

آنچه قرار است درین بخش بیاموزیم

حوادث همچانس

فضای نمونه گسسته
و پیوسته

اصل حاصل ضرب

احتمال فضاهای
پیوستهاستقلالیت حوادث
اتفاقی

اهداف آموزشی

درختم این بخش شاگردان قادر گردد تا:

- ✓ فضای نمونه گسسته و پیوسته را بشناسد.
- ✓ حوادث هم چانس را بشناسد.
- ✓ احتمال فضاهای پیوسته.
- ✓ اصل حاصل ضرب را بدانند.
- ✓ استقلالیت حوادث اتفاقی را بشناسد.
- ✓ مثال های مربوطه را حل کرده بتوانند.

فضای نمونه گسسته و پیوسته

فضاهای نمونه ای یک تجربه اتفاقی عبارت از مجموعه معین یا محدود و یا نامعین یا غیر محدودی اند که یک دسته آنها قابل شمارش و دسته دیگر آنها غیر قابل شمارش می باشد. فضای نمونه که عناصر آن قابل شمارش و تشخیص اند به نام فضای نمونه گسسته و فضای نمونه که عناصر آن که عناصر آنها قابل شمارش نیستند به نام فضای نمونه متمادی یا پیوسته یاد می شود.

مثال: کدام یکی از فضاهای نمونه ذیل پیوسته و کدام یک آنها گسسته است.

- ✓ پرتاب دو دانه رمل.
- ✓ انتخاب یک عدد حقیقی بین 8 و 12
- ✓ انتخاب سه نفر متعلم از بین 30 نفر شاگرد.
- ✓ بالا رفتن درجه حرارت یک کوره از 100 درجه به 1000 درجه سانتی گراد.
- ✓ انتخاب زاویه بین 30 تا 45 درجه

حل:

الف و ج از تعداد محدود عضو تشکیل گردیده است بنأ یک فضای نمونه گسسته اند و ب، د و ه که از اعداد حقیقی تشکیل گردیده است بنام فضای نمونه پیوسته و محدود اند.

حوادث هم چانس

حوادث ساده اولیه که احتمال وقوع آنها در اثر انجام یک تجربه با هم برابر باشد بنام حوادث هم چانس یاد می گردند.

ثال: 4 نفر در یک مسابقه شرکت می کنند، احتمال برنده شدن هر کدام آنها در صورت فضای نمونه همچانس مطلوب است.

حل: هرگاه فضای نمونه $S = \{a, b, c, d\}$ باشد، احتمال هر حادثه اتفاقی اولیه $\frac{1}{4}$ می باشد در آن صورت داریم که:

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

ازینرو حوادث اتفاقی a, b, c, d همچانس اند.

احتمال فضاهای پیوسته

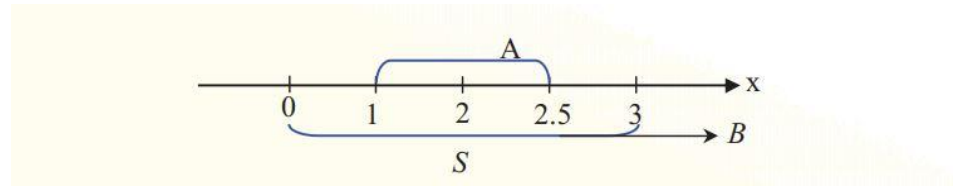
فضای نمونه پیوسته مجموعه نامحدود از نقاط می باشد که شکل محور اعداد حقیقی، سطح در مستوی و یا احجام در فضا می باشد. چون نمایش این نقاط ممکن نیست بنابراین برای پیدا کردن نسبت احتمال از طول قطعه خط ها، سطوح اشکال و یا حجم اجسام استفاده می نمائیم.

معمولاً برای استفاده از محور اعداد یک متحول x ، قسمتی از یک مساحت از دو متحول x و y و بالاخره برای احجام از متحولین x ، y و z استفاده می نمائیم.مثال: روی محور اعداد در انتروال باز $(0,3)$ یک نقطه مانند x را به صورت اتفاقی انتخاب می نمائیم. احتمال اینکه $1 < x < 2.5$ باشد دریافت کنید.

حل:

محور اعداد حقیقی را رسم نموده فواصل S و A را روی آن مشخص نمائیم بنابراین با در نظر داشت شکل برای احتمال حادثه A داریم که.

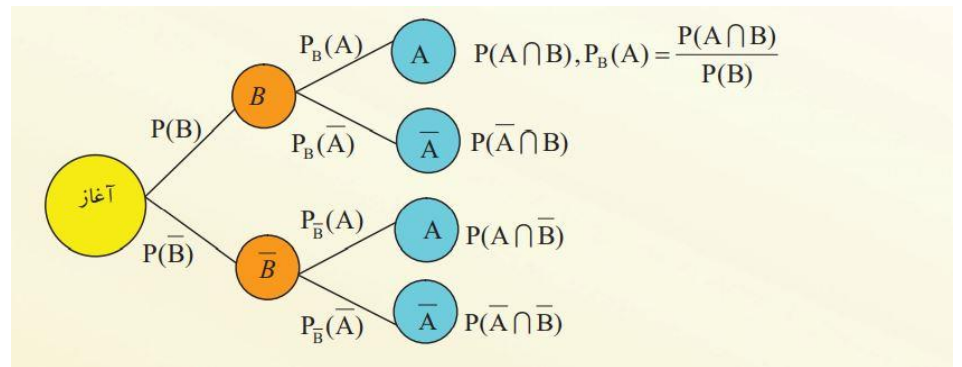
$$P(A) = \frac{\text{طول قطعه خط } A}{\text{طول قطعه خط } B} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$



احتمال مشروط

تعریف: هرگاه A و B دو حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشد طوری که $P(B) \neq 0$ در این صورت احتمال مشروط $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ به نام احتمال مشروط حادثه اتفاقی A نظر به حادثه اتفاقی B یاد می‌گردد.

با در نظر داشت تعریف فوق نظر به قاعده اول مسیر از دیاگرام های درختی نیز می‌توانیم آن را به دست آوریم.



از فرمول احتمال مشروط، نتیجه مهم زیر به دست می‌آید.

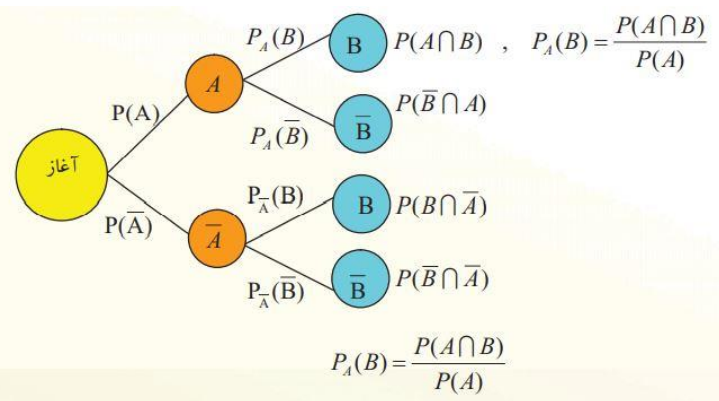
1. با استفاده از قاعده اول مسیر داریم و با استفاده از قاعده دوم مسیر داریم.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2. از روی دیاگرام درختی زیر میدانیم که.



مثال: یک شاگرد 50% روزهای رفتن به مکتب را از سرویس استفاده می‌کند که با احتمال 70% به وقت معینه به مکتب می‌رسد. به طور اوسط موصوف با احتمال 60% به وقت معینه حاضر به مکتب می‌شود، هرگاه حوادث

- به وسیله سرویس رفتن
- به وقت معینه رسیدن

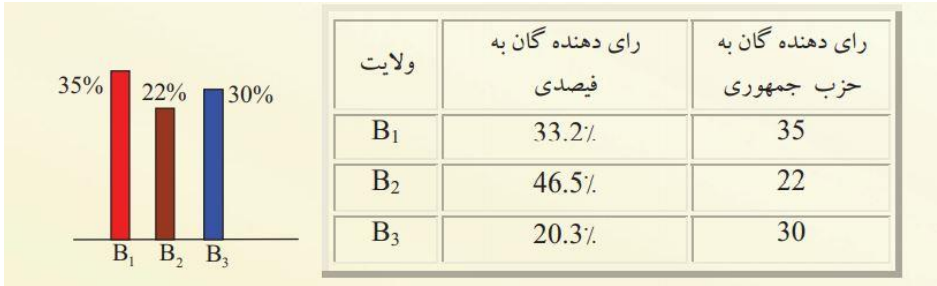
باشد احتمال مشروط A نظر به B یعنی $P_B(A)$ مطلوب است.

حل:

برای دریافت احتمال مذکور با استفاده از فرمول و دیاگرام درختی داریم که.

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = 0.5833 = 58.33\%$$

بنابراین احتمال رسیدن به وسیله سرویس مشروط بر اینکه به وقت معینه در مکتب باشد 58.33% است.



حوادث اتفاقی $B_i, i = 1, 2, 3, \dots$ در حقیقت یک تقسیم فضای نمونه S را تشکیل داده که برای آنها صورت می پذیرد.

1. B_i ها باهم دو به دو مستقل و عنصر مشترک ندارد.
2. نمونه فضای برای S

$$S = B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \bigcup_{i=1}^3 B_i$$

بوده ، سپس حادثه

$$V = \bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)$$

ازین رابطه می توان برای احتمال طرفین بنویسیم

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left(\bigcup_{i=1}^3 (B_i \cap V)\right) = \sum_{i=1}^3 P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P_{B_i}(V) \\ &= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V) \\ &= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3 \\ &= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 \\ &= 0.2794 = 27.94\% \end{aligned}$$

حالت عمومی

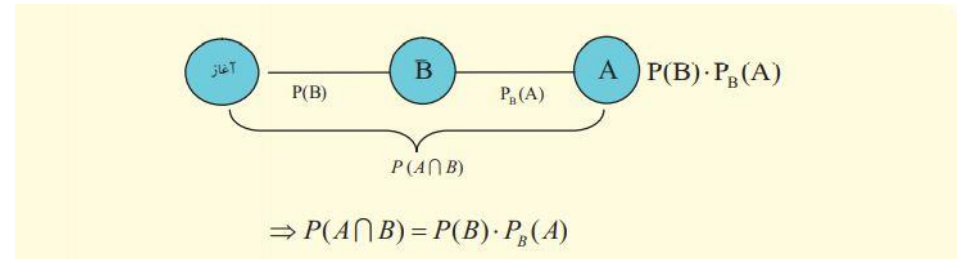
تعریف: حالت عمومی حوادث B_1, B_2, \dots, B_n طوری که $P(B_i) \neq 0$ باشد طوریکه

اصل حاصل ضرب

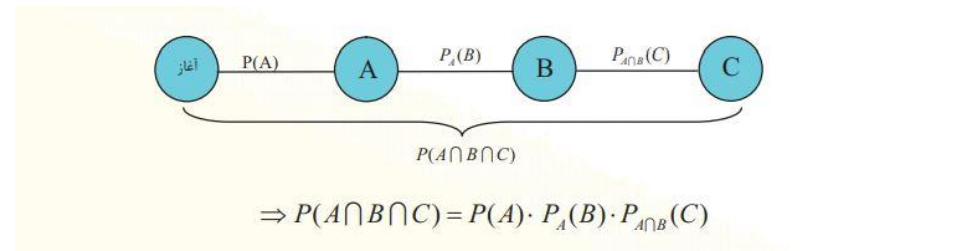
در یک فضای نمونه S برای دو حادثه اتفاقی A و B با در نظر داشت تعریف احتمال مشروط داریم:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

این مسئله را از گراف درختی نیز می توان بدست آورد.



این مطلب برای سه حادثه اتفاقی A, B و C به شکل زیر توسعه می یابد.



قاعده فوق را به نام اصل حاصل ضرب یاد نموده و می توان آنرا برای تعداد حوادث اتفاقی نیز بدست آورد.

مثال: در انتخابات پارلمانی سه ولایت B_1, B_2, B_3 که برای هر کدام آن فیصدی مشترکین انتخابات و حزب جمهوری داده شده است؛ با کدام احتمال مشترکین انتخابات و یا رای دهنده گان حزب جمهوری را انتخاب کرده اند؟

حل:

حوادث اتفاقی زیر را تعریف و نامگذاری می نمائیم.

- V : رای دهنده گان که به حزب جمهوری رای داده اند.
- B_i : رای دهنده گان ولایت $B_i, i = 1, 2, 3, \dots$ در جدول ذیل آماده است.

$i = 1, 2, 3, \dots, n$ یک حادثه اتفاقی فضایی نمونه S می‌باشد. که احتمال کامل را تشکیل می‌دهد و برای حادثه اتفاقی اختیاری A داریم که

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

از تعریف احتمال مشروط، نظر به قضیه اصل حاصل ضرب با در نظر داشت مسئله احتمال فورمول زیر که بنام فورمول بایز $Bayes$ یاد می‌شود به آسانی بدست می‌آید طوری که $i = 1, 2, 3$ یک حادثه اتفاقی از فضای نمونه S برای $P(B_i) \neq 0$ و $i = 1, 2, 3$ حادثه اتفاقی A با احتمال $P(A) \neq 0$ داریم.

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}$$

استقلالیت حوادث اتفاقی

تعریف: دو حادثه اتفاقی A و B که بالای همدیگر تاثیر گذار نباشند به نام حوادث اتفاقی مستقل یاد می‌گردند.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال 1: هرگاه رنگ چشم و ذکاوت شاگردان یک مکتب را که یکی بالای دیگری بی تاثیر فرض گردیده باشند، با در نظر داشت حوادث زیر برای انتخاب یک شاگرد به صورت اتفاقی

- فرد انتخاب شده یک شاگرد ذکی باشد.
- شاگرد انتخاب شده دارای چشمان سیاه باشد.

دریافت کنید احتمال آنکه شاگرد انتخاب شده به صورت اتفاقی ذکی و چشمان سیاه داشته باشد.

حل 1:

احتمال اینکه شاگرد انتخاب شده ذکی و چشمان سیاه داشته باشد:

$$\text{چون } P_B(H) = P(H) \text{ و علاوتاً } P(B \cap H) = P_B(H) \text{ بنا برین}$$

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

حالت عمومی: n حادثه اتفاقی A_1, A_2, \dots, A_n احتمالاً از هم مستقل نامیده می‌شوند هرگاه برای هر ترکیب دو یا چندین حادثه آنها قاعده حاصل ضرب صدق کند، در غیر آن حوادث احتمالاً باهم وابسته نامیده می‌شود.

مثال 2: در داخل یک خریطه دو گلوله سفید و دو گلوله سیاه قرار دارند، دو گلوله یکی پی دیگری از آن می‌برداریم طوری که:

- 1- با گرفتن اولین گلوله، آن را پس به داخل خریطه می‌گذاریم.
- 2- بدون آنکه گلوله واپس قرار داده شود.

حوادث:

- اولین بار گلوله سفید برآید.
- دومین بار گلوله سفید برآید.
- از هم مستقل یا وابسته اند.

حل (a)

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ازینجا گفته می‌توانیم که A و B از هم مستقل اند.

حل (b)

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{6} \neq \frac{1}{4}$$

حل (c) حوادث A و B باهم وابسته است