 9 \quad 2) 7 + 8 = 8 + 7 \Rightarrow 15 = 15$$

3. خاصیت اتحادی (Associative Property): اگر بیشتر از دو عدد در حالت جمع قرار داشته باشد می توان ترتیب جمع را تغییر داد طوری که به طور دلخواه هر دو عدد را جمع کرده و حاصل آنها را با عدد بعدی جمع نماییم.

$$A + (B + C) = (A + B) + C = (A + C) + B$$

$$3 + (2 + 4) = (3 + 2) + 4 = (3 + 4) + 2 \Rightarrow 3 + 6 = 5 + 4 = 7 + 2 \Rightarrow 9 = 9 = 9$$

ب) عملیه تفریق (Subtraction): تفریق در لغت به معنی دریافت فرق یا تفاوت بین دو مقدار می باشد، و در اصطلاح علم ریاضی دریافت فرق یا تفاوت بین دو مقدار هم جنس را تفریق می نامند و یا به عبارت دیگر کم کردن اشیای هم جنس را از یکدیگر بنام تفریق یاد می کنند. عملیه تفریق مانند عملیه جمع به روش های سطری، ستونی اجرا می گردد.

444444	83544	48876	101201	238
- 321321	- 43998	- 47765	- 9561	- 124
123123	39546	41111	91640	114

مثال 1: اگر احمد 2840 افغانی و محمود 1735 افغانی داشته باشد، احمد چند افغانی از محمود زیاد تر دارد؟

$$\text{حل: } 2840 - 1735 = 1105$$

احمد 1105 افغانی زیادتر نسبت به محمود دارد یعنی تفاوت پول احمد و محمود 1105 افغانی است.

یادداشت: خواص که در عملیه جمع بیان گردید در عملیه تفریق برقرار نمی باشد.

ج) عملیه ضرب (Multiplication): ضرب در لغت به معنای زدن و ضربه وارد کردن است اما در اصطلاح علم ریاضی کوتاه ترین و آسان ترین روش جمع کردن اعداد مساوی را ضرب می نامند.

مثال: اگر $3 + 3 + 3 + 3 = 12$ باشد، می‌توانیم بنویسیم: $3 \times 4 = 12$

مثال 2:

• • • • •

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet = 3 \times 5 = 15$$

• • • • • (ستون 5 و سطر 3)

یادداشت: ضرب توسط علامه های $()$, $\times$, $\cdot$ نشان داده میشود.

خواص عملیه ضرب (Properties of Multiplication):

- عنصر خنثی: عنصر خنثی یا عینیت عملیه ضرب یک (1) است.
 $A \times 1 = 1 \times A = A$
- خاصیت تبدیلی: اگر در عملیه ضرب جاهای ضرب و مضرب فیه را (اجزای ضربی) را تغییر دهیم د حاصل ضرب تغییر ایجاد نمی‌گردد.
 $A \times B = B \times A$
- خاصیت اتحادی: اگر سه عدد در حالت ضرب باشد آنگاه:
 $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = (A \times C) \times B$
- خاصیت توزیعی (Distributive Property):
 $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ یا $A \times B + A \times C = A(B + C)$ (فکتور گیری)

مثال:

$$2 \cdot (4 \cdot 5) = (2 \cdot 4) \cdot 5 \Rightarrow 2 \cdot 20 = 8 \cdot 5 \Rightarrow 40 = 40$$

عملیه تقسیم (Division): تقسیم در لغت به معنای بخش بخش کردن و حصه حصه کردن بوده و در اصطلاح علم ریاضی تقسیم کردن یا بخش بخش کردن یک شی را به حصه های مساوی به نام تقسیم یاد می‌کند.

علامه های تقسیم: $a \div b$, $\frac{a}{b}$, a/b

- هر عدد تقسیم بر خودش برابر است با یک: $\frac{A}{A} = 1$, $\frac{5}{5} = 1$
- هر عدد تقسیم بر یک برابر است با خود همان عدد. از این جهت است که عدد یک را در تقسیم عنصر عینیت می‌نامند: $\frac{A}{1} = A$, $\frac{10}{1} = 10$
- صفر تقسیم بر هر عدد برابر است با صفر: $\frac{0}{A} = 0$, $\frac{0}{100} = 0$
- نتیجه تقسیم عدد بر صفر مبهم است: $\frac{A}{0} = \infty$, $\frac{1}{0} = \infty$

مسائل تطبیقی در زندگی روزمره:

مسئله 1: یک شرکت در سال گذشته 2,850,000 افغانی فروش داشت. امسال فروش آن نسبت به سال گذشته 1,250,000 افغانی افزایش یافته است. مجموع فروش این شرکت در دو سال چند افغانی است؟

حل مرحله به مرحله:

$$2,850,000 + 1,250,000 = 4,100,000 \text{ فروش امسال}$$

$$2,850,000 + 4,100,000 = 6,950,000 \text{ مجموع دو سال}$$

مسئله 2: بودجه سالانه یک وزارت 15,750,000 افغانی تعیین شده است. اگر تا کنون 8,490,000 افغانی آن مصرف شده باشد، چند افغانی باقی مانده است؟

حل مرحله به مرحله:

$$15,750,000 - 8,490,000 = 7,260,000$$

مسئله 3: یک فابریکه در هر روز 2,450 عدد قمیه لباس تولید می کند. اگر فابریکه 280 روز در سال کار کند، مجموع تولید سالانه آن چند عدد است؟

حل مرحله به مرحله:

$$2,450 \times 280 = 2,450 \times (200 + 80)$$

$$2,450 \times 200 = 490,000$$

$$2,450 \times 80 = 196,000$$

$$490,000 + 196,000 = 686,000 \text{ مجموع}$$

مسئله 4: یک شرکت ساختمانی 25,750 کیلوگرم سیمان خریداری کرده است. اگر هر ساختمان به 850 کیلوگرم سیمان نیاز داشته باشد:

- الف) مواد برای چند ساختمان کاملاً کافی است؟
- ب) چند کیلوگرم سیمان باقی می ماند؟

حل مرحله به مرحله:

$$25,750 \div 850 = 30 \text{ : ساختمان کامل}$$

$$850 \times 30 = 25,500$$

$$25,750 - 25,500 = 250 \text{ : باقی مانده}$$

مسئله 5: یک پوهنتون 3,500 محصل دارد. اگر هر محصل ماهانه 1,200 افغانی فیس بپردازد، مجموع فیزی که پوهنتون در 12 ماه جمع آوری می کند چند افغانی است؟

حل مرحله به مرحله:

$$3,500 \times 1,200 = 4,200,000 \text{ فیس ماهانه پوهنتون:}$$

$$4,200,000 \times 12 = 50,400,000 \text{ فیس سالانه:}$$

مسئله 6: یک بکس 2.5 متر طول دارد. در یک پروژه به 150 متر آهن نیاز است. اگر هر بکس 30 افغانی قیمت داشته باشد، هزینه کل چند افغانی می شود؟

حل مرحله به مرحله:

$$150 \div 2.5 = 60 \text{ تعداد بکس های مورد نیاز: بکس}$$

هزینه کل: $60 \times 30 = 1,800$

مسئله 7: یک دکاندار 850 کیلوگرم برنج به قیمت 75 افغانی هر کیلو خرید. او 600 کیلوگرم آن را به قیمت 95 افغانی هر کیلو فروخت و باقی مانده را به قیمت 70 افغانی هر کیلو. سود یا زیان او چند افغانی است؟

حل مرحله به مرحله:

قیمت خرید مجموعی: $850 \times 75 = 63,750$

قیمت فروش 600 کیلو: $600 \times 95 = 57,000$

باقی مانده: کیلو $850 - 600 = 250$

قیمت فروش 250 کیلو: $250 \times 70 = 17,500$

قیمت فروش مجموعی: $57,000 + 17,500 = 74,500$

سود: $74,500 - 63,750 = 10,750$

عملیه های اساسی در اعداد تام

به اعدادی گفته میشود که واحد مکمل آشیا را نشان میدهد از منفی لایتناهی شروع الی صفر و مثبت لایتناهی ادامه دارد و به سمبول $\mathbb{Z}$ نشان داده میشود. مانند؛

$$\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, 0, \dots, +\infty\}$$

نکته 1: عدد صفر بدون علامه بوده یعنی؛ نام تام مثبت است و نه تام منفی.

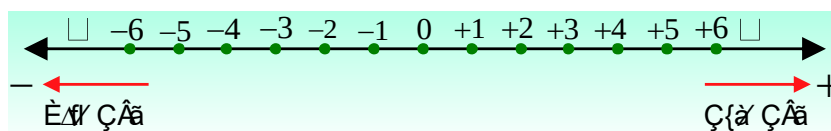
نکته 2: اعداد تام به دو نوع است یکی تام مثبت و دیگری تام منفی می باشد. یعنی؛

$$\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +3, +4, \dots, +\infty\}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, -4, -3, -2, -1\}$$

قیمت مطلقه اعداد تام

اگر به شکل ساده تر بیان بکنیم قیمت مطلقه عبارت از فاصله اعداد از مبدا می باشد. و توسط علامه (|) نشان داده میشود، فاصله 1- از مبدا 1+ از مبدا یکی است چون فاصله هیچ زمان منفی نمیشود لذا فاصله 4- و 4+ از مبدا سیستم مختصات یکی است.



قیمت مطلقه اعداد ذیل را دریابید؟

1) $|-3| = ? \Rightarrow +3$

2) $|7| = ? \Rightarrow 7$

نتیجه گیری: هر عددی که صفر نباشد (مثبت یا منفی) قیمت مطلقه آن یک عدد مثبت است. اما قیمت مطلقه صفر همیشه صفر

است.

برای اینکه این مفقوم را بهتر متوجه شوید کافیهست که نکات ذیل را بخاطر بسپارید.

نکته اول: اعداد هم علامه باهم جمع میگردد. چه مثبت باشد و چه منفی

$$\begin{aligned} 1) & +1 + 3 = +4 \\ 2) & -1 - 3 = -4 \\ 3) & -3 - 2 - 5 = -10 \\ 4) & (+4) + (+3) = +7 \\ 5) & (-6) + (-5) = -11 \end{aligned}$$

نکته دوم: اعداد مختلف علامه از هم تفریق میگردد. و علامه از حد بزرگ اخذ میشود.

$$\begin{aligned} 1) & -2 + 4 = +2 \\ 2) & +5 - 1 = +4 \\ 3) & -6 + 4 = -2 \\ 4) & +5 - 8 = -3 \end{aligned}$$

برای اینکه این موضوع را بهتر بفهمید چارت ذیل را بخاطر داشته باشید.

$$\begin{aligned} 1) & + \cdot + = + \\ 2) & - \cdot - = + \\ 3) & + \cdot - = - \\ 4) & - \cdot + = - \end{aligned}$$

1) مثبت ضرب مثبت مساوی با مثبت

2) منفی ضرب منفی مساوی است با مثبت

3) مثبت ضرب منفی مساوی است با منفی

4) منفی ضرب مثبت مساوی با منفی

به همین صورت در عملیه تقسیم اول علامه ها را طوری ذیل تقسیم می نماییم.

مثالها

$$\begin{aligned} 1) & 3 \times (-4) = -12 \\ 2) & 3 \times (8) = 24 \\ 3) & -5 \times (-3) = +15 \\ 4) & -5 \times (2) = -10 \\ 5) & \frac{(-4) \times (-3)}{(-2) \times (-1)} = \frac{(+12)}{(+2)} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) & + \div + = + \\ 2) & - \div - = + \\ 3) & + \div - = - \\ 4) & - \div + = - \end{aligned}$$

قوس ها: () این قوس را بنام قوس کوچک یا قوس پارانیز یاد می کند. [] این قوس را بنام قوس متوسط یاد می کند. و { } این قوس را بنام قوس کلان یا قوس براکت یاد میکنند.

در ساده کردن افاده ها که در آن قوس موجود باشد برای رفع قوسین به ترتیت اول قوس کوچک، متوسط و قوس کلان را ساده سازی می نماییم.

مثال:

$$\begin{aligned}
 & 1) 2 + 3[2 + 3(2 + 4 \div 2 - 2)] \\
 & \Rightarrow 2 + 3[2 + 3(2)] \\
 & \Rightarrow 2 + 3[2 + 6] \\
 & \Rightarrow 2 + 3[8] \\
 & \Rightarrow 2 + 24 \\
 & \Rightarrow 26
 \end{aligned}$$

توان (Power): توان نشان می‌دهد که یک عدد چند بار در خودش ضرب شود.

$$a^n = a \times a \times \cdots \times a$$

A را قاعده و n را توان یا نما یاد میکنند که نشان می‌دهد عد a در خودش n بار ضرب گردیده است.

مثال:

$$1) 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \qquad 2) 5^2 = 5 \times 5 = 25$$

قوانین اصلی توان

1. ضرب توان‌ها با قاعده های مساوی:

$$a^m \times a^n = a^{(m+n)}$$

مثال:

$$3^2 \times 3^4 = 3^{(2+4)} = 3^6 = 729$$

2. تقسیم توان‌ها با قاعده های مساوی: هنگام تقسیم دو عدد با قاعده یکسان، توان مخرج را از توان صورت کم می‌کنیم.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$$

مثال:

$$\frac{5^6}{5^2} = 5^{(6-2)} = 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

3. توان در توان ضرب می‌گردد.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

مثال:

$$(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

4. در حالت ضرب توان ها یکسان و قاعده ها مختلف باشد، توان ها یکی قاعده ها ضرب می گردد.

$$a^m \times b^m = (a \times b)^m \quad \text{یا} \quad (a \times b)^m = a^m \times b^m$$

مثال:

$$(2 \times 3)^4 = 2^4 \times 3^4 = 16 \times 81 = 1296$$

5. در حالت تقسیم قاعده ها مختلف و توان ها یکسان باشد.

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \text{یا} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال:

$$\frac{6^2}{3^2} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2 = 4$$

توان های خاص:

1. عدد به توان صفر مساوی به یک.

$$a^0 = 1 \quad \text{Ex1: } 100^0 = 1 \quad \text{Ex2: } \pi^0 = 1$$

2. عدد که توان نداشت توان آن یک می باشد که آنرا نوشته نمیکنند.

$$a^1 = a \quad \text{Ex1: } 5^1 = 5$$

توان منفی:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad \text{Ex1: } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

توان های کسری:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{Ex1: } 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad \text{Ex2: } 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

تقسیم پذیری اعداد (Divisibility of Numbers): هرگاه یک عدد حقیقی بر عدد حقیقی دیگری تقسیم شده بتوان که باقیماند عملیه تقسیم صفر گردد، گفته می شود که عدد مذکور بر عدد دومی پوره قابل تقسیم است. بطور مثال گفته می توان که 15 بر 3، و بر 15 پوره قابل تقسیم است؛ زیرا که اگر 15 بالای 3 و 15 تقسیم گردد باقی مانده صفر می گردد.

1. قابلیت تقسیم بر 1 (Divisibility by 1): تمام اعداد بالای پوره قابل تقسیم هستند.
2. قابلیت تقسیم بر 2 (Divisibility by 2): یک عدد بر 2 قابل تقسیم است اگر رقم یکان آن جفت باشد 0 مانند؛ 2، 4، 6، 8، 698.
3. قابلیت تقسیم بر 3 (Divisibility by 3): یک عدد بر 3 قابل تقسیم است اگر مجموع رقم های آن بر 3 قابل تقسیم باشد.

4. **قابلیت تقسیم بر 4 (Divisibility by 4)** : یک عدد زمانی بر 4 پوره قابل تقسیم است که دو رقم یک ها و ده ها آن صفر یا عدد باشد که بر 4 پوره قابل تقسیم باشد. مانند: 400، 312، 416 که ارقام یک ها و ده های آن 00، 12 و 16 است.
5. **قابلیت تقسیم بر 5 (Divisibility by 5)** : یک عدد بر 5 پوره قابل تقسیم است اگر رقم یکها آن 0 یا 5 باشد مانند: 310، 20، 75.
6. **قابلیت تقسیم بر 6 (Divisibility by 6)** : یک عدد بر 6 قابل تقسیم است اگر همزمان بر 2 و بر 3 پوره قابل تقسیم باشد. مانند: 1200، 1302، 4608.
7. **قابلیت تقسیم بر 7 (Divisibility by 7)** : برای بررسی قابلیت تقسیم بر 7، رقم یک ها را دو چند کرده و از باقی عدد کم کنید. این کار را تکرار کنید تا به عدد کوچکی برسید. اگر آن عدد بر 7 پوره قابل باشد، عدد اصلی نیز بر 7 پوره قابل تقسیم است. مانند: 315، 343، 546
مثال: برای عدد 315، یکها 5 را دو برابر (10) کرده، از 31 کم می کنیم: $31 - 10 = 21$
21 بر 7 پوره قابل تقسیم است، پس 315 نیز بر 7 پوره قابل تقسیم است.
8. **قابلیت تقسیم بر 8 (Divisibility by 8)** : یک عدد بر 8 پوره قابل تقسیم است اگر سه رقم آخر (یگا، ده ها، صدها) صفر و یا عدد باشد که بر 8 پوره قابل تقسیم باشد. مانند: 8000، 45888، 5008.
9. **قابلیت تقسیم بر 9 (Divisibility by 9)** : یک عدد بر 9 قابل تقسیم است اگر مجموع رقمهای آن بر 9 قابل تقسیم باشد. مانند: 32136، 2007، 144.
10. **قابلیت تقسیم بر 10 (Divisibility by 10)** : یک عدد بر 10 قابل تقسیم است اگر رقم یکان آن 0 باشد.
11. **قابلیت تقسیم بر 11 (Divisibility by 11)** : یک عدد بر 11 قابل تقسیم است اگر تفاوت بین مجموع رقمها در مکانهای طاق و مجموع رقمها در مکانهای جفت (از سمت راست یا چپ) صفر یا مضرب 11 باشد. مانند: 828091، 1771561، 10648.
مثال: برای عدد 918، رقمها از راست: 8 (مکان اول)، 1 (مکان دوم)، 9 (مکان سوم). مجموع مکانهای طاق: $9 + 8 = 17$ ، مجموع مکانهای جفت: 1، تفاوت: $17 - 1 = 16$ که مضرب 11 نیست، پس قابل تقسیم نیست.

اعداد اولیه و مرکب (Prime and Composite Number): اعداد از نظر تعداد عوامل ضربی آن به دو دسته اولیه و مرکب تقسیم می شود.

1. **اعداد اولیه (Prime Numbers):** هر عدد که دارای دو عامل ضربی بوده فقط بالای خودش و یک پوره قابل تقسیم می باشد. مانند: 2، 5، 7، 37، ...
2. **اعداد مرکب (Composite Number):** اعداد است که بیشتر از دو عامل ضربی داشته یعنی بر علاوه یک و خودش بالای عدد دیگر نیز پوره قابل تقسیم می باشد. مانند: 4، 12، 25، ...

تجزیه و تجزیه به اعداد اولیه (Factorization and Prime Factorization): دریافت عوامل ضربی یک عددت یا تقسیم نمودن عدد به چند بخش را تجزیه گویند. در جمله $a \cdot b = m$ اعداد a و b را بنام فکتورهای m گویند، اگر تمام فکتورها اعداد اولیه باشد بنام تجزیه به عوامل اولیه گفته میشود.

$$(تجزیه به عوامل اولیه) \quad 20 = 2 \times 2 \times 5 \quad 2) \quad (تجزیه) \quad 20 = 2 \times 10 \quad 1)$$

تجزیه به عوامل اولیه را میتوان به روش های مختلف انجام داد از آن جمله روش ساده آن روش تقسیم جدولی به طور مثال های ذیل:

مثال: اعداد 1800 و 1200 را به عوامل اولیه آن تجزیه نمایید.

حل:

2	1200
2	600
2	300
2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	1800
2	900
2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \quad 1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

در تجزیه به یاد داشته باشید:

- همیشه با کوچک‌ترین عدد اولیه شروع کنید.
- تقسیم را ادامه دهید تا به 1 برسید.
- عامل‌ها باید عدد اول باشند.

قاسم مشترک و بزرگترین قاسم مشترک (Common Divisor and Greatest Common Divisor):

قاسم‌های یک عدد عبارت از اعدادی اند که عدد داده شده بالای آنها پوره قابل تقسیم باشد. و قاسم‌های یک عدد همیشه از عدد داده شده کوچکتر و یا مساوی به آن می‌باشند. مثلاً قاسم‌ها یا تقسیم‌کننده‌های عدد 8 را می‌ایم. $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$. یعنی عدد 8 را اعداد 1, 2, 4 و 8 می‌تواند پوره تقسیم کند. قاسم مشترک عبارت از اعدادی اند که بین قاسم‌های اعداد داده شده مشترک باشند به طور مثال قاسم‌های مشترک 6 و 12 را بدست می‌آوریم:

$$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$CD(6, 12) = \{1, 2, 3, 6\}$$

اما بزرگترین قاسم مشترک 6 و 12 عبارت از 6 است.

دریافت بزرگترین قاسم مشترک (GCD): برای دریافت بزرگترین قاسم مشترک چندین روجود دارد مهم‌ترین آن روش تجزیه منفرد و تجزیه همزمان.

روش تجزیه منفرد:

مثال: بزرگترین قاسم مشترک اعداد 7200, 33264 و 10560 را دریافت نمایید.

2	7200	2	10560	2	33264
2	3600	2	5280	2	16632
2	1800	2	2640	2	8316
2	900	2	1320	2	4158
2	450	2	660	3	2079
3	225	2	330	3	693
3	75	3	165	3	231
5	25	5	55	7	77
5	5	11	11	11	11
	1		1		1

$$7200 = 2^5 \times 3^2 \times 5^2, \quad 10560 = 2^6 \times 3^1 \times 5^1 \times 11^1, \quad 33264 = 2^4 \times 3^3 \times 7^1 \times 11^1$$

برای انتخاب بزرگترین قاسم مشترک از بین عوامل ضربی مشترک آنهایی را انتخاب میکنیم که دارای کوچکترین توان باشند و عوامل غیر مشترک انتخاب نمی گردند.

$$GCD(7200, 10560, 33264) = 2^4 \times 3 = 48$$

تجزیه همگانی: اعداد داده شده را در یک سطر نوشته و آنها را به عوامل اولیه مشترک شان همزمان تجزیه می کنیم بعداً عوامل مشترک را با هم ضرب نموده و حاصل ضرب عبارت از بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد مورد نظر است.

مثال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد 240 و 420 و 660 را دریافت نمایید.

2	240	420	660
2	120	210	330
3	60	105	165
5	20	35	55
	4	7	11

اکنون عوامل ضربی مشترک را با هم ضرب نموده و حاصل ضرب (GCD) اعداد داده شده می باشد.

$$GCD(240, 420, 660) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

نکات:

- قاسم های یک عدد محدود است که بین یک و خود عدد می باشد.
- کوچکترین قاسم هر عدد عبارت از یک است.
- بزرگترین قاسم هر عدد عبارت از خود همان عدد است.
- کوچکترین قاسم مشترک بین چند عدد عبارت از یک می باشد.

مضرب مشترک و کوچکترین مضرب مشترک (Common Multiple and Last Common Multiple):

کوچکترین مضرب مشترک چند عدد عبارت از کوچکترین عددی است، طوری که این عدد بالای همه اعداد داده شده همزمان پوره قابل تقسیم باشد، بطور مثال 36 کوچکترین عددی است که بالای اعداد 12, 18 و 6 همزمان پوره قابل تقسیم است. بناً 36 را بنام کوچکترین مضرب مشترک (LCM) اعداد 12, 18 و 6 یاد می کنند.

دریافت کوچکترین مضرب مشترک (LCM):

1. تجزیه منفرد:

مثال: کوچکترین مضرب مشترک اعداد 360، 756 و 600 را دریافت نمایید.

2	756	2	360	2	600
2	378	2	180	2	300
3	189	2	90	2	150
3	63	3	45	3	75
3	21	3	15	5	25
7	7	5	5	5	5
	1		1		1

$$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7^1, \quad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1, \quad 600 = 2^3 \times 3^1 \times 5^2$$

$$LCM = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7 = 37800$$

تجزیه همزمان:

اعداد داده شده را در یک سطر نوشته و آنها را به عوامل ضربی اولیه شان همزمان تجزیه می کنیم عملیه تجزیه نمودن را تا جای انجام می دهیم، که از حاصل تقسیم هر عدد، یک عدد اولیه بدست آید. بعداً عوامل مشترکی که بطرف چپ خط عمود بدست آمده با اعداد اولیه که تحت خط اخیر تحریر شده اند، با هم ضرب نموده که حاصل ضرب عبارت از کوچکترین مضرب مشترک اعداد مورد نظر است.

مثال: کوچکترین مضرب مشترک اعداد 180 و 360 را دریافت نمایید.

2	360	180
2	180	90
2	90	45
3	45	45
3	15	15
5	5	5
	1	1

$$LCM\{360, 180\} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$$

نکات:

- مضرب های یک عدد نامحدود می باشد.

- یک عدد بی نهایت مضرب دارد.
- مضرب های یک عدد از خود عدد شروع و تا بی نهایت ادامه دارد.
- کوچکترین مضرب هر عدد عبارت از خود عدد است.
- بزرگترین مضرب هر عدد نامعلوم لایتناهی یا نا محدود است.

رابطه بین بزرگترین قاسم مشترک (GCD) و مضرب مشترک دو عدد (LCM):

اگر قاسم مشترک اعداد a و b را به G و کوچکترین مضرب مشترک آن را L به نشان دهیم رابطه ذیل موجود است.

$$G \times L = a \times b$$

مثال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک اعداد 225 و 300 عبارت از 75 می باشد، کوچکترین مضرب مشترک 225 و 300 را دریابید.

$$\begin{aligned} a &= 225 \\ b &= 300 \\ G &= 75 \\ L &=? \end{aligned} \Rightarrow L = \frac{a \times b}{G} = \frac{225 \times 300}{75} \Rightarrow L = 900$$

جذر

اعداد جذری عبارت از اعدادی هستند که دارای توان کسری باشند. و یا به عبارت دیگر هرگاه توان یک عدد یک کسر باشد عدد مذکور به شکل یک جذر نیز نوشته شده می تواند و همچنان جذر اعداد را چنین نیز می توان تعریف کرد. جذر یک عدد الجبری عبارت از دریافت یکی از عوامل ضربی مساوی آن است که اگر در خودش به اندازه درجه جذر ضرب گردد عدد تحت الجذر را بدهد.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1)	$\sqrt[3]{16} = 4$	$\rightarrow$	$4^2 = (4)(4) = 16$
2)	$\sqrt[4]{16} = 2$	$\rightarrow$	$2^4 = (2)(2)(2)(2) = 16$
3)	$\sqrt[5]{-32} = -2$	$\rightarrow$	$(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
2)	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\rightarrow$	$3^3 = (3)(3)(3) = 27$

برای تبدیل کردن اعداد توانداریکه توان آن شکل کسری را داشته باشد، ابتداء قاعده را منحیث عدد تحت الجذر، صورت کسر توان را، توان عدد تحت الجذر و مخرج کسر توان را، منحیث درجه جذر می نویسیم.

مثال: اعداد ذیل را به شکل جذری بینوسید.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8} & 4) \quad \left(2\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{\left(2\frac{4}{3}\right)^3} = \sqrt[8]{\left(\frac{10}{3}\right)^3} = \sqrt[8]{\frac{1000}{27}} \\
 2) \quad 7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49} & 5) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}} = \sqrt[9]{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \sqrt[9]{\frac{81}{16}} \\
 3) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\frac{3}{2}}
 \end{array}$$

مثال: اعداد ذیل را به شکل عدد توان دار بینوسید.

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \sqrt[3]{81} = ? & 5) \quad \sqrt[8]{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{8}} \\
 \quad \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}} & 6) \quad \sqrt[5]{\frac{1}{7^3}} = \sqrt[5]{7^{-3}} = 7^{-\frac{3}{5}} \\
 2) \quad \sqrt[3]{-27} = ? & 7) \quad \sqrt[4]{\left(2\frac{3}{7}\right)^5} = \left(2\frac{3}{7}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{17}{7}\right)^{\frac{5}{4}} \\
 \quad \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{3^3} = -3^{\frac{3}{3}} = -3 & 8) \quad \sqrt[3]{(0.5)^2} = (0.5)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5}{10}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \\
 3) \quad \sqrt[7]{-49} = ? & \\
 \quad \sqrt[7]{-49} = -\sqrt[7]{7^2} = -7^{\frac{2}{7}} & \\
 4) \quad \sqrt[7]{8^2} = 8^{\frac{2}{7}} &
 \end{array}$$

جذر مربع (Square Root): هر جذر که درجه نداشت درجه آن دو است که آنرا جذر مربع یا جذر دوم می گویند. به دو روش می توانیم بدست آوریم.

1. طریقه تجزیه

برای بدست آوردن جذر دوم یک عدد از طریق تجزیه ابتداء عدد داده شده را به عوامل ضربی اولیه آن تجزیه نموده و از بین هردو عامل ضربی مشترک یکی را از جذر خارج می کنیم.

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

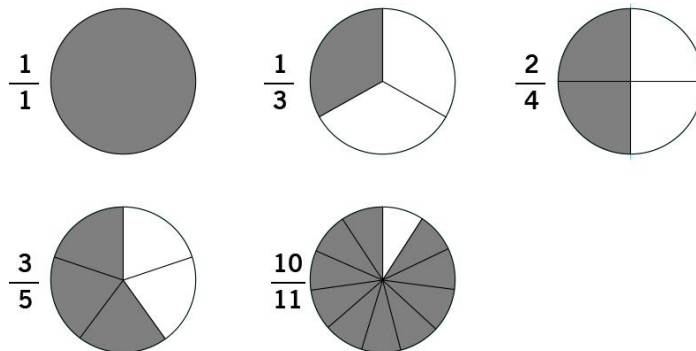
2. طریقه عمومی

کسر ها (Fractions):

تعریف: کسر در لغت به معنی شکستن میباشد و در اصطلاح علم ریاضی کسر به عددی گفته میشود که مقدار کوچکتر از واحد را داشته باشد.
بصورت عموم کسر به دو نوع میباشد:

1. کسر عام (Common Fraction) 2. کسر عشا (Decimal)

کسر عام (Common Fraction): هرگاه یک شی را به چند حصه مساوی تقسیم کرده و از آن یک یا چند حصه را بگیریم کسر عام بدست می آید.



کسر عام دو نوع اند:

1. کسر واقعی (Proper Fraction): وقتی صورت از مخرج کوچکتر باشد (مثل $\frac{3}{5}$) مقدار این کسر همیشه

کمتر از یک است.

2. کسر غیر واقعی (Improper Fraction): وقتی صورت از مخرج بزرگتر یا با آن مساوی باشد (مثل $\frac{7}{5}$)

مقدار این کسر یک یا بیشتر از یک است.

عدد مخلوط (Mixed Number): ترکیبی از یک عدد صحیح و یک کسر است (مثل $3\frac{2}{3}$)

تبدیل نمودن کسر غیر واقعی به عدد مخلوط (تصحیح کسر ها): برای تصحیح نمودن کسر صورت تقسیم مخرج نموده بعد خارج قسمت را به عنوان عدد صحیح، باقی مانده را در و در مخرج مقسوم علیه را مینویسیم. به طور مثال کسر $\frac{7}{5}$ را تصحیح می نماییم.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 5 & 1 \\ \hline 2 & \end{array} \Rightarrow 1\frac{2}{5}$$

غیر واجب نمودن کسر ها (simplifying): عملیه تبدیل عدد مخلوط به کسر غیر واقعی می باشد که برای غیر واجب نمودن کسر ها عدد صحیح ضرب در مخرج شده در صورت و بر همان مخرج نوشته میشود. به طور مثال $3\frac{5}{6}$ را غیر واجب می نماییم.

$$3\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{23}{6}$$

کسر های مساوی یا معادل (Equivalent Fractions): کسر های اند که مقدار های آنها با هم مساوی بوده اما ارقام صورت و مخرج آنها متفاوت هستند مانند: $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

برای دریافت نمودن کسر های معادل یک کسر از دو روش میتواند استفاده نمود:

1. ضرب نمودن صورت و مخرج کسر به یک عدد.

$$\frac{3}{5} : \Rightarrow \quad 1) \quad \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} \quad 2) \quad \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$$

2. تقسیم نمودن صورت و مخرج به یک عدد (اختصار).

$$1) \quad \frac{10}{20} = \frac{2}{2} \quad 2) \quad \frac{15}{18} = \frac{15 \div 3}{18 \div 3} = \frac{5}{6}$$

مقایسه کسرها:

حالت اول: اگر مخرج ها یکسان باشند کسری بزرگ است که صورت آن بزرگتر باشد، بطور مثال:

$$\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} > \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$$

حالت دوم: اگر صورت ها یکسان بوده و مخرج ها مختلف باشند کسری بزرگ است که مخرج آن کوچکتر باشد بطور مثال:

$$\frac{3}{6}, \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{3}{6} > \frac{4}{6}$$

حالت سوم: در این حالت مخرج ها و صورت های کسر ها مختلف بوده برای مقایسه این نوع کسرها ابتدا آنها را هم مخرج نموده و بعداً نظر به حالت اول آنها را مقایسه میکنیم، بطور مثال:

$$\frac{4}{5}, \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{هم مخرج}} \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 3}, \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 3} \Rightarrow \frac{12}{15}, \frac{10}{15} \Rightarrow \frac{12}{15} > \frac{10}{15} \Rightarrow \frac{4}{5} > \frac{2}{3}$$

عملیه های اساسی بالای کسر ها:

الف) عملیه جمع و تفریق کسر ها (Addition and Subtraction of Fractions):

هرگاه مخرج ها مساوی باشند، از مخرج های مساوی یکی را در نظر گرفته صورت ها را باهم جمع یا تفریق میکنیم، بطور مثال:

$$1) \quad \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{3+6}{5} = \frac{9}{5} \quad 2) \quad \frac{18}{7} - \frac{11}{7} = \frac{18-11}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

و در صورت که مخرج کسرها مساوی نباشد، نکات ذیل را در نظر می گیریم:

- ابتدا همه مخرج ها را در نظر گرفته، کوچکترین مضرب مشترک شان را بدست می آوریم.
- این عدد بدست آورده را مخرج مشترک تمام کسرها قرار می دهیم.
- مخرج مشترک را به هر یک از مخرج ها تقسیم نموده حاصل تقسیم را بصورت کسرها ضرب می نماییم.
- در اخیر صورت ها را با هم جمع یا تفریق می نماییم.

مثال ها:

$$1) \frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3 + 5 \cdot 2}{15} = \frac{9 + 10}{15} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$$

$$2) \frac{4}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{10} = \frac{4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{20} = \frac{16 + 5 - 4}{20} = \frac{21 - 4}{20} = \frac{17}{20}$$

ب) ضرب و تقسیم کسرها (**Multiplication and Division of Fractions**): برای ضرب نمودن کسرها؛ صورت را با صورت و مخرج را با مخرج ضرب می‌نماییم.

$$1) \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

$$2) \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

اما برای تقسیم کسرها کسر اول به حالت خودش علامه تقسیم به ضرب، بعداً عملیه ضرب؛ صورت را با صورت و مخرج را با مخرج ضرب می‌نماییم.

$$1) \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

$$2) \frac{1}{2} \div \frac{3}{7} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

کسر الکسر (**Complex Fraction**): کسر است که در صورت و مخرج آن اعداد کسری موجود باشد.

برای ساده نمودن کسر الکسر مانند عملیه تقسیم عمل می‌کنیم و یا راه کوتاه تر دور را با دور ضرب نموده در صورت و نزدیک را با نزدیک ضرب نموده در مخرج قرار می‌دهیم، بطور مثال:

$$1) \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{12}$$

$$2) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{15}{8}$$

عملیه مختلط کسرها: برای سوالات مختلط در عملیه ها را باید در نظر داشت که به ترتیب در ذیل بیان میگردد:
اول: ساده سازی توان.

دوم: غیرواجب نمودن کسرها

سوم: قوس ها از داخل به بیرون.

چهارم: ضرب و تقسیم از چپ به راست.

پنجم: جمع و تفریق طوری که هم علامه ها جمع مختلیف علامه ها تفریق.

مثال:

$$1) \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{4} + \frac{8}{20} = \frac{5 \cdot 4 + 1 \cdot 8}{20} = \frac{20 + 8}{20} = \frac{28}{20} = \frac{7}{5}$$

$$2) \quad 2 \frac{1}{2} \left(1 \frac{3}{4} + \frac{4}{3} \right) - 2 \frac{3}{4} = \frac{5}{2} \left(\frac{7}{4} + \frac{4}{3} \right) - \frac{11}{4} = \frac{5}{2} \left(\frac{21 + 16}{12} \right) - \frac{11}{4} \\ = \frac{5}{2} \left(\frac{37}{12} \right) - \frac{11}{4} = \frac{185}{24} - \frac{11}{4} = \frac{185 - 66}{24} = \frac{119}{24}$$

کسرها اعشار (**Decimal Fractions**): اعشار کلمه عربی بوده و از کلمه عشر به معنی 10 گرفته شده و در اصطلاح ریاضی کسر های اند که مخرج های شان یکی از اعداد مضرب 10 مانند؛ 100، 1000، ... باشند.

$$1) \frac{3}{10} = 0.3$$

$$2) 0.05 = \frac{5}{100}$$

$$3) 0.0002 = \frac{2}{10000}$$

کسر اعشار دو نوع است.

1. کسر اعشار محدود: 3.7 ، 0.5

2. کسر اعشار نامحدود: نیز به دو بخش تقسیم شده است.

(الف) متوالی : ارقام اعشاری آن ختم نشده ولی تکرار می‌باشد: $2.5\overline{333} = 2.5333 \dots$

(ب) غیر متوالی: ارقام اعشاری آن نه ختم شده می‌باشد و نه تکراری:

$$\pi = 3.1428 \dots, \sqrt{3}, \sqrt{2} = 1.414 \dots$$

تبدیل کسر عام به کسر اعشار: برای تبدیل کسر عام به کسر اعشار صورت را تقسیم مخرج می‌کنیم.

$$1) \frac{1}{2} = 0.5 \quad 2) \frac{24}{5} = 4.8 \quad 3) 7\frac{1}{2} = 7.5$$

تبدیل کسر اعشار محدود به کسر عام: تمام ارقام را در صورت و در مخرج به علامه اعشاری یک (1) در سمت راست آن به تعداد ارقام اعشاری صفر می‌گذاریم.

$$1) 0.4 = \frac{4}{10} \quad 2) 0.25 = \frac{25}{100} \quad 3) 19.2 = \frac{192}{10}$$

تبدیل کسر اعشار متوالی به کسر عام: تمام ارقام را منفی ارقام اعشاری نا متوالی نموده در صورت، در مخرج به تعداد ارقام متوالی 9 و در سمت راست آن به تعداد ارقام اعشاری غیر متوالی صفر می‌گذاریم.

اعداد اعشاری غیر متوالی – تمام اعداد

به تعداد ارقام اعشار غیر متوالی (0) → به تعداد ارقام متوالی (9)

$$1) 0.4\overline{245} = \frac{4245 - 42}{9900} = \frac{4203}{9900} \quad 2) 12.\overline{564} = \frac{12564 - 5}{990} = \frac{12559}{990}$$

عملیه های اساسی بالای کسره های اعشار:

1. جمع و تفریق (Addition and Subtraction): عملیه جمع اعداد اعشاری نیز مانند اعداد کامل به صورت

می‌تواند انجام شود به صورت سطری و ستونی. در جمع و تفریق اعداد اعشاری نکات ذیل را در نظر می‌گیریم.

- اعداد اعشاری را بشکل عمودی طوری ترتیب می‌نماییم که علامه ایاشاریه در امتداد یک خط عمود قرار بگیرند.

- تعداد ارقام اعشاری را با قرار دادن صفر مساوی می‌سازیم.

- ارقام اعشاری که دارای ارزش مکانی یکسان است باهم جمع یا تفریق می‌نماییم و زمانی که به علامه اعشاری برسیم آنرا در حاصل جمع یا تفریق انتقال می‌دهیم.

مثال: محاسبه نمایید حاصل: $6.436 + 8.992 = ?$ و $567.63 - 92.478 = ?$

$$\begin{array}{r} 6.436 \\ + 8.992 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 6.436 \\ + 8.992 \\ \hline 15.428 \end{array} \quad \begin{array}{r} 567.63 \\ - 92.478 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 567.630 \\ - 92.478 \\ \hline 475.152 \end{array}$$

[illegible]

ضرب اعداد عشاری (Multiplication):

- علامہ اعشاریہ را در اعداد نادیدہ می گیریم.

- در آخر به تعداد مجموع ارقام اعشاری اجزای ضریب از راست به چپ جدا می‌سازیم.

مثالها :

$$1) \begin{cases} 0.03 \\ 0.017 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \\ \times 17 \\ 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.03 \\ \times 0.017 \\ 0.00051 \end{cases}$$

$$3) \left\{ \frac{125}{0.4} \Rightarrow \left\{ \frac{125}{\times \frac{500}{4}} \Rightarrow \left\{ \frac{125}{\times \frac{50}{0.4}} \right. \right.$$

$$4) \left\{ \begin{array}{l} 0.45 \\ 0.24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 45 \\ 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 45 \\ 24 \end{array} \right\} \times \frac{10}{10} = \left\{ \begin{array}{l} 450 \\ 240 \end{array} \right\}$$

$$5) \left\{ \begin{array}{l} 5.3 \\ 1.2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 53 \\ \times 12 \\ \hline 106 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5.3 \\ \times 1.2 \\ \hline 6.36 \end{array} \right\}$$

$$6) \begin{cases} 0.25 \\ 0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 \\ \times 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.25 \\ \times 0.5 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 12 \\ 1.002 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1002 \\ \times 12 \\ \hline 2004 \\ 1002 \\ \hline 12024 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \\ \times 1.002 \\ \hline 12.024 \end{cases}$$

تقسیم کسر اعشار (Division of Decimal): برای تقسیم اعداد اعشاری حالات ذیل را در نظر میگیریم.

حالت اول: هرگاه مقسوم عدد اعشاری و مقسوم علیه عدد کامل باشد، در این صورت علامه اعشاری را به خارج قسمت انتقال می‌دهیم.

مثالها :

$$1) \begin{array}{r} 6.25 \overline{) 5} \\ \underline{12} \\ -10 \\ \underline{25} \\ -25 \\ \underline{00} \end{array}$$

$$2) \begin{array}{r} 42.5 \overline{) 5} \\ \underline{40} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 00 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{r} 3 \overline{) 4} \\ \underline{0} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ 20 \\ \underline{-20} \\ 00 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{r} 0.625 \overline{) 25} \\ \underline{0} \\ 062 \\ \underline{-50} \\ 125 \\ \underline{-125} \\ 0 \end{array}$$

حالت دوم: هرگاه مقسوم و مقسوم علیه هر دو اعشار داشته باشند، اولاً مقسوم و مقسوم علیه را به وسیله ضرب نمودن توان ها 10 به اعداد معادل آن تبدیل نموده، بعداً عملیه تقسیم را اجرا می‌کنیم (و یا به زبان ساده تر تعداد خانه های بعد از اعشار مقسوم و مقسوم علیه را با گذاشتن صفرها برابر ساخته بعداً علامه های اعشار را بر می‌داریم).

$$1) \quad 22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{22.5 \times 10}{1.5 \times 10} = \frac{225}{15} = 15$$

$$2) \quad 4.22 \div 2.11 = \frac{4.22 \times 100}{2.11 \times 100} = \frac{422}{211} = 2$$

$$3) \quad 2.6964 \div 1.26 = \frac{2.6964}{1.26} = \frac{2.6964 \times 10000}{1.26 \times 10000} = \frac{26964}{12600} = 2.14$$

$$4) \quad 0.01836 \div 0.018 = \frac{0.01836}{0.018} = \frac{0.01836 \times 100000}{0.018 \times 100000} = \frac{1836}{1800} = 1.02$$

$$5) \quad 56 \div 0.8 = \frac{56 \times 10}{0.8 \times 10} = \frac{560}{8} = 70$$

مقایسه کسره‌های اعشار: برای مقایسه اعداد اعشاری ابتدا اعداد صحیح بعداً خانه های بعد از اعشار را به ترتیب مقایسه می‌کنیم.

$$1) \quad 3.4 > 2.34$$

$$2) \quad 3.5 < 3.7$$

$$3) \quad 10.176 < 10.2$$

و یا برای مقایسه اعداد اعشاری اول تعداد ارقام اعشاری را با اضافه کردن صفر برابر کرده بیدون در نظر داشت علامه اعشاری مقایسه می‌نماییم.

$$1) \quad 3.4 \quad 2.34 \Rightarrow 3.40 \quad 2.34 \Rightarrow 340 > 234 \Rightarrow 3.4 > 2.34$$

گرد کردن (رواندا ف) (Rounding):

گرد کردن یعنی نزدیک کردن یک عدد به مقدار ساده‌تر یا با دقت کمتر، طبق قاعده‌ای مشخص. در زیر قواعد اصلی گرد کردن برای اعداد کامل و اعداد اعشاری توضیح داده شده است.

گرد کردن (رواندا ف) اعداد کامل (Rounding Whole Number): برای رواندا ف کردن یک عدد صحیح به نزدیک‌ترین دهگان، صدگان، هزارگان و غیره، همان قاعده بالا به کار می‌رود.

قاعده:

1. رقم مرتبه‌ای که می‌خواهید به آن رونداف کنید (مثلاً دهگان) را مشخص کنید.
2. به رقم سمت راست آن (یکان برای دهگان، دهگان برای صدگان و ...) نگاه کنید.
3. اگر آن رقم 5 یا بیشتر بود، رقم هدف را یک واحد افزایش دهید و تمام ارقام سمت راست آن را صفر کنید.
4. اگر آن رقم کمتر از 5 بود، رقم هدف را بدون تغییر نگه دارید و تمام ارقام سمت راست آن را صفر کنید.

مرحله اول	مشخص نمودن مرتبه‌ی که به آن تقریب میگردد، تمام ارقام سمت چپ آن تغییر نمی‌کند.	مثال: عدد 23658 را الی مرتبه صدها رونداف نمایید.
		
مرحله دوم	نشانی نمودن یک رقم سمت راست مرتبه مطلوب	
مرحله سوم	عدد نشانی شده 5 یا بزرگتر از 5 است و یا کوچکتر از 5 است؟	عدد 5 است پس باید یک واحد اضافه گردد.
	یک واحد بالای مرتبه مطلوب جمع میگردد اگر 5 یا بزرگتر 5 باشد.	
	اضافه نمی‌گردد در صورت کوچکتر از 5 باشد.	بنا تقریب عدد فوق 23700 میگردد
مرحله چهارم	به جای تمام ارقام سمت راست مرتبه مطلوب صفر میگذاریم.	

مثال 1: فاصله بین زمین و افتاب **149,597,888** کیلومتر است، این فاصله را الی مرتبه های ذیل رونداف نمایید.

الف) صد میلیون (Nearest Hundred Million)

ب) ده میلیون (Nearest Ten Million)

ج) میلیون (Nearest Million)

حل:

الف)

$$149,597,888 \xrightarrow{1} 149,597,888 \xrightarrow{2} 149,597,888 \xrightarrow{3 \text{ و } 4} 100,000,000$$

(ب)

$$149,597,888 \xrightarrow{1} 149,597,888 \xrightarrow{2} 149,597,888 \xrightarrow{3 \text{ و } 4} 150,000,000$$

(ب)

$$149,597,888 \xrightarrow{1} 149,597,888 \xrightarrow{2} 149,597,888 \xrightarrow{3 \text{ و } 4} 150,000,000$$

مثال‌ها:

- رونداف عدد **478** به نزدیک‌ترین دهگان: رقم دهگان 7، یکان 8 است پس:

$$8 (\geq 5) \Rightarrow 7 + 1 = 8 \Rightarrow \text{نتیجه} = 480$$

- رونداف عدد **3245** به نزدیک‌ترین صدگان: رقم صدگان 2، دهگان 0 است پس:

$$4 (< 5) \Rightarrow \text{ببدون تغییر} 2 \Rightarrow \text{نتیجه} = 3200$$

- رونداف عدد **6951** به نزدیک‌ترین هزارگان: رقم هزارگان 6، صدگان 9 است پس:

$$9 (\geq 5) \Rightarrow 6 + 1 = 7 \Rightarrow \text{نتیجه} = 7000$$

رونداف به ارقام قابل اهمیت (Rounding- Significant Figure)

رونداف اعداد اعشاری (Rounding of Decimal):

گرد کردن (Rounding) یک روش تغییر دادن عدد است تا نوشتن و کار کردن با آن آسانتر شود، هرچند ممکن است از دقت آن کاسته شود. گرد کردن میتواند تا تعداد معینی رقم اعشاری ($d.p.$) یا به نزدیکترین عدد صحیح، یا نزدیکترین ۱۰، و غیره انجام شود.

در عدد اعشاری ($a.b$) جز a بنام عدد صحیح و b به نام ارقام اعشاری نامیده می‌شود. در اعداد اعشاری بعضی اوقات ضرورت می‌شود که تعداد اعداد اعشاری آن را به چند رقم محدود اعشار آن بنویسیم این عملیه را تقریب یا روندآف می‌گویند.

رونداف دارای قواعد است که به اساس عدد 5 محاسبه میشود. برای این که بدانیم چند رقم اعشار باقی بماند در سوالات دقت آن داده میشود. دقت (حساسیت): نشان دهنده ارقام باقی قسمت اعشار است که به دو شکل کسر اعشار و کسر عام نشان داده میشود. مثلاً دقت 0.1 نشان می‌دهد که عدد باید یک رقم اعشار داشته باشد.

قواعد روندآف

1. رقم مورد نظر برای رونداف را مشخص کنید (مثلاً اگر بخواهید تا دو رقم اعشار رونداف کنید، رقم دوم بعد از اعشار رقم هدف است).
2. به اولین رقمی که بلافاصله بعد از رقم هدف قرار دارد (رقم بعدی) نگاه کنید.
3. اگر آن رقم 5 یا بیشتر بود، رقم هدف را یک واحد افزایش دهید رونداف به بالا (Round Up).
4. اگر آن رقم کمتر از 5 بود، رقم هدف را بدون تغییر نگه دارید رونداف به پایین (Round Down).
5. تمام ارقام بعد از رقم هدف حذف می‌شوند.

مثالها:

- رونداف عدد 3.1472 تا دو رقم اعشار:
رقم دوم اعشار 4، رقم بعدی آن 7 است پس:

$$3.15 = \text{نتیجه} \Rightarrow 4 + 1 = 5 \Rightarrow 7 (\geq 5)$$

- رونداف عدد 2.638 تا یک رقم اعشار:
رقم اول اعشار 6، رقم بعدی 3 است پس:

$$2.6 = \text{نتیجه} \Rightarrow \text{ببدون تغییر } 6 (< 5)$$

- رونداف عدد 7.25 تا یک رقم اعشار:
رقم اول اعشار 2، رقم بعدی 5 است پس:

$$7.3 = \text{نتیجه} \Rightarrow 2 + 1 = 3 \Rightarrow 5 (\geq 5)$$

رونداف اعداد اعشاری به ارقام قابل اهمیت (Rounding- Significant Figure)

تخمین زدن (Estimating)

تخمین زدن یعنی پیدا کردن یک مقدار نزدیک به جواب اصلی، بدون اینکه محاسبه را دقیق انجام دهیم. معمولاً برای تخمین، اعداد را رونداف (گرد) می‌کنیم و بعد عملیات ریاضی را انجام می‌دهیم. هر عدد را بر اساس دقت مورد نظر (مثلاً به نزدیک‌ترین دهگان، صدگان، یا یک رقم اعشار) رونداف کنید.

1. عملیات ریاضی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم) را با اعداد رونداف شده انجام دهید.
2. جواب به دست آمده، تخمینی از جواب دقیق خواهد بود.

نکته: برای تخمین، گاهی اعداد را به یک رقم معنی دار (one significant figure) گرد می‌کنند.

جمع و تفریق

- جمع دقیق:

$$1248 + 573 = 1821$$

تخمین با گرد کردن به نزدیک‌ترین صدگان:

$$1200 + 600 = 1800$$

تخمینی نزدیک به جواب دقیق

- تفریق دقیق:

$$782 - 319 = 463$$

تخمین با گرد کردن به نزدیک‌ترین دهگان:

$$780 - 320 = 460$$

ضرب

- ضرب دقیق:

$$47 \times 23 = 1081$$

تخمین با گرد کردن هر دو عدد به نزدیک‌ترین دهگان:

$$50 \times 20 = 1000$$

- ضرب دقیق:

$$312 \times 58 = 18096$$

تخمین با گرد کردن به یک رقم معنی‌دار:

$$300 \times 60 = 18000$$

تقسیم

- تقسیم دقیق:

$$784 \div 26 \approx 30.1538$$

تخمین با گرد کردن به نزدیک‌ترین دهگان:

$$780 \div 30 = 26$$

- تقسیم دقیق:

$$4250 \div 58 \approx 73.275$$

تخمین با گرد کردن مخرج و صورت به یک رقم معنی‌دار:

$$4000 \div 60 \approx 66.67$$

نکات:

- تخمین جواب را نزدیک به جواب اصلی می‌کند، نه دقیق.
- اگر همه اعداد را به بالا گرد کنید، تخمین از جواب واقعی بزرگ‌تر می‌شود. اگر همه را به پایین گرد کنید، تخمین کوچک‌تر می‌شود.
- در تخمین می‌توانید بسته به موقعیت، دقت گرد کردن را انتخاب کنید (مثلاً به نزدیک‌ترین دهگان، صدگان، یا یک رقم اعشار).
- تخمین برای حساب سریع و بررسی منطقی بودن جواب کاربرد دارد

روش علمی عدد نویسی (Scientific notation method):

طریقه علمی عدد نویسی طوری است که یک عدد مساوی یا بزرگتر از یک و کوچکتر از 10 را در یک طاقت که قاعده آن 10 می‌باشد، ضرب می‌نویسیم که آنرا شکل معیاری یا (Standard Form) اعداد نیز می‌گویند.

نسبت (Ratio):

تعیین رابطه بین دو کمیت همجنس را نسبت گویند. نسبت بیان‌کننده این است که کمیت اول چند برابر کمیت دوم بوده و یا کمیت اول چقدر اندازه بیشتر از کمیت دوم می‌باشد. نسبت بین دو عدد معمولاً به علامه‌های (/)، (:), و یا $\frac{\text{کمیت اول}}{\text{کمیت دوم}}$ نمایش می‌دهد. نسبت‌ها دو نوع است نسبت حسابی و نسبت هندسی.

1. نسبت حسابی(): این نسبت تفاوت بین کمیت را نشان می‌دهد، که کمیت اول چقدر بیشتر و کمتر از کمیت دوم است و از حاصل تفریق کمیت‌ها بدست می‌آید.

$$d = a - b$$

2. نسبت هندسی(): مقایسه دو کمیت از طریق حاصل تقسیم را نسبت هندسی گویند، که نشان می‌دهد کمیت اول چند برابر کمیت دوم است و همیشه یک عدد بی‌دون واحد است.

$$r = \frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{کمیت اول} \\ \rightarrow \text{کمیت دوم} \end{array}$$

تذکر: وقتی که به صورت عموم فقط اصطلاح نسبت مطرح می‌گردد هدف از آن نسبت هندسی می‌باشد.

مثال 1: نسبت 18 : 24 را ساده کنید.

$$r = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

مثال 2: نسبت حسابی و هندسی بین دو تکه را که به ترتیب دارای طول‌های 60m و 20m است دریابید.

$$\Rightarrow d = 60m - 20m = 40m \quad \text{نسبت حسابی}$$

$$\Rightarrow r = \frac{60m}{20m} = 3 \quad \text{نسبت هندسی}$$

مثال 3: نسبت حسابی و هندسی بین 2 ساعت و 30 دقیقه را دریابید.

$$t_1 = 30 \text{ min} \quad t_2 = 2 \times 60 \text{ min} = 120 \text{ min}$$

$$\Rightarrow d = 120 \text{ min} - 30 \text{ min} = 90 \text{ min} \quad \text{نسبت حسابی}$$

$$\Rightarrow r = \frac{120 \text{ min}}{30 \text{ min}} = 4 \quad \text{نسبت هندسی}$$

مثال 4: نسبت بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{5}{6}$ را دریابید.

حل: چون در اینجا مشخص نشده کدام نسبت پس معلوم است که هدف نسبت هندسی است.

$$\Rightarrow r = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10} \quad \text{نسبت هندسی}$$

دریافت کمیت مجهول در یک نسبت: معمولاً در موضوع نسبت، سه کمیت مطرح است که عبارت از کمیت اول، کمیت دوم و نسبت بین کمیت‌ها می‌باشد.

$$\text{نسبت} \rightarrow r = \frac{a}{b} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{کمیت اول} \\ \rightarrow \text{کمیت دوم} \end{array} \Rightarrow a = r \times b, \quad b = \frac{a}{r}$$

مثال 1: اگر نسبت دو عدد $\frac{3}{5}$ و عدد دوم آن 25 باشد، عدد اول را دریابید.

$$r = \frac{3}{5}, \quad b = 25, \quad a = ?$$

$$r = \frac{a}{b} \Rightarrow a = r \times b \Rightarrow a = 25 \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow a = 15$$

مثال 2: نسبت بین طول و عرض یک قطعه زمین $\frac{3}{2}$ است. اگر طول آن 45 متر باشد، عرض آنرا دریابید.

$$r = \frac{a}{b} \begin{matrix} \rightarrow & \text{طول} \\ \rightarrow & \text{عرض} \end{matrix} \Rightarrow r = \frac{3}{2}, \quad a = \text{طول} = 45m \quad b = \text{عرض} = ?$$

$$r = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{45}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{45}{1}}{\frac{3}{2}} = \frac{2 \cdot 45}{3} = 30m$$

تقسیم به یک نسبت معینه (Dividing in a given Ratios)

برای اینکه یک کمیت را بالای یک نسبت تقسیم کنیم نکات ذیل را در نظر میگیریم.

۱- مجموع حدود نسبت را دریافت میکنیم.

۲- کمیت داده شده را تقسیم مجموع حدود نسبت میکنیم.

۳- حاصل تقسیم بدست آمده را ضرب هر یک از حدود نسبت میکنیم.

مثال مبلغ Af 750 را بین دو نفر به نسبت $\frac{2}{3}$ تقسیم نمایید.

جواب:

$$2 + 3 = 5 \Rightarrow 750 \div 5 = 150$$

$$150 \cdot 2 = 300 \quad \text{نسبت اول}$$

$$150 \cdot 3 = 450 \quad \text{نسبت دوم}$$

مثال: جسیکا، مورگان و گریگ مجموعاً 9100 پوند را به نسبت 2 : 4 : 7 تقسیم می کنند. سهم مورگان چند پوند است؟

جواب:

$$2 + 4 + 7 = 13 \Rightarrow 9100 \div 13 = 700$$

$$700 \cdot 4 = 2800 \quad \text{سهم مورگان}$$

$$700 \cdot 2 = 1400 \quad \text{سهم جسیکا}$$

$$700 \cdot 7 = 4900 \quad \text{سهم گریگ}$$

مثال: در یک فارم مجموعاً 85 حیوان وجود دارد. نسبت گاوها به گوسفندها 3 : 2 و نسبت گوسفندها به فیل ها 7 : 6 است. تعداد هر نوع حیوان را پیدا کنید.

جواب: تبدیل نسبت‌ها به یک نسبت سه‌بخشی با استفاده از گوسفند به عنوان رابط

$$4:6:7 = \text{فیل:گوسفند:گاو} \Rightarrow 6:7 = \text{فیل:گوسفند} \Rightarrow 4:6 \stackrel{\times 2}{=} 2:3 = \text{گوسفند:گاو}$$

$$4 + 6 + 7 = 17 \Rightarrow 85 \div 17 = 5$$

$$4 \cdot 5 = 20 \quad \text{تعداد گاوها}$$

$$6 \cdot 5 = 30 \quad \text{تعداد گوسفندان}$$

$$7 \cdot 5 = 35 \quad \text{تعداد فیله‌ها}$$

تناسب (Proportion): تساوی دو نسبت را تناسب گویند.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a:b = c:d, \quad a \times d \mapsto \text{طرفین} \quad b \times c \mapsto \text{وسطین}$$

مثال:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} \Rightarrow 1:2 = 4:8$$

خواص مهم تناسب

1. در هر تناسب حاصل ضرب طرفین و وسطین مساوی به حاصل ضرب وسطین

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \times d = b \times c$$

2. اگر در یک تناسب جاهای طرفین و یا وسطین را تبدیل کنیم یک تناسب جدید بدست می‌آید یعنی تناسب از بین نمی‌رود.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

3. اگر یک تناسب معکوس شود تناسب جدید حاصل می‌شود (تناسب از بین نمی‌رود).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

3. اگر در یک تناسب مخرج‌ها را با صورت‌ها جمع و بر همان مخرج‌ها بنویسیم باز هم یک تناسب تشکیل می‌شود.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

4. اگر چندین نسبت باهم تناسب تشکیل داده و مساوی به یک مقدار ثابت گردد، هر نسبت مساوی به آن مقدار ثابت می‌گردد.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{m}{n} = k \Rightarrow \frac{a}{b} = k, \quad \frac{c}{d} = k, \quad \frac{e}{f} = k, \dots, \frac{m}{n} = k$$

دریاف جز مجهول در تناسب: اگر در یک تناسب یک جز آن نامعلوم و سه جز دیگر آن معلوم باشد میتوان جز مجهول را به کمک خواص تناسب دریافت نمود.
مثال: در یک صنف، نسبت تعداد پسران به دختران برابر 3:5 است. اگر تعداد پسران 12 باشد، تعداد دختران را پیدا کنید.

$$\frac{3}{5} = \frac{\text{پسران}}{\text{دختران}} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{12}{x} \Rightarrow 3 \cdot x = 5 \cdot 12 \Rightarrow 3x = 60 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{60}{3} \Rightarrow x = 20$$

مثال: در یک نقشه، مقیاس 1:25000 است (یعنی 1 سانتی متر روی نقشه برابر 2500 سانتی متر در واقعیت). اگر فاصله دو شهر روی نقشه 8.5 سانتی متر باشد، فاصله واقعی آنها را به متر پیدا کنید.

حل:

$$\frac{1}{25000} = \frac{\text{در نقشه}}{\text{واقعی}} \Rightarrow \frac{1}{25000} = \frac{8.5}{x} \Rightarrow x = 8.5 \cdot 25000 \Rightarrow x = 212500 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{\text{متر}}{\text{سانتی متر}} \Rightarrow \frac{1}{100} = \frac{x}{212500} \Rightarrow 100x = 1 \cdot 212500 \text{ cm} \Rightarrow \frac{100x}{100} = \frac{212500}{100} \Rightarrow x = 2125 \text{ m}$$

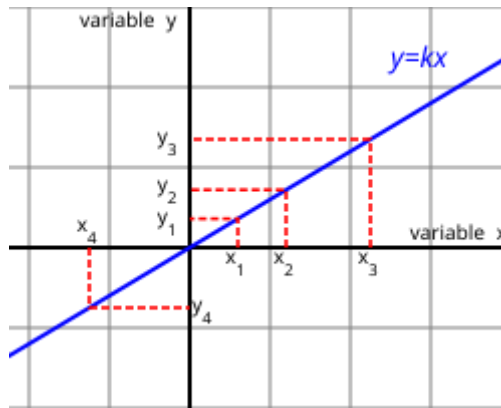
$$x = 2125 \text{ m}$$

تناسب مستقیم (Direct Proportion): هرگاه رابطه بین دو کمیت طوری باشد که با کاهش کمیت اول، کمیت دوم کاهش یافته و یا با افزایش کمیت اول، کمیت دوم نیز افزایش یابد چنین رابطه بین دو کمیت را تناسب مستقیم گویند.
مثال: قیمت سیب با وزن آن به طور مستقیم تناسب دارد. اگر 3 کیلوگرم سیب 600 افغانی شود، قیمت 5 کیلوگرم سیب چقدر می شود؟

حل:

$$\begin{array}{cc} \text{وزن} & \text{قیمت} \\ 3 & 600 \\ 5 & x \end{array} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{600}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 600}{3} \Rightarrow x = 5 \cdot 200 \Rightarrow x = 1000$$

گراف و معادله تناسب مستقیم:



$$y \propto x \Rightarrow y = kx \quad \Rightarrow k = \frac{y}{x}$$

مثال: اگر x با y رابطه مستقیم داشته باشد جدول ذیل را تکمیل نمایید.

x	3	5	10	12	
y		25			100

حل:

$$\left(\begin{matrix} x = 5 \\ y = 25 \end{matrix} \right) \Rightarrow k = \frac{y}{x} \Rightarrow k = \frac{25}{5} \Rightarrow k = 5$$

x	3	5	10	12	$\frac{100}{5} = 20$
$Y = kx$	$5 \cdot 3 = 15$	$5 \cdot 5 = 25$	$5 \cdot 10 = 50$	$5 \cdot 12 = 60$	100

تناسب غیر مستقیم (Inverse Proportion): هرگاه رابطه بین دو کمیت طوری باشد که با افزایش کمیت اول، کمیت دوم کاهش یابد. چنین رابطه بین دو کمیت را تناسب غیر مستقیم (معکوس) گویند. در حل مسایل نسبت مجهول را برعکس نموده مانند تناسب مستقیم عمل میکنیم.

مثال: 8 نفر کارگر یک کار را در 5 روز انجام میدهند 4 نفر کارگر همین کار را در چند روز انجام خواهند داد.

$$\begin{matrix} \text{کارگر} & \text{روز} \\ 8 & 5 \\ 4 & x \end{matrix} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 5}{4} \Rightarrow x = 2 \cdot 5 \Rightarrow x = 10$$

مثال: یک موتور مسافت مشخصی را طی می کند. سرعت (v) و زمان (t) به طور غیر مستقیم با هم تناسب دارند. اگر سرعت 60 km/h باشد، زمان 4 ساعت می شود. اگر سرعت 80 km/h باشد، زمان چند ساعت می شود؟

تعریف تناسب مرکب: تناسب مرکب زمانی استفاده میشود که بیش از یک نسبت یا عامل در سوالات ما دخیل باشد یعنی؛ تساوی بیشتر از دو نسبت را تناسب مرکب می نامند.

مانند؛

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \Rightarrow a, d, f, h \mapsto \text{طرفین} \quad b, c, e, g \mapsto \text{وسطین}$$

روش حل تناسب مرکب: جهت تحلیل و دریافت جز مجهول در تناسب مرکب به شکل ساده و مفهومی چند مرحله ذیل را در نظر بگیرید.

1. ابتدا تمام عوامل را فهرست کنید. (مثلاً نفر، روز، کار، مقدار و ...)
2. مشخص کردن نسبت ها (یعنی باید تحلیل کنید که آیا نسبت شما مستقیم است یا غیر مستقیم)
3. تبدیل همه نسبت ها به نسبت مستقیم

اگر یک جمع بندی زیبا داشته باشیم به این نتیجه میرسیم ابتدا تمام عوامل را فهرست (لیست) میکنیم، سپس تحلیل میکنیم که نسبت ها مستقیم است یا غیر مستقیم (اگر نسبت ما مستقیم باشد به حالت خودش می نویسیم، اما اگر نسبت غیر مستقیم باشد آن را به نسبت مستقیم تبدیل میکنیم یا آن نسبت را برعکس میکنیم) و در نهایت طرفین وسطین میکنیم.

مثال: مصرف انتقال 120kg جنس به فاصله 100km ، 4000 Af می گردد، مصرف انتقال 240kg جنس در فاصله 80km چند می شود؟
حل.

$$\frac{120}{240} \cdot \frac{100}{80} \cdot \frac{4000}{x} \Rightarrow x = \frac{240 \cdot 80 \cdot 4000}{120 \cdot 100} = 6400$$

پس مصرف انتقال 240kg جنس در فاصله 80km ، 6400 Af می شود.

مثال: 10 نفر کارگر 200m² زمین را در 5 روز سنگ فرش می کنند، پس 5 نفر کارگر 100m² زمین را در چند روز سنگ فرش خواهند کرد؟
حل.

$$\frac{10}{5} \cdot \frac{200}{100} \cdot \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 100 \cdot 5}{5 \cdot 200} = 5$$

پس 5 نفر کارگر 100m² زمین را در 5 روز سنگ فرش می کنند.

فیصد (Percentage)

فیصد از کلمه Percentume اشتقاق گردیده ، که معنی یک بر صد را می دهد ، یعنی محاسبه یک عدد از روی صد را فیصد می نامند و یا هم فیصد کسری است که مخرج آن 100 باشد، که با علامه (%) نشان می دهند. فیصد در موارد مختلف از قبیل تجارت ، بانکداری ، زراعت ، داروسازی و غیره به کار می رود. مثلاً بیست و هشت فیصد را به 28% می نویسیم.

برای محاسبات مربوط به فیصد از رابطه ذیل استفاده نمود:

$$\frac{100}{\text{فیصدی}} = \frac{\text{کل}}{\text{جز}} \Rightarrow \text{جز} \times 100 = \text{فیصدی} \times \text{کل}$$

مثال: 30 فیصد کدام عدد 90 می گردد:

$$\left. \begin{array}{l} 100 \\ x \end{array} \right\} \begin{array}{l} 30 \\ 90 \end{array} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 100}{90} = 300 \text{ کل}$$

مثال: تعداد شاگردان یک کورس 1000 نفر است ، 20% آن چي تعداد شاگرد است؟

$$\frac{100}{20} = \frac{1000}{x} \Rightarrow x = \frac{1000 \cdot 20}{100} = 200$$

مثال: 25% عدد 1200 چند ميشود؟

جواب:

$$\frac{1200}{100} \cdot \frac{x}{25} \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 25}{100} \Rightarrow x = 300$$

فیصد، کسر و اعشار: برای تبدیلات از جدول ذیل استفاده میگردد.

تبدیل	روش اجر	مثال
کسر $\rightarrow$ فیصد	تقسیم 100	$25\% \mapsto \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
عشار $\rightarrow$ فیصد		$25\% \mapsto \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0.25$
فیصد $\rightarrow$ کسر	ضرب 100	$\frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{4} \times 100 = 25\%$
فیصد $\rightarrow$ اعشار		$0.25 \mapsto 0.25 \times 100 = 25\%$

افزایش و کاهش فیصدی (Percentage increase and Decrease)

مثال: طول قد سیما را 95 سانتی متر اندازه شده است و بعد از مدتی طول قد سیما به 114 سانتی متر رسیده است، معلوم کنید که سیما چند فیصد رشد قد داشته است؟

$$PC = \frac{114-95}{95} \times 100 = 20\% \text{ در نتیجه سما 20 فیصد رشد قد داشته است.}$$

اگر در فیصد تزايد صورت بگیرد آنگاه مقدار کمیت جدید از رابطه ذیل بدست می آید

$$P = A \left(1 + \frac{r}{100} \right).$$

اگر در فیصد تناقص صورت بگیرد آنگاه مقدار کمیت جدید از رابطه زیر بدست می آید

$$P = A \left(1 - \frac{r}{100} \right).$$

در هر دو فورمول r عبارت از تزايد یا تناقص در نرخ فیصد است. A عبارت قیمت اصلی و P قیمت جدید است.

مثال: ارتفاع برج در آمریکا 139m است اگر دولت بخواهد 12% دیگر ارتفاع برج را بالا ببرد ارتفاع جدید چند متر خواهد بود؟

$$P = 139 \left(1 + \frac{12}{100} \right) = 155.68 \text{ m}$$

مثال: در سال 2015، رکورد جهانی شنای پروانه 100متر در رده پارالمپیک زنان در اختیار یوانا مندک (لهستان) با زمان 65.1s بود. اگر این رکورد جهانی 5% کاهش یابد، زمان جدید چه خواهد بود؟

$$P = 65.1 \left(1 - \frac{5}{100} \right) = 61.85 \text{ sec}$$

مقیاس ها و تبدیل واحداث:

مقیاس نسبت بین اندازه یک چیز روی نقشه (یا تصویر یا مدل) به اندازه واقعی آن است.
مثلاً اگر مقیاس 1000 : 1 باشد، یعنی 1 واحد روی نقشه برابر با 1000 واحد همان چیز در واقعیت است.
مقیاس معمولاً به شکل n : 1 نوشته می شود (کوچک نمایی) یا به ندرت 1 : n (بزرگ نمایی).

اگر مقیاس 200 : 1 باشد، یعنی اندازه روی نقشه 200 بار کوچکتر از اندازه واقعی است.

اگر مقیاس 1 : 5 باشد (برای نقشه یک میکروب)، یعنی اندازه روی نقشه 5 برابر بزرگتر از اندازه واقعی است.

تبدیل مقیاس به واقعیت و برعکس از واقعیت به مقیاس

اندازه روی نقشه × مقیاس	واقعیت → نقشه
مقیاس ÷ اندازه واقعی	نقشه → واقعیت

جدول بالا در بزرگ نمایی برعکس می باشد.

مثال: مقیاس نقشه 1 : 25000 است. فاصله دو شهر روی نقشه برابر 8 سانتی متر است. فاصله واقعی چند کیلومتر است؟

حل:

فاصله واقعی بر حسب سانتی متر $25000 \times 8 = 200000$ سانتی متر.

حالا سانتی متر را به متر تبدیل می کنیم $200000 \div 100 = 2000$ متر.

سپس متر را به کیلومتر تبدیل می کنیم $2000 \div 1000 = 2$ کیلومتر.

جواب: 2 km

مثال: مقیاس نقشه 5000 : 1 است. فاصله واقعی دو درخت 150 متر است. این فاصله روی نقشه چند سانتی متر می شود؟

حل:

اول 150 متر را به سانتی متر تبدیل می کنیم $150 \times 100 = 15000$ سانتی متر.

$15000 \div 5000 = 3$ سانتی متر.

جواب: 3cm

مثال (بزرگنمایی): تصویر یک حشره با مقیاس 1 : 10 کشیده شده است. طول حشره روی تصویر 45 میلی متر است. طول واقعی حشره چند میلی متر است؟
حل:

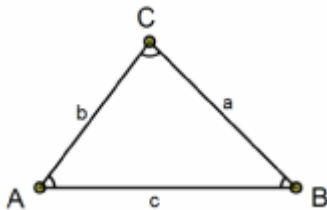
در مقیاس 1 : 10، هر 10 واحد روی تصویر برابر 1 واحد واقعی است.
پس طول واقعی = طول روی تصویر $4.5 = 45 \div 10$ میلی متر.
جواب: 4.5 mm

فصل سوم اشکال دو بعدی (Two Dimensional Shape)

شکل دو بعدی (2D Shape) که به آن شکل صفحه ای نیز می گویند، شکلی است که تنها دو بعد طول و عرض دارد و بر روی یک سطح کاملاً صاف (صفحه) گسترده شده است. این اشکال هیچ گونه عمق یا ضخامتی ندارند به طور مثال مربع، دایره، مستطیل و غیره. مشخصات اشکال دو بعدی:

1. ضلع (Side): خطوط مستقیمی هستند که پیکره و مرز شکل را می سازند.
2. زاویه (Angle): فضای بین دو ضلع که در یک نقطه به هم می رسند.
3. رأس (Vertex): نقطه ای که دو ضلع به هم می رسند (گوشه)
4. قطر (Diagonal): خطی که دو گوشه (رأس) غیر مجاور را به هم وصل می کند.
5. محیط (Perimeter): اندازه کل دور تا دور یک شکل.
6. مساحت (Area): میزان فضایی که سطح داخلی شکل اشغال کرده است.

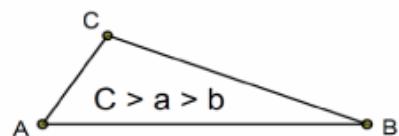
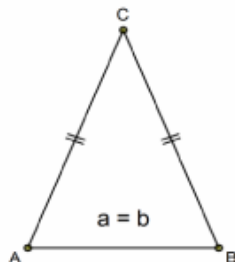
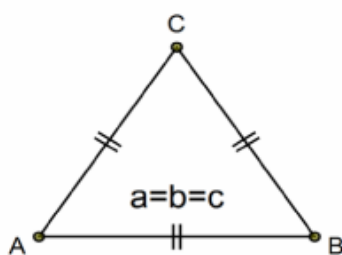
مثلت: مثلث شکلی هندسی است که از سه پاره خط تشکیل شده باشد، به طوری که این سه پاره خط، سه نقطه غیرهم خط (یعنی روی یک خط راست نباشند) را به یکدیگر وصل کنند. به عبارت ساده تر مثلث ساده ترین چندضلعی است و برای تشکیل آن کافی است سه نقطه که روی یک خط قرار نداشته باشد را به ترتیب توسط خط مستقیم به هم وصل کنیم.



$$\Delta_{ABC} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}, \hat{B}, \hat{C} & \text{ز و ایا} \\ a, b, c & \text{اضلاع} \end{cases}$$

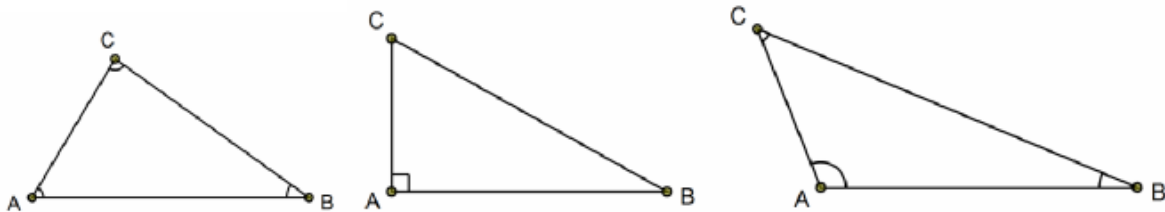
مثلث از لحاظ اضلاع به سه نوع ذیل تقسیم می شود:

1. مثلث متساوی الساقین: طول دو ضلع آن مساوی است.
2. متساوی الاضلاع: طول تمام اضلاع آن مساوی است.
3. مختلف الاضلاع: طول تمام اضلاع آن مساوی نمی باشد.



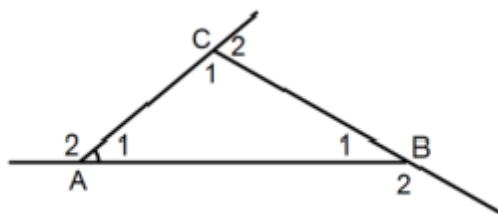
مثلث از لحاظ زاویه نیز به سه نوع تقسیم می‌شود:

1. مثلث حادالزاویه: تمام زاویه آن از 90 درجه کوچک می‌باشد.
2. مثلث قائم الزاویه: یک زاویه آن 90 درجه می‌باشد.
3. منفرجه الزاویه: یک زاویه آن بزرگتر از 90 درجه می‌باشد.



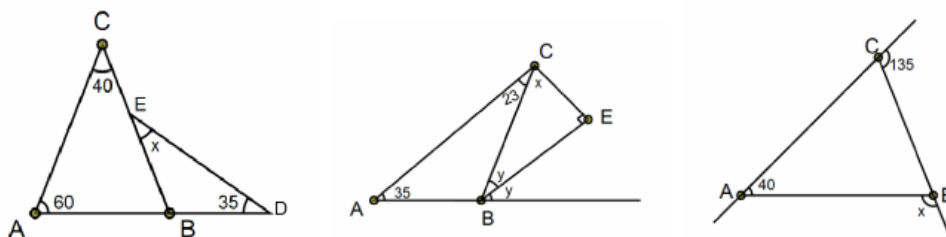
مجموع زوایای داخلی مثلث: حاصل جمع زاویه های داخلی یک مثلث 180 درجه می‌باشد.

زاویه خارجی مثلث: زاویه است که از امتداد دادن یک ضلع مثلث به وجود می‌آید. در شکل ذیل زاویه های شماره 2 زاویه خارجی مثلث گفته می‌شود.



- مجموع زوایای خارجی یک مثلث 360 درجه می‌باشد.
- اندازه یک زاویه خارجی مثلث مساوی است به مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن.

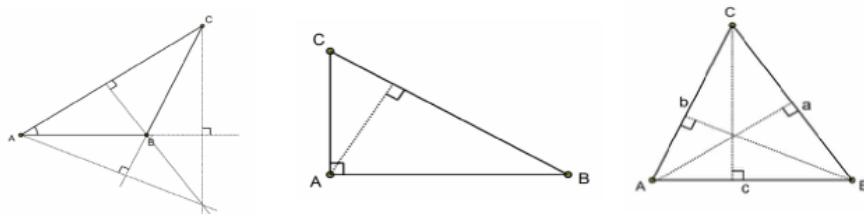
تمرین: در اشکال ذیل قیمت های مجهول را دریافت نمایید.



اجزای فرعی یک مثلث: اجزای فرعی یک مثلث شامل ارتفاع، میانه، ناصف الزاویه و ناصف عمودی می‌باشد.

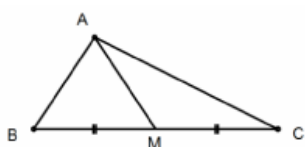
ارتفاع یک مثلث: خط است که از یک رأس بالای ضلع مقابل آن عمود رسم می‌گردد.

1. هر مثلث دارای سه ارتفاع است که همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند.
2. در مثلث حادالزاویه نقطه تقاطع ارتفاع ها در داخل مثلث است.
3. در مثلث قائم الزاویه نقطه تقاطع ارتفاع ها در روی رأس قائم قرار دارد.
4. در مثلث منفرج الزاویه نقطه تقاطع ارتفاع ها در خارج مثلث قرار دارد.



میانه مثلث: خطی است که نقطه تنصیف یک ضلع را به رأس مقابل آن وصل می کند.

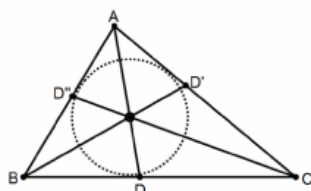
1. هر مثلث سه میانه دارد، که در یک نقطه همدیگر را قطع می کند که مرکز ثقل مثلث است.
2. محل تقاطع میانه های مثلث در داخل مثلث است.
3. هر میانه مثلث را به دو مثلث معادل (هم مساحت) تقسیم می کند.



$$BM = MC \Rightarrow S_{ABM} = S_{AMC}$$

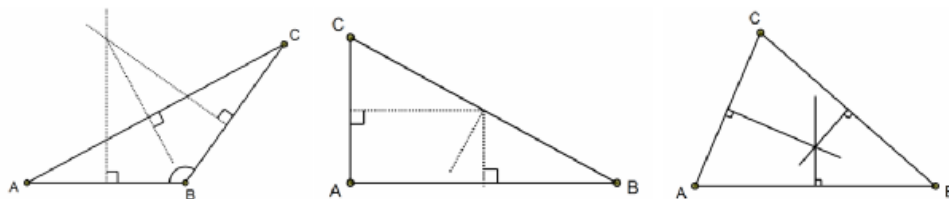
ناصف الزاویه: خطی است که زاویه مثلث را نصف می کند.

1. هر مثلث سه ناصف الزاویه دارد، که همدیگر را در یک نقطه قطع میکنند این نقطه مرکز دایره محاطی مثلث است یعنی هر سه ضلع فاصله مساوی دارد.
2. در تمام مثلث ها نقطه تقاطع ناصف الزاویه داخل مثلث است.



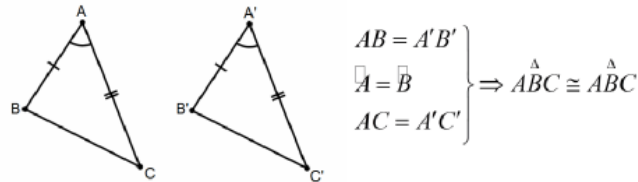
ناصف عمودی: خطی است که ضلع مثلث را عموداً نصف می کند.

1. هر مثلث سه ناصف الزاویه دارد که همدیگر را در یک نقطه قطع می نمایند.
2. نقطه تقاطع ناصف های عمودی در مثلث حاد الزاویه در داخل مثلث، در مثلث قائم الزاویه در نقطه تنصیف وتر و در مثلث منفرج الزاویه در خارج مثلث قرار دارد.

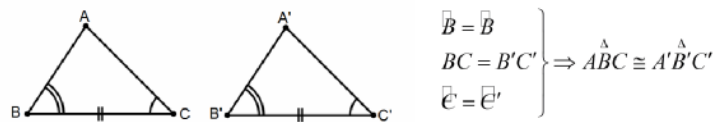


انطباق پذیری مثلث ها: دو شکل هندسی باهم انطباق پذیر است اگر تمام اجزای یک شکل (زاویه و ضلع) با اجزای شکل دیگر برابر باشد.

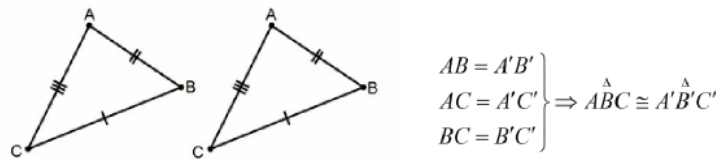
1. اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین از مثلث دیگر برابر باشد، مثلث ها با هم انطباق پذیر است.



2. اگر دو زاویه و یک ضلع از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر برابر باشد، مثلث ها با هم انطباق پذیر است.

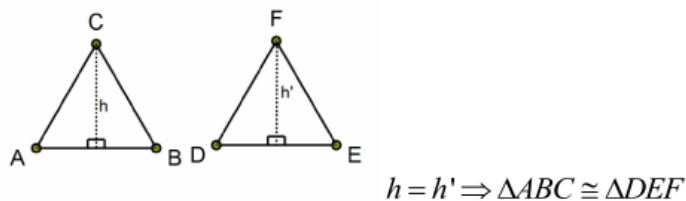


3. اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر برابر باشد، مثلث ها باهم انطباق پذیر است.



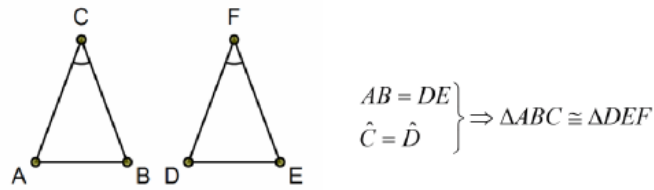
انطباق پذیری در مثلث متساوی الضلاع:

1. اگر یک ضلع از یک مثلث متساوی الضلاع با یک ضلع از مثلث متساوی الضلاع دیگر برابر باشد، باهم انطباق پذیر می باشد.
2. اگر ارتفاع یک مثلث متساوی الضلاع با ارتفاع مثلث متساوی الضلاع دیگر برابر باشد، باهم انطباق پذیر است.

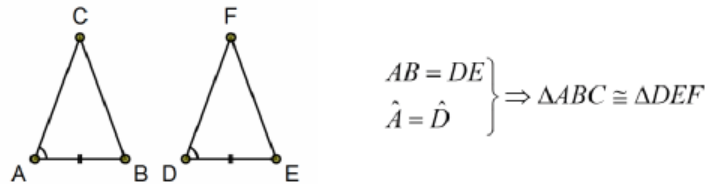


انطباق پذیری در مثلث های متساوی الساقین:

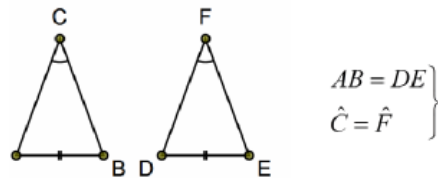
1. اگر ساق و زاویه بین دو ساق دو مثلث متساوی الساقین باهم برابر باشد مثلث ها باهم انطباق پذیر است.



2. اگر قاعده و یک زاویه مجاور قاعده در دو مثلث متساوی الساقین برابر باشد مثلث ها باهم انطباق پذیر است.

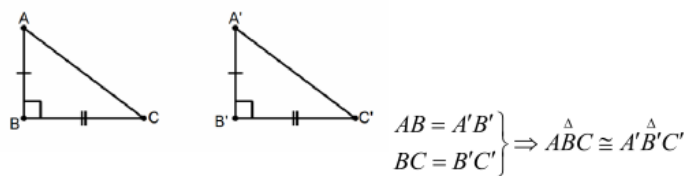


3. اگر قاعده و زاویه رأس در دو مثلث متساوی الساقین برابر باشد مثلث ها انطباق پذیر است.

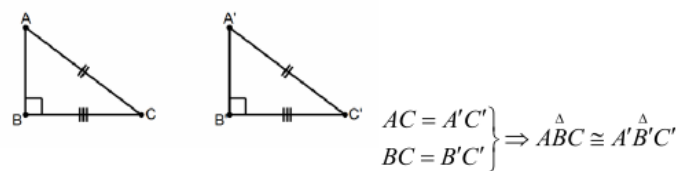


انطباق پذیری در مثلث های قائم الزاویه:

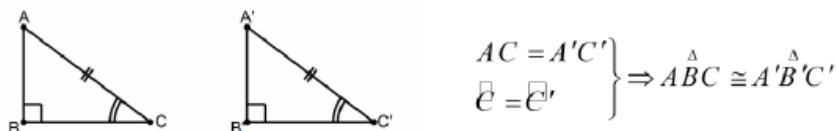
1. اگر اضلاع قائم دو مثلث قائم الزاویه با هم برابر باشد، مثلث ها انطباق پذیر است.



2. اگر وتر و یک ضلع قائم در دو مثلث قائم الزاویه باهم برابر باشد مثلث ها انطباق پذیر است.



3. اگر وتر و یک زاویه حاده در دو مثلث قائم الزاویه باهم برابر باشد مثلث ها انطباق پذیر است.



نکات:

1. در هر مثلث مجموع طول دو ضلع از ضلع سوم بزرگتر است. (قضیه وجود مثلث)

مثال: کدام دسته از اعداد ذیل میتواند اضلاع یک مثلث باشد.

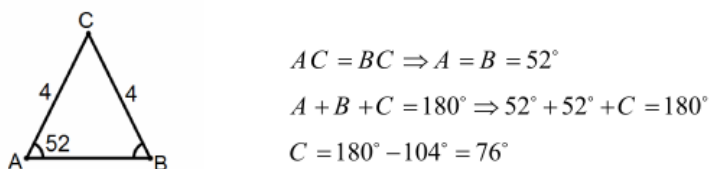
- (A) 2, 3, 6
(B) 2, 5, 7
(C) 2, 6, 7
(D) همه درست است.

حل: گزینه C و درست است. زیرا حاصل جمع دو ضلع آن از یک ضلع آن بزرگ میگردد.

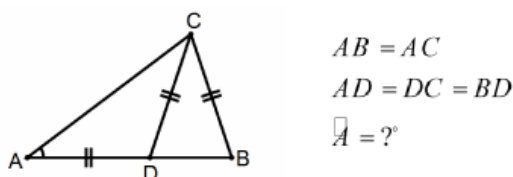
2. در هر مثلث در مقابل اضلاع مساوی زوایای مساوی و برعکس در مقابل زوایای مساوی اضلاع مساوی قرار دارد.

مثال: در مثلث ABC اگر $AC = BC$ و $\hat{A} = 52^\circ$ باشد، زاویه $\hat{C}$ را دریابید.

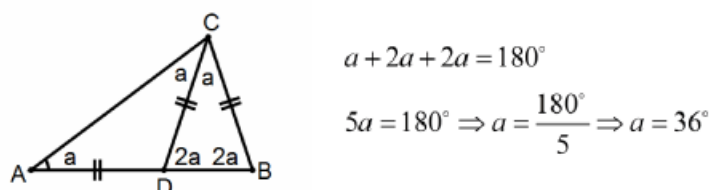
حل:



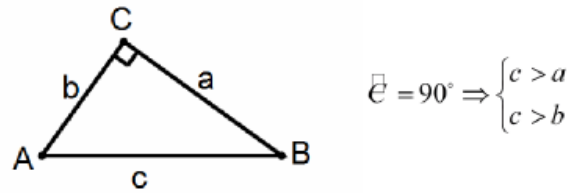
مثال: در شکل ذیل مثلث ها $\triangle ABC$ ، $\triangle DBC$ ، $\triangle ADC$ متساوی الساقین است وسعت زاویه $\hat{A}$ چند درجه است؟



حل:

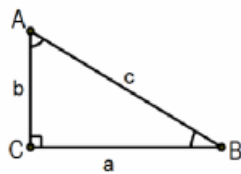


مثلث قائم الزاویه: مثلث است که یک زاویه آن قائمه (90 درجه) و دو زاویه آن حاده باشد، ضلع مقابل زاویه قائمه که بزرگترین ضلع مثلث که وتر، و اضلاع مقابل زوایای حاده اضلاع قائم مثلث است.



1. مجموع زاویه حاده مثلث قائم الزاویه 90 درجه است یعنی $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$.
2. در هر مثلث قائم الزاویه میانه مربوط به وتر نصف وتر است.

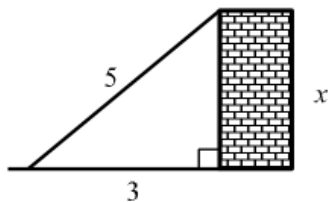
قضیه فیثاغورث: در مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساوی است به مجموع مربعات اضلاع قائم آن.



$$\hat{C} = 90^\circ \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

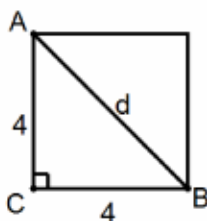
توجه: قضیه فیثاغورث بخاطر اهمیت زیاد آن تا کنون توسط دانشمندان زیادی به طریقه های مختلف ثبوت گردیده است که تعداد آن در حدود 370 طریقه می رسد.

مثال: در شکل ذیل زینه با زمین و دیوار مثلث قائم الزاویه را ساخته است، اگر طول زینه 5 متر و طول یک ضلع قائم آن 3 سانتی باشد، ارتفاع یعنی اندازه X را دریافت نمایید.



$$\begin{aligned} 3^2 + x^2 &= 5^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \\ &\Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} \\ &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

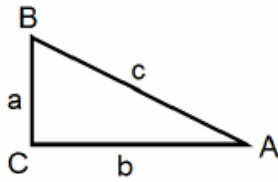
مثال: اگر طول یک ضلع یک مربع 4 واحد باشد قطر آن را محاسبه نمایید.



$$\begin{aligned} d^2 &= 4^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 16 + 16 \Rightarrow d^2 \\ &= 32 \Rightarrow d^2 = \sqrt{32} \Rightarrow \\ d &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

عکس قضیه فیثاغورث:

اگر مجموع مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به مربع ضلع سوم آن باشد، مثلث قائم الزاویه است.



$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

مثال: مثلثی به اضلاع $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ، $\overline{AC} = \sqrt{2}$ و $\overline{BC} = \sqrt{5}$ چه نوع مثلث است؟

حل: با در نظر داشت اندازه های اضلاع مثلث داریم:

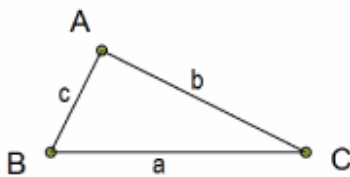
$$(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

پس مثلث فوق قائم الزاویه است.

تمرین: طول اضلاع یک مثلث قائم الزاویه، $2x + 1$ ، $2x - 1$ و x است ($x > 0$) طول ضلع متوسط را بدست آورید.

محیط مثلث:

محیط هر شکل هندسی، مجموع طول تمام قطعه های است که همان شکل را احاطه کرده است. در مثلث محیط را به $2p$ نشان می دهد.

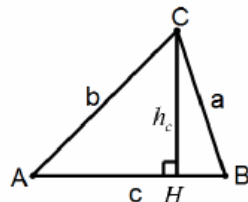


$$2p = a + b + c$$

یعنی p نصف محیط می باشد.

مساحت مثلث:

حالت اول: در صورت معلوم بودن یک ضلع و ارتفاع مربوط همان ضلع، مساحت مثلث برابر با نصف حاصل ضرب ضلع در ارتفاع است.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}AH \times AB$$

حالت دوم: اگر اتمام اضلاع آن معلوم باشد، برای دریافت مساحت مثلث از قاعده هرون استفاده می گردد.

$$2p = a + b + c \Rightarrow p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

مثال: مساحت مثلثی به اضلاع 6، 9 و 5 چند است؟

حل:

$$a = 9, b = 6, c = 2 \Rightarrow p = \frac{9 + 6 + 5}{2} = 10$$

$$S_{ABC} = \sqrt{10(10-9)(10-6)(10-5)} = \sqrt{10 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5} \Rightarrow S = 10\sqrt{2}$$

مثال: وتر یک مثلث قائم الزاویه $2\sqrt{13}$ و یک ضلع قائم آن 4 است مساحت مثلث را دریابید.

حل:

$$c = 2\sqrt{13}, a = 4, b = ?$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 4^2 + b^2 = (2\sqrt{13})^2 \Rightarrow b^2 = 52 - 16 = 36 \Rightarrow b = 6$$

$$S = \frac{1}{2}ab \Rightarrow S = \frac{1}{2}4 \cdot 6 \Rightarrow S = 12$$

مضلع‌ات (چندضلعی‌ها)

مضلع شکل بسته هندسی است که از اتحاد حداقل سه قطعه خط به وجود آمده باشد، طوریکه:

1. هیچ دو ضلع آن در امتداد یک خط مستقیم نباشد.
2. هر رأس تنها محل تقاطع دو ضلع باشد.
3. قطعه خط‌ها همدیگر را تنها در انجام‌ها قطع نماید.

هر مضلع با تعداد اضلاع آن **Type equation here** مشخص می‌گردد مانند مثلث (سه ضلعی)، چهار ضلعی، پنج ضلعی ... n ضلعی.

قطر مضلع:

قطر خط است که در رأس غیر مجاور به هم وصل می‌کند.

تعداد قطرهای n ضلعی: در یک مضلع از هر رأس می‌تواند به تمام رأس‌ها قطر رسم گردد به جزء سه رأس خود همان رأس و دو رأس مجاور آن، به صورت عموم تعداد قطرهای یک مضلع را از رابطه ذیل بدست می‌آوریم.

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

مثال تعداد قطر یک ده ضلعی چند است؟

حل:

$$n = 10, d = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow d = \frac{10(10-3)}{2} = 35$$

مجموع زوایای داخلی یک مضلع:

هر مضلع که n ضلع داشته باشد میتوان آنرا به $(n - 2)$ مثلث تقسیم نمود، میدانیم مجموع وسعت زوایای هر مثلث 180° است پس مجموع زوایای داخلی مضلع را از رابط ذیل بدست می آوریم.

$$S = (n - 2)180^\circ \text{ (مجموع زوایای داخلی مضلع } n \text{ ضلعی)}$$

مثال: مجموع زوایای داخلی یک 9 ضلعی چند است؟

حل:

$$n = 9 \Rightarrow S = (9 - 2)180^\circ \Rightarrow S = 1120^\circ$$

نوت: مجموع زوایای خارجی هر مضلع همیشه 360° است.

تمرین: مجموع زوایای داخلی در کدام مضلع 1620° است؟

چهار ضلعی های ویژه:

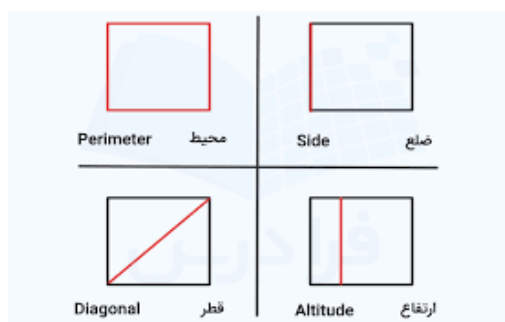
چهار ضلعی های ویژه شامل مربع، مستطیل، متوازی الاضلاع، لوزی و ذوزنقه است که مستطیل، مربع و لوزی را خانواده متوازی الاضلاع می گویند.

متوازی الاضلاع:

چهار ضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو باهم موازی باشد.

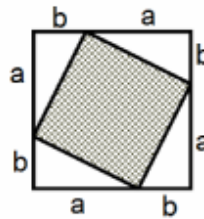
1. اضلاع متقابل متوازی الاضلاع باهم برابر اند.
2. زاویه های مقابل در متوازی الاضلاع با هم برابر است.
3. زاوایای مجاور در متوازی الاضلاع متمم هم است، یعنی حاصل جمع آن 180° میگردد.
4. در هر متوازی الاضلاع قطر ها همدیگر را نصف میکند.

مربع (Square): مربع منظم ترین شکل چهارضلعی است. به دلیل برابری تمام اجزایش، ساده ترین محاسبات را در هندسه دارد.



$$\begin{aligned}
 1. \quad P &= 4a \text{ محیط} \\
 2. \quad A &= a^2 \text{ مساحت} \\
 3. \quad A &= \frac{d^2}{2} \text{ مساحت} \\
 &\text{قطر های مربع بالا هم عمود} \\
 &\text{و همدیگر را نصف میکنند}
 \end{aligned}$$

مثال: در شکل مقابل مساحت قسمت رنگ شده را دریابید، اگر شکل یک مربع باشد.

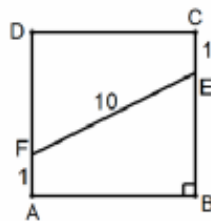


حل: اگر از مساحت مربع مساحت چهار مثلث قائم الزاویه برابر را تفریق نماییم مساحت قسمت رنگ شده بدست می آید.

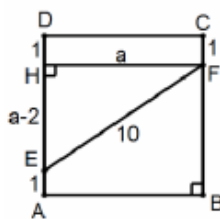
$$S = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

$$S = a^2 + b^2$$

مثال: شکل مقابل یک مربع است مساحت آن چند است؟



حل:

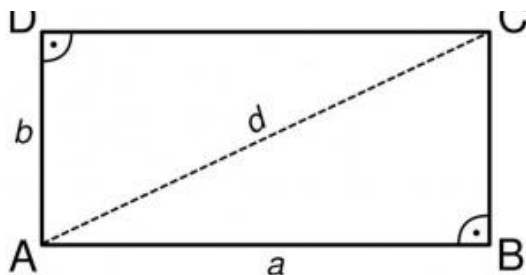


$$a^2 + (a-2)^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + a^2 - 4a + 4 = 100$$

$$2a^2 - 4a - 96 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 48 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -6 \\ a_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 8 \Rightarrow S = 64$$

مستطیل (Rectangle): مستطیل یک چهارضلعی است که تمام زوایای آن ۹۰ درجه است، اما برخلاف مربع، لزوماً همه اضلاع آن برابر نیستند ولی دو به دو باید باهم برابر باشد.



$$4. \text{ محیط } P = 2(a + b)$$

$$5. \text{ مساحت } A = a \times b$$

قطر های مستطیل بالا هم عمود.

مثال: مساحت مستطیل که طول آن دو چند عرض و عدد محیط و مساحت آن باهم برابر است چند است.

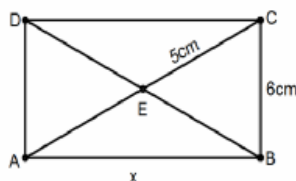
حل:

$$a = 2b, a \cdot b = 2(a + b)$$

$$\Rightarrow 2b \cdot b = 2(2b + b) \Rightarrow b^2 = 3b \Rightarrow b^2 - 3b = 0 \Rightarrow b(b - 3) = 0 \Rightarrow b = 3, a = 6$$

$$\Rightarrow S = ab = 3 \cdot 6 = 18$$

مثال: در مستطیل مقابل طول مجهول را دریابید.



$$BC = 6cm, EC = AE = 5cm \Rightarrow d = 10cm$$

$$\Rightarrow d^2 = x^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = d^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow x = 8$$

لوزی: لوزی تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد.

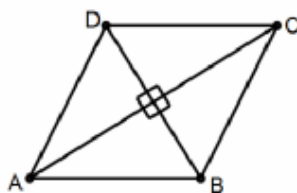
1. در لوزی قطر ها بر هم عمود است.

2. در لوزی قطر ها ناصف الزاویه است.

3. در هر لوزی اگر a طول یک ضلع و d قطر باشد، پس:

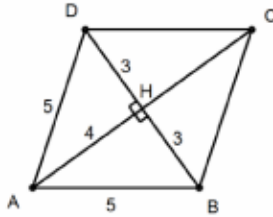
$$P = 4a$$

$$S = a \cdot h = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$$



مثال: اگر یک ضلع لوزی 5 سانتی و قطر کوچک آن 6 سانتی متر باشد، مساحت آنرا دریافت نمایید.

حل:

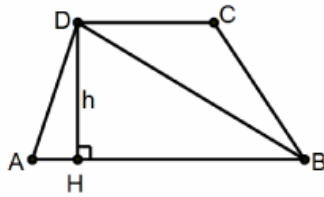


$$S_{ABD} = S_{BDC} = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 24 \text{ cm}^2$$

ذوزنقه: چهار ضلعی است که تنها دور ضلع با هم موازی است، اضلاع موازی قاعده های ذوزنقه و اضلاع ها غیر موازی آن ساق های ذوزنقه است.

مساحت ذوزنقه مساوی است به نصف حاصل ضرب مجموع قاعده ها در ارتفاع ذوزنقه.



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DCB} = \frac{1}{2} AB \cdot h + \frac{1}{2} DC \cdot h$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} h (AB + DC)$$

مثال: قاعده های یک ذوزنقه 6 و 8 سانتی متر است، اگر مساحت آن 35 cm^2 باشد ارتفاع ذوزنقه چند است؟

حل:

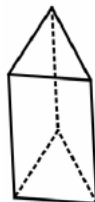
$$a = 6 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm}, S = 35 \text{ cm}^2$$

$$S = \frac{1}{2} h (a + b) \Rightarrow 35 \text{ cm}^2 = \frac{1}{2} h (6 \text{ cm} + 8 \text{ cm}) \Rightarrow 35 \text{ cm}^2 = h \cdot 7 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow h = 5 \text{ cm}$$

منشور: منشور چند وجهی است که دارای دو وجه کاملاً مساوی یا انطباق پذیر و موازی باشد و خط الرأس های موازی این قاعده را به هم وصل می کند که وجه جانبی منشور متوازی الاضلاع یا مستطیل است.

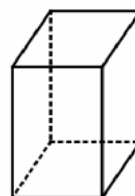
1. قاعده های منشور در مستوی ها موازی قرار دارد.
2. تمام وجه های جانبی منشور موازی الاضلاع و در حالت خاص مستطیل است.
3. طول تمام خط الرأس ها جانبی منشور باهم برابر است.
4. هر منشور توسط نوعیت قاعده آن مشخص می شود.



منشور مثلث القاعده



منشور پنج ضلع

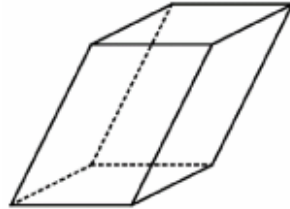


مكعب مستطیل

ارتفاع منشور: فاصله بین قاعده های منشور ارتفاع منشور است.

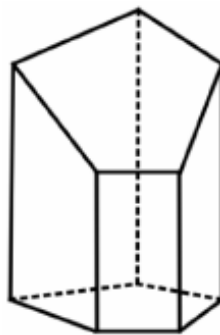
منشور قائم: منشور است که تمام وجه های آن مستطیل باشد که در منشور ارتفاع با خط الرأس های جانبی منشور برابر است، مانند منشور های بالا.

منشور مایل: منشور است که وجه های جانبی آن متوازی الضلاع است.

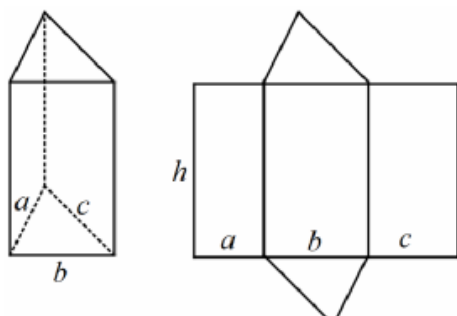


منشور منظم: منشور است که قاعده های آن مضلعات منظم باشد مانند مکعب مستطیل.

منشور ناقص: منشور است که قاعده های آن باهم موازی نباشد ناقص است، در منشور ناقص قاعده ها انطباق پذیر نیست و تمام وجه های جانبی ذوزنقه است.



مساحت جانبی منشور قائم: در منشور قائم تمام وجه های جانبی مستطیل است که مساحت جانبی آن منشور را می توان از حاصل ضرب محیط قاعده در ارتفاع بدست آورد.



$$\text{مساحت جانبی} = h(a + b + c)$$

$$S = p \cdot h \quad \text{یا}$$

مساحت کلی: مساحت کلی منشور قائم برابر به مجموع مساحت جانبی و قاعده های منشور است.

$$A = 2B + S$$

مساحت جانبی + مساحت قاعده ها = مساحت کلی

حجم منشور: حجم منشور از حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع منشور بدست می آید.

$$V = B \cdot h$$

ارتفاع $\times$ مساحت قاعده = حجم

مثال: مساحت جانبی منشور قائم را در یابید که قاعده آن پنج ضلعی منظم به طول 3 و ارتفاع 5 واحد باشد.

حل:

$$a = 3, h = 5 \Rightarrow p = 5a = 5 \cdot 3 \Rightarrow p = 15$$

$$S = ph = 15 \cdot 5 \Rightarrow S = 75$$

مثال: حجم منشور قائمی که قاعده آن شش ضلعی منظمی به ضلع 3 و ارتفاع آن 10 باشد چند است.

حل: یک شش ضلعی منظم از شش مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است پس مساحت آن $B = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ است.

$$a = 3, h = 10 \Rightarrow B = \frac{3\sqrt{3}}{2} (3)^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$

$$V = Bh = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 10 \Rightarrow V = 135 \cdot \sqrt{3}$$

متوازی السطوح: متوازی السطوح منشور است که قاعده آن متوازی الضلاع باشد. متوازی السطوح دارای شش وجه و 8 رأس دارد.

1. تمام وجه های متوازی السطوح متوازی الضلاع است.
2. وجه های متقابل باهم مساوی و در مستوی های موازی قرار دارد.
3. قطر ها همدیگر را نصف میکند.

در متوازی السطوح قائم تمام وجه ها مستطیل است.

مثال: طول دو ضلع مجاور قاعده متوازی السطوح قائم 12 و 8 سانتی متر است مساحت جانبی آن چند است.

حل: چون متوازی السطوح نوع از منشور است و در مثال نوع آن هم قائم در این صورت وجه های آن مستطیل است پس داریم:

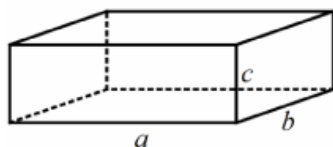
$$\left. \begin{array}{l} P = 2(12+8) \Rightarrow P = 40cm \\ h = 10cm \end{array} \right\} \Rightarrow S = ph = 40 \cdot 10 = 400$$

مکعب مستطیل: منشور قائم است که قاعده های آن مربع یا مستطیل باشد، یا مکعب مستطیل شش وجهی است که تمام وجه آن مستطیل است.

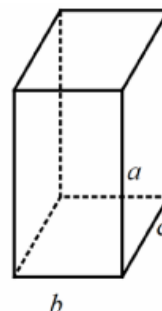
1. خط الرأس های مکعب مستطیل چهار به چهار باهم موازی است.
2. وجه های مقابل مکعب مستطیل در مستوی های موازی قرار دارد.
3. همه قطر های مکعب مستطیل با هم برابر است و همدیگر را نصف می کند.

اگر اضلاع قاعده مکعب مستطیل a, b و ارتفاع آن c باشد مساحت جانبی و کلی آن طوری ذیل بدست می آید.

$$\left. \begin{array}{l} p = 2(a+b) \\ h = c \end{array} \right\} \Rightarrow S = ph = 2(a+b)c \Rightarrow S = 2c(a+b)$$



$$S = 2a(b+c)$$

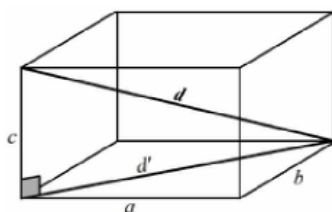


$$S = 2a(b+c)$$

$$A = 2(ab + ac + bc) \text{ مساحت کلی}$$

$$V = abc \text{ حجم}$$

قطرهای مکعب مستطیل: با استفاده از قضیه فیثاغورت به طوری ذیل بدست می آید.



$$(d')^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = (d')^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

مثال: اگر اضلاع قاعده یک مکعب مستطیل 6، 4 و ارتفاع آن 3 باشد مساحت جانبی، مساحت کلی، حجم و طول قطر آن را دریابید.

حل:

$$a = 4, b = 6, c = 3$$

$$1) S = 2c(a+b) = 2 \cdot 3(4+6) \Rightarrow S = 60$$

$$2) A = 2(ab + ac + bc) = 2(4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3) = 2(24 + 12 + 18) \Rightarrow A = 108$$

$$3) V = abc = 4 \cdot 6 \cdot 3 \Rightarrow V = 72$$

$$4) d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 36 + 9} \Rightarrow d = \sqrt{61}$$

مثال: حجم یک مکعب مستطیل 192 cm^3 است، اگر ابعاد آن با اعداد 2، 3 و 4 متناسب باشد طول اضلاع آن چند است.

حل:

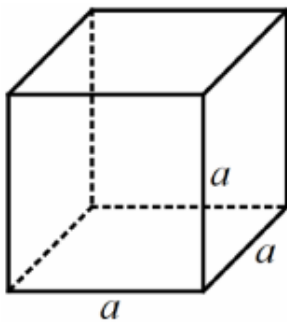
$$a:b:c = 2:3:4 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow a = \frac{c}{2}, b = \frac{3c}{4}$$

$$V = abc \Rightarrow 192 = \frac{c}{2} \cdot \frac{3c}{4} \cdot c \Rightarrow 512 = c^3 \Rightarrow c = 8$$

$$\Rightarrow c = 8, b = 6, a = 4$$

مکعب: شش وجهی منظمی که تمام وجه های آن مربع است.

1. تمام وجه های مکعب با هم برابر و تمام خط الرأس های آن باهم برابر است.
2. در مکعب وجه های مقابل در مستوی های موازی قرار دارد.
3. مکعب چهار قطر برابر دارد که همدیگر را نصف می کند.
4. در مکعب هر دو وجه مقابل می تواند قاعده باشد.



$$S = 4a^2 \text{ مساحت جانبی}$$

$$A = 6a^2 \text{ مساحت کلی}$$

$$V = a^3 \text{ حجم}$$

$$d = \sqrt{3}a \text{ قطر}$$

مثال: اگر طول یک ضلع مکعب 4 باشد مساحت جانبی، مساحت کلی، حجم و طول قطر آن را دریابید.

حل:

$$a = 4$$

$$1) \quad S = 4a^2 = 4(4)^2 \Rightarrow S = 64$$

$$2) \quad A = 6a^2 = 6(4)^2 \Rightarrow A = 96$$

$$3) \quad V = a^3 = (4)^3 \Rightarrow V = 64$$

$$4) \quad d = \sqrt{3}a \Rightarrow d = 4\sqrt{3}$$

مثال: مقدار عددی حجم و مساحت کلی یک مکعب با هم برابر است طول ضلع آن چند است.

حل:

$$A = V \Rightarrow 6a^2 = a^3 \Rightarrow a = 6$$

مثال: مساحت کلی یک مکعب 24cm^2 است قطر آن چند است؟

حل:

$$A = 24\text{cm}^2 \Rightarrow 6a^2 = 24\text{cm}^2 \Rightarrow a^2 = 4$$

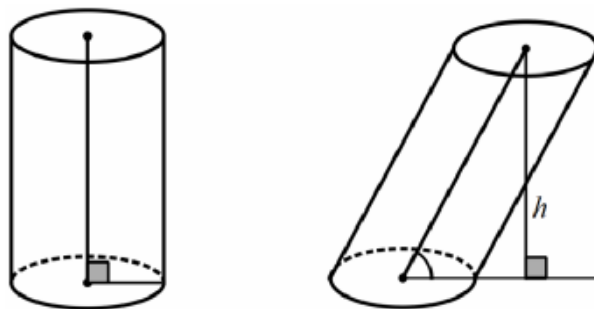
$$a = 2$$

$$d = \sqrt{3}a \Rightarrow d = 2\sqrt{3}$$

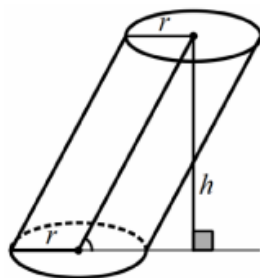
استوانه: شبیه منشور است که قاعده آن به عوض چند ضلعی یک دایره است.

محور استوانه: خط که مرکز قاعده های استوانه را به هم وصل میکند.

استوانه قائم: اگر محور یک استوانه بالای مستوی قاعده عمود باشد استوانه قائم و اگر عمود نباشد استوانه مایل است.



استوانه یک نوع از منشور است پس مساحت جانبی، مساحت کلی و حجم آن مانند منشور محاسبه میگردد.



$$S = Ph = 2\pi rh$$

$$A = 2B + S = 2(\pi r^2) + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$$

$$V = Bh = \pi r^2 h$$

مثال: حجم و مساحت جانبی استوانه را دریابید که شعاع آن 2 و ارتفاع آن با قاعده برابر باشد.

$$r = 2cm, h = 2r = 4cm$$

$$S = 2\pi rh = 2\pi(2)(4) = 16\pi cm^2$$

$$V = \pi r^2 h = \pi(2)^2(4) = 16\pi cm^3$$

تبدیل واحدها اندازه گیری طول، مساحت، حجم و کتله

سیستم اندازه گیری متریک بر اساس توان های 10 بنا شده است. هر واحد بزرگتر، 10، 100 یا 1000 برابر واحد کوچکتر است. این اصل، محاسبات را بسیار ساده می کند.

اندازه گیری طول (Length): واحد اصلی طول متر (m) است که اجزا و اضعاف آن در جدول آورده شده است.

واحد	نماد	تبدیل به متر
کیلومتر	km	1 km = 1000 m
هکتومتر	hm	1 hm = 100 m
دکامتر	dam	1 dam = 10 m
متر	m	1 m
دسیمتر	dm	1 m = 10 dm
سانتیمتر	cm	1 m = 100 cm
میلی متر	mm	1 m = 1000 mm

برای تبدیل از واحد بزرگتر به کوچکتر، ضرب می کنیم. از کوچکتر به بزرگتر، تقسیم می کنیم.

مثال: 3.5 km را به متر تبدیل کنید.

$$3.5 \times 1000 = 3500 \text{ m}$$

مثال: 450 cm را به متر تبدیل کنید.

$$450 \div 100 = 4.5 \text{ m}$$

اندازه گیری مساحت (Area) : واحد اصلی مساحت متر مربع m^2 است.

تبدیل طول	تبدیل مساحت
1 cm = 10 mm	1 cm ² = 100 mm ²
1 m = 100 cm	1 m ² = 10,000 cm ²
1 m = 1000 mm	1 m ² = 1,000,000 mm ²
1 km = 1000 m	1 km ² = 1,000,000 m ²

مثال: 3 m² را به cm² تبدیل کنید.

$$3 \times 10,000 = 30,000 \text{ cm}^2 \quad \text{پس: } 1 \text{ m}^2 = 10,000 \text{ cm}^2$$

مثال: 50,000 mm² را به cm² تبدیل کنید.

$$50,000 \div 100 = 500 \text{ cm}^2 \quad \text{پس: } 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

اندازه گیری حجم (Volume) : واحد اصلی : متر مکعب (Cubic Meter - m³) و لیتر (Liter - L) برای مایعات.

تبدیل واحد حجم، مکعب تبدیل واحد طول است. یعنی اگر در طول، 1 m = 100 cm، در حجم: 1 m³ = 1,000,000 cm³ (100)³.

تبدیل طول	تبدیل حجم (مکعب)
1 cm = 10 mm	1 cm ³ = 1000 mm ³
1 m = 100 cm	1 m ³ = 1,000,000 cm ³

رابطه بین حجم و گنجایش Capacity:

$$1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL (میلی لیتر)}$$

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ Litre (L)}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ Litres}$$

مثال: 2.5 m^3 را به Liter تبدیل کنید.

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L} \rightarrow 2.5 \times 1000 = 2500 \text{ L}$$

مثال 3000 cm^3 : را به Liter تبدیل کنید.

$$1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L} \rightarrow 3000 \div 1000 = 3 \text{ L}$$

اندازه گیری جرم (Mass) : واحد اصلیان کیلوگرم (kg - Kilogram) در سیستم متریک، واحد اصلی کتله گرم (g) است اما از kg به عنوان اصلی به طور زیاد استفاده می گردد.

واحد	نماد	تبدیل به گرم	تبدیل به کیلوگرم
تن (Metric Tonne)	t	1,000,000 g	1000 kg
کیلوگرم	kg	1000 g	1 kg
گرم	g	1 g	0.001 kg
میلی گرم	mg	0.001 g	0.000001 kg

$$1 \text{ tonne (t)} = 1000 \text{ kg}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$$

$$1 \text{ g} = 1000 \text{ mg}$$

مثال: 3.2 kg را به g تبدیل کنید.

$$3.2 \times 1000 = 3200 \text{ g}$$

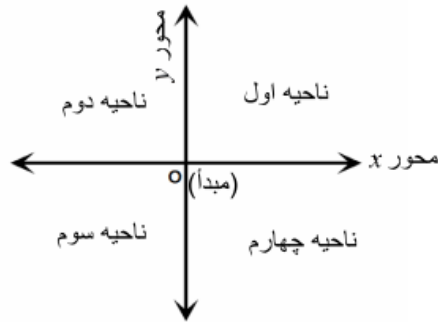
مثال: 4500 mg را به g تبدیل کنید.

$$4500 \div 1000 = 4.5 \text{ g}$$

سیستم مختصات کارتی (دو یا کمیات وضعیه

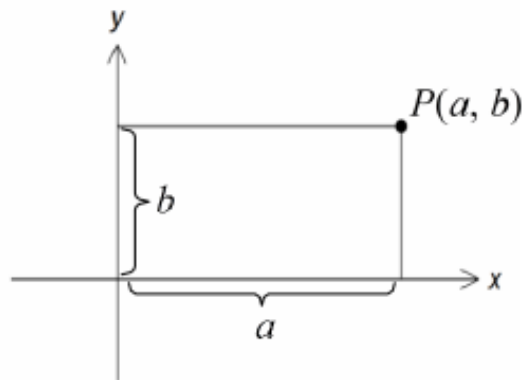
سیستم کمیات وضعیه از دو خط متقاطع، عمودی و افقی تشکیل شده است. به خط افقی محور x و به خط عمودی محور y گفته میشود. نقطه تقاطع هر دو محور مرکز (مبدأ) سیستم است.

اعداد حقیقی که در قسمت راست محور x و قسمت بالای محور y قرار دارد مثبت است. اعداد که در قسمت چپ محور x و سمت پایین محور y قرار دارد منفی است.

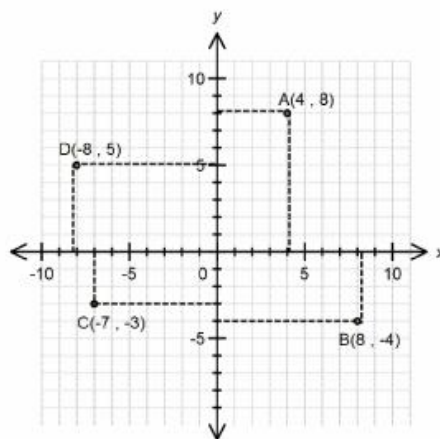


تعیین موقعیت یک نقطه بروی سیستم کمیات وضعیه:

هر نقطه روی سیستم کمیات وضعیه توسط جوهر مرتب (x, y) تعیین می‌شود که به این جوهر مرتب مختصات نقطه مذکور گفته می‌شود. برای نشان دادن نقطه $p(x, y)$ روی سیستم کمیات وضعیه یک خط عمود روی محور x در نقطه $x=a$ ، و یک خط عمود روی محور y در نقطه $y=b$ ، ترسیم می‌نماییم محل تقاطع این دو خط نشان دهنده نقطه P است.



مثال: نقاط $A(4, 8)$ و $B(8, -4)$ و $C(-7, -3)$ و $D(-8, 5)$ را روی سیستم کمیات وضعیه نشان دهید.



مختصات مبدأ سیستم مختصات کمیات وضعیه $O(0,0)$ است.

تمام نقاط روی محور x مختصات آن به صورت $(a, 0)$ است.

تمام نقاط روی محور y مختصات آن به صورت $(0, b)$ است.

فاصله بین دو نقطه: برای دریافت فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه ذیل بدست می‌آید.

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال: فاصله بین نقاط $A(3, 3)$ و $A(-4, 6)$ چند است؟

حل:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(6-3)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{9+49} \\ AB &= \sqrt{58} \end{aligned}$$

مثال: اگر نقاط $A(3, 8)$ ، $B(-11, 3)$ و $A(-8, -2)$ رأس‌های یک مثلث باشد نوعیت مثلث ABC را مشخص نمایید.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-11-3)^2 + (3-8)^2} = \sqrt{196+25} = \sqrt{221} \\ AC &= \sqrt{(-8-3)^2 + (-2-8)^2} = \sqrt{121+100} = \sqrt{221} \\ BC &= \sqrt{(-8-(-11))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34} \end{aligned}$$

چون $AB=AC$ است پس مثلث متساوی الساقین است.

مختصات نقطه تنصیف یک خط: اگر نقطه $A(x_1, y_1)$ مبدأ و نقطه $B(x_2, y_2)$ انجام یک قطعه خط باشد در این صورت مختصات نقطه وسطی یا تنصیف از رابطه ذیل بدست می‌آید.

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

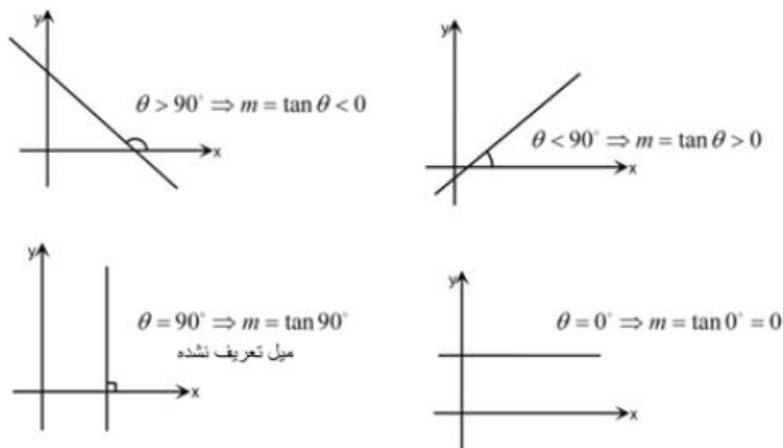
مثال: اگر $A(-3, 4)$ ، $B(5, 2)$ نقاط مبدأ و انجام یک قطعه خط باشد، نقطه تنصیف آنرا دریابید.

حل:

$$M(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \Rightarrow M(x, y) = \left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{4 + 2}{2} \right) = \left(\frac{2}{2}, \frac{6}{2} \right) = (1, 3)$$

میل خط مستقیم: عبارت از تانجنت زاویه میل است.

زاویه میل: زاویه است که خط مستقیم با جهت مثبت محور x می‌سازد.



دریافت میل خط مستقیم: اگر نقطه $A(x_1, y_1)$ مبدا و نقطه $B(x_2, y_2)$ انجام یک قطعه خط باشد در این صورت میل این خط از رابطه ذیل بدست می آید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: میل خط مستقیم را دریابید که از نقاط $A(2,4)$ ، $B(6,10)$ می گذرد.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{10 - 4}{6 - 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

مثال: نشان دهید که نقاط $A(-3,6)$ ، $B(3,2)$ و $A(6,0)$ بالای یک خط مستقیم قرار دارد.

حل: هر سه نقطه زمانی روی یک خط مستقیم قرار دار که میل AB با میل خط CB برابر باشد.

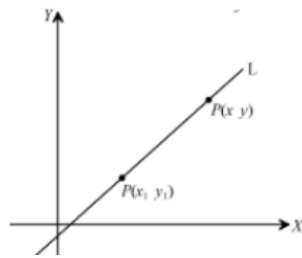
$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{6-2}{-3-3} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3} \\ m_{BC} &= \frac{2-0}{3-6} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AB} = m_{BC}$$

نکات:

1. اگر دو خط موازی باشد، آنگاه میل های آن باهم برابر است. $m_1 = m_2$
2. اگر دو خط باهم عمود باشد حاصل ضرب میل های آن مساوی به منفی یک است. $m_1 \cdot m_2 = -1$

معادله خط مستقیم: هر خط از بی نهایت نقاط بوجود آمده است که هر کدام دارای مختصات مختلف است. معادله یک خط مستقیم رابطه الجبری است که، اگر مختصات هر نقطه از خط را در رابطه وضع نماییم علامه مساوات تغییر نکند. معادله یک خط مستقیم را می توانیم در حالت های مختلف دریافت نماییم.

معادله خط مستقیم که میل و یک نقطه آن معلوم باشد.



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

نوت: در صورت معلوم بودن میل و نقطه تقاطع آن با محور y می توان معادله را به صورت:

$$y = mx + c$$

که c نقطه تقاطع با y را مشخص میکند.

مثال: معادله خط مستقیمی را پیدا کنید که شیب یا میل آن 2 است و از نقطه $(1, 3)$ می گذرد.

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 3 \Rightarrow y = 2x + 1$$

شکل معادله خط مستقیمی که میل و تقاطع آن با محور y معلوم باشد.

$$y = mx + c$$

$$m = 2 \Rightarrow \text{شیب،}$$

$$y = 2x + c$$

نقطه $(1, 3)$ روی خط قرار دارد. پس $x = 1$ و $y = 3$ را در معادله جایگزین می کنیم:

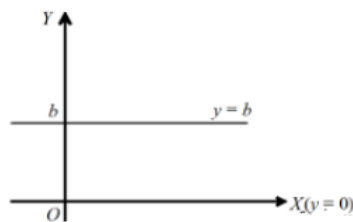
$$3 = 2 \times 1 + c \Rightarrow c = 1$$

پس معادله چنین است:

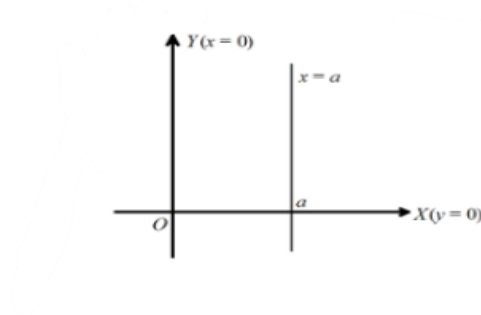
$$y = 2x + 1$$

نکات:

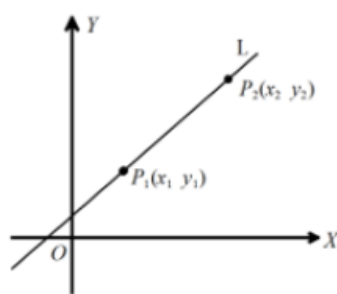
اول: اگر یک خط مستقیم با محور x موازی باشد، میل آن صفر و معادله آن $y = b$ است.



دوم: اگر یک خط بالای محور x عمود یعنی با y موازی باشد، معادله آن $x = a$ است.



معادله خط مستقیم که دو نقطه آن معلوم باشد: اگر نقطه $A(x_1, y_1)$ مبدا و نقطه $B(x_2, y_2)$ انجام یک قطعه خط باشد در این صورت معادله این خط از رابطه ذیل بدست می آید.



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

مثال: معادله مستقیمی را دریافت نمایید که از نقاط $A(-2, 1)$ ، $B(6, -4)$ می گذرد.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \Rightarrow y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)} (x - (-2)) \Rightarrow y - 1 = \frac{-5}{8} (x + 2) \Rightarrow$$

$$8y - 8 = -5x - 10 \Rightarrow 8y = -5x - 2 \Rightarrow y = \frac{-5}{8}x - \frac{1}{4}$$

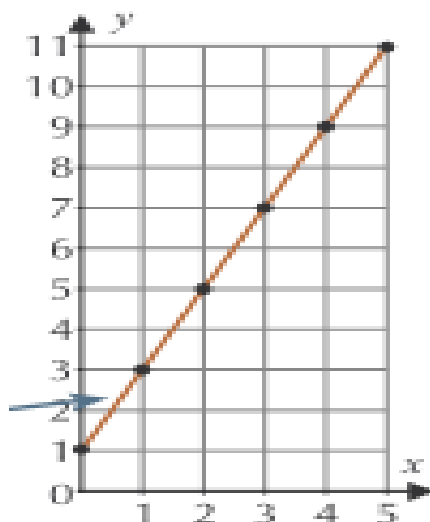
میل خط فوق $\frac{-5}{8}$ و محور y را در نقطه $-\frac{1}{4}$ قطع میکند.

گراف خط مستقیم: خط مستقیم از بی نهایت خط ساخته شده برای ترسیم گراف معادله خط مستقیم چند نقطه طوری که برای x قیمت داده و آنرا نظر به معادله برای y محاسبه می نماییم.

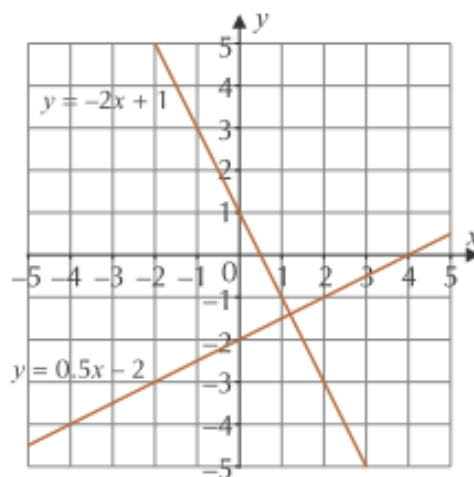
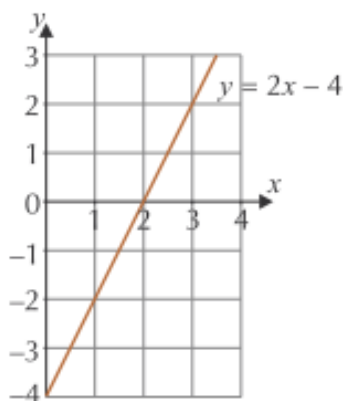
مثال: گراف معادله خط مستقیم $y = 2x + 1$ را رسم نمایید.

حل:

x	0	1	2	3	4	5
$y = 2x + 1$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	$2 \cdot 4 + 1 = 9$	$2 \cdot 5 + 1 = 11$



مثال: بعضی معادلات همراهی گراف آن در ذیل نمایش داده شده است.



حل سیستم معادلات با استفاده از گراف: سیستم معادلات روش های حل زیاد دارد یک روش آن ترسیم گراف می باشد.

گراف هر معادله را به طور جداگانه در یک سیستم کمیات وضعیه ترسیم نموده نقطه تقاطع گراف ها حل سیستم معادلات فوق میگویند.

مثال: سیستم معادله ذیل را حل نمایید.

$$y = 2x + 2 \quad (I)$$

$$y = 8 - x \quad (II)$$

حل: گراف هر دو معادله را در یک سیستم مختصات رسم می نمایم.

$$y = 8 - x$$

x	0	4	8
y	8	4	0

$$y = 2x + 2$$

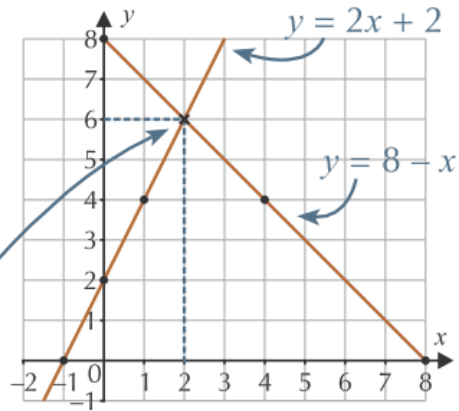
x	-1	0	1
y	0	2	4

The graphs cross at $(2, 6)$.

So the solution is

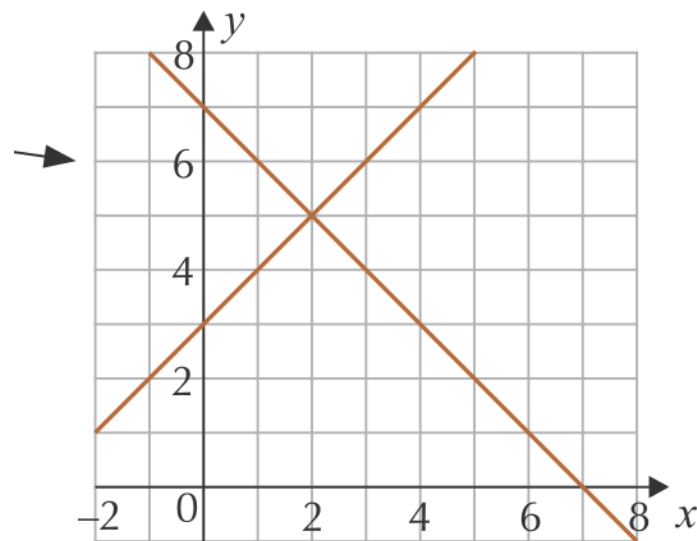
$x = 2$ and $y = 6$.

$$8 - 2 = 6 \checkmark \text{ and } 2 \times 2 + 2 = 4 + 2 = 6 \checkmark$$



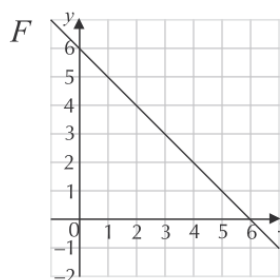
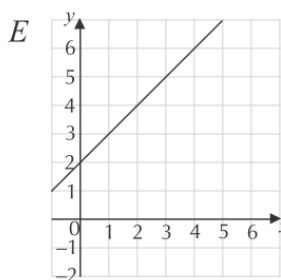
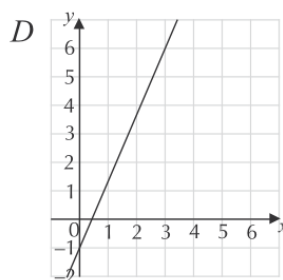
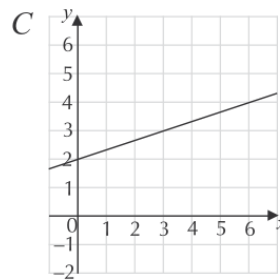
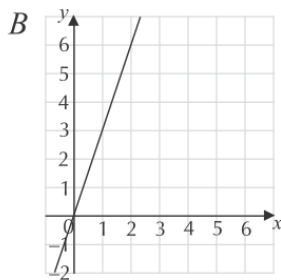
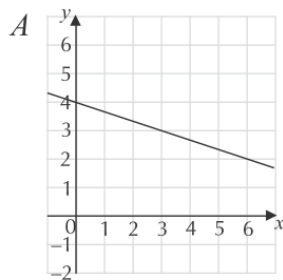
مسایل:

- گراف ذیل مربوط به سیستم معادله
- (I) $y = x + 3$
- (II) $y = -x + 7$
- است حل آنرا دریاف نمایید.



هر یک از معادلات ذیل را با گراف مربوط آن وصل نمایید.

$$y = x + 2 \quad y = \frac{7}{3}x - 1 \quad y = -x + 6 \quad y = 3x \quad y = -\frac{1}{3}x + 4 \quad y = \frac{1}{3}x + 2$$



احصایه Statistics: احصایه به مجموع روش های علمی گفته می شود که برای جمع آوری اطلاعات، ترتیب و تنظیم اطلاعات، تجزیه و تحلیل اطلاعات مربوط به یک موضوع که از مشاهده، تجربه و مصاحبه بدست می آید، سروکار دارد.

مفاهیم اولیه احصایه:

مشاهده (Data): معلومات جمع آوری شده در یک موضوع مشخص را دیتا میگویند

جامعه (Population): دسته یا مجموعه از افراد و یا اشیا که ما میخواهیم در باره آن اطلاعات جمع آوری نماییم و یا به عبارت دیگر مجموعه از اشیا یا عناصر که حد اقل یک صفت مشترک داشته باشد.

نمونه (Sample): بخشی از جامعه به طوری که تمام خواص جامعه را داشته باشد.

صفت: هر خاصیت که باعث تفکیک عناصر یک جامعه می شود.

1. **صفت ثابت:** بین همه عناصر جامعه آماری مشترک باشد. مثلاً در جامعه شاگردان مکتب، شاگرد بودن یک صفت مشترک است.

2. **صفت متغیر (متحول):** صفت یا مشخصه از افراد جامعه که مورد بررسی قرار میگیرد. این مشخصه به این علت که از هر عضو جامعه به عضو دیگر، تغییر میکند. xi

به طور مثال اگر مسئله احصایوی ما بررسی رنگ موی اهالی شهر کابل باشد، رنگ متحول است که ما میخواهیم معلومات جمع آوری نماییم مانند؛ سیاه، خرمایی، زرد،...

مثال: اداره مکتب استقلال میخواهد طول قد شاگردان صنف دوازدهم را بررسی نماید، در این مسئله:

جامعه: شاگردان صنف دوازدهم.

نمونه: بخش شاگردان که به طور نمونه قد آن اندازه میگردد مانند شاگردان شعبه دوازده الف.

صفت ثابت: شاگرد بودن.

متحول: طول قد؛ که میخواهد بررسی گردد.

دیتا: اطلاعات که از شاگردان نمونه بدست می آید به طور مثال؛ 160cm, 170cm, 155cm, ...

احصاییه دو شاخه مهم دارد؛ 1. احصاییه توصیفی 2. احصاییه استنباطی

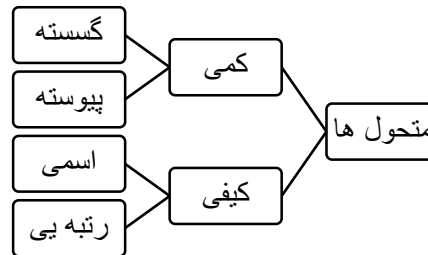
1. **احصاییه توصیفی Descriptive statistics**: جمع آوری اطلاعات، طبقه بندی، خلاصه کردن و نمایش اطلاعات.

2. **احصاییه استنباطی Inferential Statistics**: به مجموع روش های که میتوان نتایج حاصل از نمونه را به اطمینان خاص به کل جامعه تعمیم داد.

وقتی نتوانیم تمام جمعیت را اندازه گیری کنیم، ما از احصاییه استنباطی استفاده می نماییم. احصاییه استنباطی روند است که به منظور استخراج نتایج یا استنباط ها در مورد جمعیت از معلومات موجود در نمونه (بخش جامعه) از آن استفاده می شود.

در احصاییه تفکیک و تشخیص متحول ها بسیار ضروری است زیرا تمام اطلاعات درباره متحول ها می باشد از این لحاظ با انواع متحول ها آشنایی داشته باشیم.

انواع متحول ها:



1. **متحول کمی Quantities variable**: متحول های است که قابل اندازه گیری است مانند: طول قد درجه حرارت، زمان، وزن و غیره. دو نوع است.

(A) **متحول گسسته یا مجزا**: متحول های است که نتیجه اندازه گیری آن اعداد طبیعی یعنی بیدون عشاری می باشد. مانند؛ تعداد شاگردان، تعداد شکایت ها که در اداره ثبت میگردد و غیره...

(B) **متحول های پیوسته**: متحول های است که نتیجه اندازه گیری آن میتواند اعداد اعشاری نیز باشد. مانند؛ طول قد میتواند عشاری باشد 1.7m، وزن، زمان، و غیره...

2. **متحول های کیفی Qualities variable**: متحول های است که قابل اندازه نیست فقط کیفیت یا نوعیت آن مشخص میگردد. مانند؛ رنگ موی، گروپ خون، سطح تحصیل و غیره...

(a) **اسمی**: متحول است که فقط اسم آن مشخص میگردد مانند؛ رنگ موی که میتواند سیاه، خرمایی و سایر رنگ باشد، گروپ خون که میتواند A, B, O, AB باشد.

(b) **رتبه یی**: یک نوع ترتیب طبیعی بین آن موجود است مانند؛ مراحل زندگی: نوزادی، کودکی، جوانی، پیری و یا مراحل تحصیل: ابتداییه، متوسطه، لیسه، دانشگاه.

جمع آوری اطلاعات Data Collecting:

همانطور که احصاییه را تعریف نمودیم احصاییه با جمع آوری اطلاعات سروکار دارد پس چگونه اطلاعات درباره متحول جمع آوری می گردد؟

برای پاسخ دادن به یک پرسش یا حل یک مسئله، اغلب نیاز داریم داده (اطلاعات خام) جمع آوری کنیم. داده می تواند به دو صورت باشد:

داده اولی (Primary Data): خودمان آن را جمع آوری می کنیم (مثل پرسش نامه، مشاهده، آزمایش).

داده ثانویه (Secondary Data): از منبع دیگری می‌گیریم (مثل اینترنت، کتابخانه، گزارش‌های دولتی).

روش	توضیح	مثال
پرسش‌نامه (Questionnaire)	یک تعداد سوالات برای گرفتن نظرات یا معلومات از مردم.	نظرسنجی از 50 شاگرد در مورد تعداد ساعت مطالعه در هفته.
مشاهده (Observation)	نوشتن رویدادها یا رفتارها بدون دخالت کردن.	شمردن موترهایی که در ساعت 8 صبح از یک چهارراهی عبور می‌کنند.
آزمایش (Experiment)	انجام یک رویداد که زیر کنترل باشد و نتیجه‌ها را نوشتن.	اندازه‌گیری درجه حرارت آب هر یک دقیقه در وقت گرم شدن.
مصاحبه (Interview)	پرسیدن سوال از یک نفر به صورت روبرو یا تلفنی.	مصاحبه با 10 دهقان در مورد میزان بارندگی در سال گذشته.

در وقت جمع‌آوری معلومات باید مواظب اریبی (Bias) و نمونه‌گیری غلط باشیم. نمونه باید نماینده تمام جامعه باشد.

مثال 1 (جمع‌آوری معلومات اولیه): فرض کنید می‌خواهیم بدانیم «شاگردان یک مکتب روزانه چند دقیقه بازی ویدیویی انجام می‌دهند؟»

- روش جمع‌آوری معلومات: پرسش‌نامه بدون نام برای 100 شاگرد.
 - نمونه سوال: به طور متوسط، چند دقیقه در روز بازی ویدیویی انجام می‌دهید؟ (عدد را بنویسید).
 - معلومات جمع‌آوری شده: [0, 30, 45, 60, 0, 120, 30, ...]
- اطلاعات که از اندازه‌گیری بدست می‌آید میتواند گسسته و یا پیوسته باشد پس با دو نوع معلومات سر و کار داریم: 1. معلومات گسسته 2. معلومات پیوسته

این تقسیم‌بندی بر اساس نوع مقدارها است که یک متغیر می‌تواند داشته باشد.

معلومات گسسته (Discrete Data): مقدارها به صورت شمارشی هستند و فقط اعداد درست و کامل (معمولاً اعداد صحیح) می‌توانند باشند. بین دو مقدار پشت سر هم، مقدار دیگری وجود ندارد (پرش دارند).

مثال: تعداد شاگردان یک صنف، تعداد موترهای پارک شده، تعداد ضرب‌الاجل‌های از دست رفته.

معلومات پیوسته (Continuous Data): مقدارها به صورت اندازه‌گیری هستند و می‌توانند هر عدد حقیقی باشند (اعداد اعشاری و کسری هم شامل می‌شوند). بین هر دو مقدار، بی‌شمار مقدار دیگر وجود دارد.

مثال: بلندی، وزن، درجه حرارت، وقت (با دقت زیاد)، تیزی.

ویژگی	گسسته (Discrete)	پیوسته (Continuous)
نوع شمارش/اندازه‌گیری	شمارش (Counting)	اندازه‌گیری (Measuring)
مقدارهای ممکن	اعداد صحیح (مثل 1, 2, 3)	هر عدد حقیقی (مثل 1.5, 2.75)
مثال	تعداد فرزندان یک خانواده	بلندی یک نفر (مثلاً 172.3 سانتی‌متر)
ابزار جمع‌آوری	شمارنده، پرسش‌نامه با جواب صحیح	خط کش، ترازو، کروномتر

عبارتهای زیر را بخوانید و بگویید معلومات گسسته است یا پیوسته:

1. تعداد دفعاتی که یک تاس انداخته می‌شود تا عدد 6 بیاید.
 - گسسته – چون می‌تواند 1, 2, 3, ... باشد (نمی‌تواند 2.3 بار).
 - وزن 50 بسته برنج در یک کارخانه (به گرم).
 - پیوسته – چون می‌تواند 1000.0, 1000.5, 1001.2 و ... گرم باشد.
 - تعداد لامپ‌های سوخته در یک ساختمان.
 - گسسته – عدد صحیح. (0, 1, 2, ...)
 - وقت (به ثانیه) یک دوندۀ برای دویدن 100 متر.
 - پیوسته – مثلاً 12.53 ثانیه، 12.54 ثانیه و ...
- روش اجرای جمع آوری اطلاعات میتواند به صورت نمونه گیری یا سرشماری باشد. روش که قبلاً برای جمع آوری معلومات ذکر گردید می‌توانید توسط نمونه گیری یا سرشماری اجرا گردد.
1. سرشماری: اگر تمام اعضای جامعه مورد مطالعه قرار دهیم، سرشماری گفته می‌شود و زمانی مفید است که جامعه محدود و تعداد آن کم باشد، شاخص های بدست آمده از سرشماری را بنام پارامتر گویند.
 2. نمونه گیری: اگر برای مطالعه تعداد از عناصر جامعه را انتخاب نماییم و نتیجۀ آن را به جامعه تعمیم می‌دهیم نمونه گیری گفته می‌شود و زمانی مفید است که اعضای جامعه زیاد و جمع آوری از تمام اعضای جامعه زمان طولانی و هزینه زیاد نیاز داشته باشد و یا جمع آوری از تمام اعضای جامعه غیر ممکن باشد، شاخص بدست آمده از نمونه گیری را بنام آماره یا برآورد کننده گویند.

تمرین

1. شما می‌خواهید به طور متوسط بارندگی ماهانه را در شهر خود بدانید. یک راه جمع آوری معلومات اولیه و یک راه ثانویه پیشنهاد کنید.
2. کدام یک از موارد زیر معلومات گسسته است؟
 - a. درجه حرارت بدن بیماران
 - b. تعداد کتاب‌های به امانت گرفته شده از کتابخانه
 - c. مسافت طی شده با موتور (به کیلومتر)
3. یک مثال واقعی از معلومات پیوسته در آشپزخانه بنویسید.
4. توضیح دهید چرا «تعداد ستاره‌های یک هتل (1 تا 5)» با اینکه اعداد صحیح است، گاهی به عنوان معلومات ترتیبی.

جوابات:

1. اولیه: نصب یک باران‌سنج در حیاط و خواندن روزانه آن به مدت یک سال.
- ثانویه: گرفتن معلومات بارندگی از ریاست هواشناسی کشور.
2. تعداد کتاب‌ها → گسسته. (درجه حرارت پیوسته، مسافت پیوسته است)
3. مثال: مقدار نمکی که به سوپ اضافه می‌شود (مثلاً 5.2 گرم) – پیوسته.
4. چون ستاره‌های هتل فقط مقادیر 1, 2, 3, 4, 5 را می‌گیرند ولی این اعداد به معنی «درجه» یا «کیفیت» هستند، نه تعداد واقعی. معلوماتی که رتبه یا ترتیب دارد ولی فاصله‌ها یکسان نیستند، ترتیبی نامیده می‌شود.

جدول کثرت چیست؟

جدول کثرت یا جدول فراوانی یک جدول ساده است که نشان می‌دهد هر مقدار (یا هر دسته از مقادیر) چند بار در معلومات تکرار شده است، به این «چند بار» اصطلاحاً کثرت (Frequency) می‌گویند.

کثرت به چهار نوع است:

1. **کثرت مطلق:** به تعداد دفعات که داتا تکرار میشود کثرت مطلق گفته میشود.

$$\sum_i^n f_i = n, \quad 1 \leq f_i \leq n.$$

2. **کثرت نسبی:** به نسبت هر داتا بر تعداد کل داتا کثرت نسبی گفته میشود

$$F_i = \frac{f_i}{n}, \quad \sum_1^n F_i = 1, \quad \frac{1}{n} \leq F_i \leq 1$$

$$\text{فیصدی کثرت نسبی} = \frac{f_i}{n} 100$$

3. **کثرت تجمعی:** درصورتیکه در یک جدول کثرت هر دسته را با کثرت ماقبل آن جمع کنیم کثرت نسبی بدست می آید. fci

$$F_{ci} = \frac{f_{ci}}{n} \quad \text{نسبت کثرت تجمعی هر دسته بر کل داتا ها}$$

کاربرد جدول کثرت: خلاصه کردن معلومات خام به شکلی که خواندن و فهمیدن آن آسان باشد.

مثال: معلومات ذیل مربوط گروپ خون 30 بیمار در شفاخانه ملالی ثبت گردیده است جدول کثرت آنرا بدست آورید.

A, B, O, A, B, AB, A, B, B, O, O, A, AB, B, B, B, AB, O, O, A,
AB, AB, B, AB, O, B, AB, B, B, B

حل:

Data	کثرت مطلق	کثرت نسبی	کثرت تجمعی	کثرت تجمعی نسبی
A	5	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0.16$	5	$\frac{5}{30} = 0.16$
B	12	$\frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0.4$	5+12=17	$\frac{17}{30} = 0.56$
O	6	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0.2$	17+6=23	$\frac{23}{30} = 0.76$
AB	7	$\frac{7}{30} = \frac{7}{30} = 0.23$	23+7=30	$\frac{30}{30} = 1$

ساختن جدول کثرت برای معلومات گسسته (Discrete Data) :

وقتی معلومات گسسته باشد، هر مقدار را جداگانه می نویسیم و تعداد تکرار آن را می شمیریم.

مثال 1 (گسسته):

نمره های 15 شاگرد در یک امتحان (از 0 تا 5) به این صورت است.

3, 4, 2, 5, 3, 4, 3, 2, 4, 4, 5, 3, 2, 1, 4

مراحل ساختن جدول کثرت:

1. همه ی مقدارهای ممکن را از کوچک به بزرگ بنویسید 1, 2, 3, 4, 5
2. کنار هر مقدار، خط (تال) بکشید یا شمارش کنید که چند بار تکرار شده است.
3. تعداد تکرار هر دیتا را بنویسید.

جدول کثرت:

بیشترین کثرت مربوط به نمره ی 4 است (6 شاگرد).

جمع کثرت ها برابر با تعداد کل شاگردان (15) است.

مقدار (نمره)	(Tally)	کثرت (Frequency)
1	I	1
2	II	2
3	IIII	4
4	IIII I	6
5	II	2
جمع		15

ساختن جدول کثرت برای معلومات پیوسته – (Continuous Data) دسته بندی (Grouped Data)

وقتی معلومات پیوسته باشد (مثل قد، وزن، زمان) یا تعداد داده ها خیلی زیاد باشد، مقادیر را به دسته ها یا صنف ها (Classes) تقسیم می کنیم. هر دسته یک انتروال دارد.

مثال 2 (پیوسته دسته بندی شده): قد 20 دانش آموز (به سانتی متر) به این صورت است:

145, 150, 148, 155, 160, 162, 158, 147, 153, 151, 149, 157, 161, 159, 152, 156,

154, 148, 163, 150

ما می‌توانیم دسته‌های 5 سانتی‌متری بسازیم:

145 – 149, 150 – 154, 155 – 159, 160 – 164

مراحل:

1. دسته‌ها را مشخص کنید (انتروال‌ها نباید روی هم بیفتند و همه‌ی داده‌ها را شامل باشد).
2. برای هر داده ببینید در کدام دسته قرار می‌گیرد و یک خط بکشید.
3. کثرت هر دسته را بنویسید.

جدول کثرت دسته‌بندی شده:

دسته (cm قد)	تالی	کثرت
145 – 149	IIII I	6
150 – 154	IIII II	7
155 – 159	IIII	4
160 – 164	III	3
جمع		20

نکته:

- حد پایین و بالای هر دسته را مشخص کنید. در مثال بالا دسته 145-149 شامل قد‌های 145 تا 149 می‌شود (هر دو سر شامل است).

تمرین‌ها:

1. معلومات زیر تعداد دفعاتی است که 10 نفر در یک هفته ورزش کرده‌اند:
4, 2, 5, 3, 4, 4, 2, 3, 5, 4
یک جدول کثرت برای این معلومات بسازید.
2. معلومات زیر وزن (به کیلوگرم) 12 بچه است:
22, 24, 23, 25, 26, 24, 23, 25, 27, 24, 22, 26
یک جدول کثرت دسته‌بندی شده با دسته‌های 22 – 23, 24 – 25, 26 – 27 درست کنید.
3. چرا برای معلومات پیوسته ناگزیر از دسته‌بندی استفاده می‌کنیم؟

جواب تمرین‌ها

جواب 1:

تعداد روزها که در هفته ورزش میکند	کثرت
2	2
3	2
4	4
5	2
جمع	10

جواب 2:

دسته (kg)	خط کشی	کثرت
22 – 23		4
24 – 25	I	5
26 – 27		3
جمع		12

جواب 3:

چون معلومات پیوسته می تواند هر عدد اعشاری باشد. اگر بخواهیم هر مقدار منحصر به فرد را جداگانه بنویسیم، تقریباً هیچ مقداری تکرار نمی شود و جدول بی فایده می شود. دسته بندی به ما اجازه می دهد الگوهای کلی را ببینیم.

شاخص یا معیارهای مرکزی

وقتی یک مجموعه از معلومات داریم (مثل نمرات شاگردان)، اغلب می خواهیم یک عدد پیدا کنیم که «نماینده» یا «مرکز» آن معلومات باشد. به این عددها شاخص های مرکزی می گویند. سه شاخص مهم مرکزی عبارتند از:

1. **اوسط (Mean):** انواع زیاد دارد که مهم ترین آن اوسط حسابی است.

تعریف: عبارت از حاصل جمع اطلاعات تقسیم تعداد اطلاعات می باشد بطور مثال اگر اطلاعات $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داشته باشیم اوسط آن از فورمول ذیل بدست می آید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad \text{اوسط} = \frac{\text{مجموع اطلاعات}}{\text{تعداد اطلاعات}}$$

مثال: اوسط حسابی اعداد 11, 14, 17, 20, 16, 10 را بدست آورید.

حل:

$$\bar{x} = \frac{11 + 14 + 17 + 20 + 16 + 10}{6} = \frac{88}{6} = 14.6$$

مقدار حاصلات گندم در مدت 5 سال در یک ولایت قرار زیر داده شده اوسط حسابی این حاصلات را دریابید.

سال	1386	1387	1388	1389	1390
مقدار به ملیون تن	5	4	2	3	6

حل:

X_i	data	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{n} = \frac{5 + 4 + 2 + 3 + 6}{5} = \frac{20}{5} = 4$
X_1	5	
X_2	4	
X_3	2	
X_4	3	
X_5	6	

2. **میانہ (Median):** مقدار وسطی وقتی معلومات را از کوچک به بزرگ مرتب نماییم.
3. **مد (Mode):** مقداری که بیشترین تکرار را دارد.

مقیاس ها پراکندگی

دامنه تغییرات

1. مود میانه
2. اوسط ها
3. گراف میله یی
4. گراف دایره پی
5. گراف ساقه و برگ
6. گراف پراکندگی

احتمالات

1. احتمالات
2. نوشتن احتمال به شکل عدد
3. محاسبه احتمال
4. شمارش منطقی و یا