



رياضی

صنف نهم



$$a^2 + b^2 = c^2$$



ترتیب کننده: امان علیپور

اهداف آموزشی:

1. مفهوم دایره و عناصر آن: یادگیری دایره به عنوان یک شکل هندسی ساده اما بسیار پرکاربرد.
2. شعاع، قطر، وتر، و قوس دایره: درک نقش این عناصر در تشکیل دایره و کاربرد آن‌ها در زندگی روزمره.
3. ترسیم دایره: نحوه ترسیم یک دایره با استفاده از ابزار ساده مانند پرگار.
4. محیط دایره و مساحت دایره: یادگیری نحوه محاسبه محیط و مساحت دایره با استفاده از فرمول‌ها.

روش‌های مبتکرانه برای یادگیری:

1. استفاده از اشیاء روزمره: برای درک بهتر دایره، از اشیاء معمولی مانند سکه‌ها، چرخ‌های دوچرخه، یا حتی حلقه‌های آبشارها استفاده کنید. به این ترتیب، دانش آموز می‌تواند مفهوم دایره را در دنیای واقعی مشاهده کرده و آن را با مفاهیم هندسی پیوند دهد.
2. تصاویر و رسم‌های ساده: به‌جای استفاده از تکنولوژی پیشرفته، دانش‌آموزان می‌توانند با استفاده از کاغذ و قلم ساده، تصاویر دایره‌ای مانند فواره‌ها، چرخ‌ها و سکه‌ها را رسم کرده و به تحلیل عناصر دایره بپردازند.
3. کاربرد در زندگی روزمره: به‌طور مثال، از دانش‌آموزان بخواهید که دایره‌ها را در محیط اطراف خود پیدا کنند، مانند لبه‌های میزها، درها، یا حتی دایره‌های موجود در طبیعت مثل حلقه‌های درختان یا دایره‌های نور خورشید.

تمرین‌های خانگی:

1. تمرین رسم دایره:
 - برای رسم دایره، از یک نخ یا خط مستقیم به طول مشخص استفاده کنید (برای مثال شعاع 5 سانتی‌متر).
 - با کمک پرگار، یک نقطه را به عنوان مرکز دایره انتخاب کرده و از این نقطه به اطراف به همان فاصله 5 سانتی‌متر، یک دایره رسم کنید.

1. تمرین محاسبه محیط و مساحت دایره:

○ فرمول محیط دایره:

$$C = 2 \times \pi \times r$$

r شعاع دایره است

○ فرمول مساحت دایره:

$$A = \pi \times r^2$$

تمرین: یک دایره با شعاع 5 سانتی‌متر رسم کنید و سپس محیط و مساحت آن را محاسبه کنید

2. تمرین شناسایی نقاط مختلف در دایره:

- یک نقطه در داخل دایره، روی محیط دایره یا خارج از دایره قرار دهید و فاصله آن را با مرکز دایره اندازه‌گیری کنید.
- توضیح دهید که چه ویژگی‌هایی دارد و چرا فاصله از مرکز دایره برای هر نوع نقطه متفاوت است.

مفاهیم کلیدی:

1. دایره: یک منحنی بسته که تمامی نقاط آن از یک نقطه ثابت (مرکز) فاصله‌ای مساوی دارند.
2. شعاع: خطی از مرکز دایره تا هر نقطه روی محیط دایره.
3. قطر: خطی که از یک طرف دایره به طرف دیگر می‌رود و از مرکز دایره می‌گذرد.
4. وتر: خطی که دو نقطه از محیط دایره را به هم وصل می‌کند.
5. قوس دایره: یک قسمت از محیط دایره.

نحوه استفاده از فرمول‌ها در زندگی روزمره:

- اگر شما در حال برنامه‌ریزی برای ساخت یک حوضچه با فواره آب هستید، می‌توانید از فرمول‌های محیط دایره برای محاسبه مرز دایره‌ای استفاده کنید.

• همچنین اگر قصد دارید یک باغ دایره‌ای شکل بسازید، می‌توانید با استفاده از شعاع و قطر دایره، مساحت آن را محاسبه کرده و گیاهان را به‌طور یکنواخت در آنجا قرار دهید.

خلاصه:

دانش‌آموزان می‌توانند با استفاده از اشیاء اطراف خود، این مفاهیم را به‌طور عملی یاد بگیرند. علاوه بر این، تمرین‌های مربوط به رسم دایره، محاسبه محیط و مساحت دایره، شناسایی نقاط مختلف دایره و استفاده از فرمول‌ها در زندگی روزمره، به آن‌ها کمک می‌کند تا یادگیری شهودی و عمیق‌تری داشته باشند.

سوالات تقویتی:

1. مرکز دایره کدام است؟
- 1) هر نقطه روی دایره (2) نقطه‌ای در بیرون دایره
- 3) نقطه‌ای که تمام نقاط دایره فاصله مساوی از آن دارند (4) محل تقاطع دایره با خط شعاع دایره چیست؟
- 1) طولی که دو دایره را وصل می‌کند (2) فاصله‌ای از مرکز تا هر نقطه روی دایره
- 3) خطی در داخل دایره که از یک طرف باز باشد (4) خطی که دایره را قطع کند
3. قطر دایره چه تعریفی دارد؟
- 1) نصف شعاع دایره (2) شعاعی که دو برابر شده
- 3) خطی که دو نقطه روی دایره را وصل کند و از مرکز بگذرد
- 4) خطی که خارج از دایره کشیده شده باشد
4. دایره چیست؟
- 1) خطی که دو نقطه را وصل کند
- 2) مجموعه تمام نقاطی که از یک نقطه معین فاصله مساوی دارند
- 3) سطحی که لبه‌های آن ناهموار باشد (4) خطی که یک مسیر مستقیم را دنبال کند
5. وتر دایره چیست؟
- 1) خطی که مرکز دایره را وصل کند (2) خطی که دو نقطه روی دایره را وصل کند
- 3) شعاع دو برابر شده (4) خطی که هیچگاه دایره را لمس نکند
6. محیط دایره چگونه محاسبه می‌شود؟
- 1) قطر $\times 3$ (2) قطر $\times 2$ (3) قطر \times عدد پای (π) (4) قطر $\times 4$
7. اگر دو دایره با هم تلاقی داشته باشند، چه حالتی می‌تواند رخ دهد؟

- 1) هیچ نقطه مشترک ندارند (2) تنها یک نقطه مشترک دارند
- 3) دو نقطه مشترک دارند (4) همه گزینه‌ها ممکن است
8. کدام جمله در مورد شعاع درست است؟
- 1) کوتاه‌تر از وتر است (2) مساوی یا کمتر از وتر است
- 3) همیشه مساوی نصف قطر است (4) همیشه بیشتر از قطر است
9. خط مماس بر دایره چه ویژگی دارد؟
- 1) خطی که دایره را در دو نقطه قطع کند (2) خطی که دایره را اصلاً لمس نکند
- 3) خطی که دایره را در یک نقطه لمس کند (4) خطی که دایره را کاملاً احاطه کند
10. دایره‌های مماس داخلی چگونه قرار دارند؟
- 1) یک دایره کامل در داخل دیگری (2) دایره‌ها هیچ تماس ندارند
- 3) دایره‌ها از دو نقطه همدیگر را قطع می‌کنند (4) دایره‌ها جدا از هم قرار دارند
11. خط قاطع بر دایره چیست؟
- 1) خطی که دایره را در یک نقطه قطع کند (2) خطی که دایره را در دو نقطه قطع کند
- 3) خطی که دایره را لمس نکند (4) خطی که دایره را محاصره کند
12. اگر فاصله مرکز دایره تا خط کمتر از شعاع باشد، چه حالتی پیش می‌آید؟
- 1) خط قاطع می‌شود (2) خط مماس می‌شود
- 3) خط کاملاً بیرون از دایره می‌ماند (4) خط و دایره تماس ندارند
13. در کدام حالت دو دایره هیچ نقطه مشترک ندارند؟
- 1) مماس داخلی (2) مماس خارجی (3) جدا از هم (4) قطع‌کننده
14. اگر فاصله مرکز دایره تا خط مساوی شعاع باشد، خط چه حالتی دارد؟
- 1) قاطع (2) مماس (3) خارج از دایره (4) داخل دایره
15. اگر فاصله مرکز دایره تا خط بیشتر از شعاع باشد، خط چه وضعیتی دارد؟
- 1) مماس (2) قاطع (3) هیچ تماس ندارد (4) دایره را دو قسمت می‌کند
16. شعاع دایره‌ای ۵ سانتی‌متر است. قطر آن چند سانتی‌متر است؟
- 1) 20 (2) 15 (3) 10 (4) 5
17. قطر دایره‌ای ۱۲ سانتی‌متر است. شعاع آن چند سانتی‌متر است؟
- 1) 12 (2) 9 (3) 6 (4) 3
18. طول یک وتر در دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر برابر ۱۰ سانتی‌متر است. این وتر در چه وضعیتی است؟
- 1) منطبق بر قطر (2) خارج از دایره (3) مماس (4) کوچک‌تر از قطر
19. دایره مجموعه‌ای از نقاطی است که:
- 1) از مرکز فاصله مساوی دارند (2) فاصله‌های مختلف دارند
- 3) روی خط مستقیم اند (4) طولی مشخص ندارند

20. اگر طول شعاع دایره‌ای برابر با ۷ سانتی‌متر باشد، محیط دایره چقدر است؟ ($\pi \approx 3.14$)
- 1 (4) 49 (2) 14 (3) 21.98 (4) 43.96
21. قوس چیست؟
- 1 (1) قسمتی از محیط دایره (2) شعاعی از دایره (3) وتر دایره (4) قطر دایره
22. قطاع چیست؟
- 1 (1) ناحیه بین دو شعاع و قوس (2) مثلث قائم الزاویه (3) وتر و شعاع (4) نیم‌دایره
23. ناحیه‌ای که بین یک قوس و وتر آن قرار دارد چه نام دارد؟
- 1 (1) قطاع (2) قطعه (3) زاویه (4) مماس
24. وتر بلندتر از شعاع ولی کوتاه‌تر از قطر است. طول احتمالی آن کدام است؟ اگر شعاع ۸ باشد.
- 1 (1) 17 (2) 15 (3) 10 (4) 5
25. اگر وتری از مرکز عبور کند، نام آن چیست؟
- 1 (1) شعاع (2) قطاع (3) قطر (4) قوس
26. دو وتر برابر در دایره، چه ویژگی دارند؟
- 1 (1) برابرند و فاصله مساوی از مرکز دارند (2) نابرابرند (3) طول بیشتری دارند (4) مماس‌اند
27. طول وتر در دایره‌ای با قطر ۲۰ سانتی‌متر، چقدر می‌تواند باشد؟
- 1 (1) 25 (2) 20 (3) 15 (4) 10
28. وتر چه تفاوتی با شعاع دارد؟
- 1 (1) وصل‌کننده دو نقطه روی دایره (2) از مرکز عبور می‌کند (3) کوتاه‌تر است (4) مماس است
29. اگر دو دایره هم‌مرکز ولی با شعاع متفاوت باشند، وضعیت آنها چیست؟
- 1 (1) متقاطع (2) هم‌مرکز (3) مماس (4) متداخل
30. اگر فاصله مراکز دو دایره کمتر از اختلاف شعاع‌ها باشد، دایره‌ها:
- 1 (1) مماس داخلی (2) متقاطع (3) یکی داخل دیگری (4) جدا از هم
31. اگر فاصله مراکز برابر با مجموع شعاع‌ها باشد، دایره‌ها:
- 1 (1) مماس خارجی (2) متقاطع (3) هم‌مرکز (4) منطبق
32. اگر دایره‌ها دو نقطه اشتراک داشته باشند، چه حالتی دارند؟
- 1 (1) مماس (2) متقاطع (3) جدا (4) هم‌مرکز
33. اگر دو دایره در یک نقطه مشترک باشند:
- 1 (1) مماس‌اند (2) متقاطع (3) یکی داخل دیگری (4) هم‌مرکز
34. اگر خطی فقط یک نقطه از دایره را قطع کند، آن خط چیست؟

- 1 (1) مماس (2) وتر (3) قوس (4) قطر
35. اگر خطی از دو نقطه دایره عبور کند، آن چیست؟
- 1 (1) قطاع (2) مماس (3) شعاع (4) قطاع
36. مماس بر دایره چه ویژگی دارد؟
- 1 (1) فقط یک نقطه از دایره را قطع می‌کند (2) دو نقطه (3) از مرکز می‌گذرد (4) از شعاع کوتاه‌تر است
37. اگر فاصله نقطه‌ای از مرکز دایره کمتر از شعاع باشد، آن نقطه:
- 1 (1) داخل دایره (2) روی دایره (3) خارج دایره (4) مماس دایره
38. اگر فاصله نقطه‌ای از مرکز دایره بیش از شعاع باشد، آن نقطه:
- 1 (1) خارج دایره (2) داخل دایره (3) روی دایره (4) روی قطر
39. شعاع ۱۰، طول محیط دایره چقدر؟ ($\pi=3.14$)
- 1 (1) 40 (2) 20 (3) 31.4 (4) 62.8
40. مرکز دایره با کدام ویژگی شناخته می‌شود؟
- 1 (1) نقطه‌ای که همه شعاع‌ها به آن می‌رسند (2) مماس (3) قوس (4) وتر
41. قطر دایره با شعاع ۹ چقدر است؟
- 1 (1) 36 (2) 27 (3) 9 (4) 18
42. اگر دایره‌ای شعاع ۳ داشته باشد، طول قطر چند است؟
- 1 (1) 12 (2) 3 (3) 9 (4) 6
43. اگر دو شعاع با زاویه ۱۸۰ درجه رسم کنیم چه شکلی ایجاد می‌شود؟
- 1 (1) قطر (2) قطاع (3) قوس (4) مماس
44. وتر می‌تواند قطر باشد، اگر:
- 1 (1) از مرکز عبور کند (2) قوس باشد (3) کوتاه باشد (4) مماس باشد
45. قوس بزرگ‌تر از نیم‌دایره چه نام دارد؟
- 1 (1) قوس بزرگ (2) قوس کامل (3) قوس باز (4) قوس نیم

دوره دوم موجود نیست

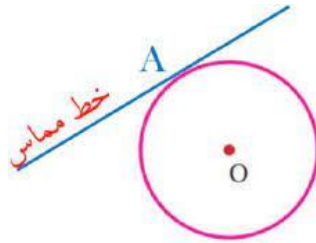
اهداف آموزشی؛

شاگردان عزیز در پایان این رهنما انتظار می‌رود که عناوین ذیل را به خوبی تحلیل نموده بتوانید اما تذکر می‌دهیم که اصل تمرکز شما روی کتاب و ویدیوهای آموزشی شما باشد چون راهنمایی آموزشی بسیار به شکل ساده و مفهومی عناوین را تشریح و توضیح داده است پس در ختم این راهنمایی آموزشی یادگیری عناوین از قبیل رابطه‌های طولی در دایره، طاقت

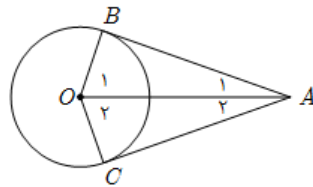
$$\sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} \text{ cm}$$

خط مماس با دایره

قضیه: اگر از یک نقطه خارجی به یک دایره دو مماس رسم گردد، طول این مماس ها با هم

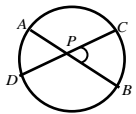


مساوی می باشد.



زاویه داخلی دایره

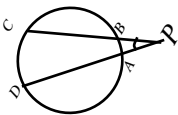
وسعت زاویه داخلی مساوی به نصف مجموعه قوس هایی که اضلاع زاویه قطع شده باشند ، میباشد.



$$\widehat{CPA} = \frac{1}{2} (\widehat{AD} + \widehat{BC})$$

زاویه خارجی دایره

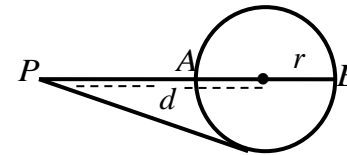
وسعت زاویه خارجی دایره مساوی به نصف تفاضل قوس هایی است که توسط وترها قطع می گردد.



یک نقطه نظر به یک دایره، خط مماس با دایره، زاویه داخلی دایره، زاویه خارجی دایره، دایره محیطی، دایره محاطی الزامی می باشد.

تشابه مثلث ها

قضیه: هرگاه بالای یک دایره از نقطه خارجی یک قاطع یک مماس رسم گردد مربع مماس مساوی به طاقت نقطه نظربه دایره است.



$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

1. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مثبت باشد، نقطه خارج دایره قرارداد.

$$\overline{PT}^2 = d^2 - r^2 > 0$$

2. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره صفر باشد ، نقطه بالای محیط دایره واقع است.

$$\overline{PT}^2 = d^2 - r^2 = 0$$

3. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره منفی باشد ، نقطه به داخل دایره واقع است.

$$\overline{PT}^2 = d^2 - r^2 < 0$$

مثال: اگر فاصله یک نقطه از مرکز دایره مساوی به 8 cm و شعاع دایره مساوی به 4 cm باشد ، طاقت نقطه نظر به دایره چند است.

حل .

$$d^2 - r^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48$$

مثال: فاصله یک نقطه از مرکز دایره 10 cm است ، اگر شعاع این دایره 4 cm باشد ، پس طول مماس از این نقطه به دایره چند است.

حل.

$$BAC = \frac{1}{2}(DC - AB)$$

سوالات تقویتی:

1. در مثلث های متشابه اضلاع مقابل زاویه های مساوی با هم می باشد؟
الف) متناسب ب) مختلف ج) متمم د) هیچکدام
2. اگر قطر یک دایره 10cm باشد یک نقطه p به فاصله 13cm از مرکز دایره قرار دارد طاقت نقطه p را نظر به دایره محاسبه کنید؟
الف) 134 ب) 144 ج) 321 د) 54
3. هرگاه در دو مثلث، دو زاویه مثلث با هم مساوی باشد زاویه سوم آن با هم چه رابطه دارد؟
الف) مساوی است ب) متمم هم است ج) مختلف است د) هیچکدام
4. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مثبت باشد نقطه () قرار دارد؟
الف) خارج دایره ب) داخل دایره ج) مماس با دایره د) هیچکدام
5. هرگاه از یک نقطه خارجی بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد حاصل ضرب هر قاطع در قطعه خارجی آن باهمدیگر چه رابطه دارد؟
الف) مساوی است 2) هیچ رابطه ندارد ج) مخالف است د) مکمل است
6. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره صفر باشد نقطه () دایره واقع است؟
الف) داخل دایره ب) خارج دایره ج) مماس با دایره د) بالای محیط دایره
7. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره کوچکتر از صفر یا منفی باشد نقطه () دایره قرار دارد؟
الف) داخل دایره ب) خارج دایره ج) مماس با دایره د) همه
8. اگر از یک نقطه خارجی به یک دایره دو مماس رسم گردد طول این مماس ها با هم () است؟
الف) منطبق ب) موازی ج) مساوی د) هیچکدام
9. وسعت زاویه خارجی دایره مساوی به نصف تفاضل قوس های است که توسط () قطع می گردد.
الف) قطر دایره ب) وتر دایره 3) قوس دایره د) قطاع دایره
10. وسعت هر زاویه خارجی مثلث () به مجموعه دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است
الف) موازی ب) منطبق ج) مساوی د) هیچکدام
11. وسعت هر زاویه داخلی دایره مساوی به نصف مجموعه قوس های است که توسط اضلاع زاویه از () دایره جدا می شود.

- الف) محیط دایره ب) قطر دایره ج) راس دایره د) همه
12. هر زاویه () نصف قوس مقابل آن است
الف) زاویه مجاور ب) زاویه مقابل ج) زاویه محیطی د) گزینه اول درست است
13. دایره بی که از راست های یک مضلع بگذرد به نام دایره () مضلع یاد می گردد
الف) دایره مماسی ب) دایره محاطی ج) دایره خارجی د) دایره محیطی
14. زاویه بی که از تقاطع دو قاطع دو مماس و یا یک قاطع و یک مماس در خارج دایره تشکیل گردد بنام زاویه () یاد میشود
الف) زاویه مجاور ب) زاویه غیرمجاور ج) زاویه غیری خارجی د) زاویه خارجی
15. نقطه تقاطع ناصف های عمودی اضلاع ی مثلث () دایره محیطی این مثلث می باشد.
الف) نقطه تقاطع ب) نقطه تنصیف ج) نقطه مرکز د) همه موارد
16. دایره که از راس های یک مضلع بگذرد به نام دایره () یاد میکند؟
الف) خارجی مضلع ب) داخلی مضلع ج) محیطی مضلع د) هیچکدام
17. دایره که از تمام راس های ی مضلع بگذرد () را مرسوم به دایره گویند؟
الف) مضلع ب) دایره ج) هر دو د) هیچکدام
18. دایره ی که محیط آن به اضلاع مضلع مماس باشد دایره () گفته میشود
الف) محیطی ب) مماس ج) منطبق د) محاطی
19. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مثبت باشد نقطه دایره قرار دارد؟
الف) داخل ب) خارج ج) مماس د) هیچکدام
20. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره مثبت باشد به کدام یکی از حالت های ذیل نشان داده میشود؟
الف) $p = d^2 - b^2$ ب) $p = d^2 < r^2$ ج) $p = d^2 > r^2$ د) هیچکدام
21. مثلث قائم الزاویه ABC که طول اضلاع قائم آن به ترتیب 8cm و 6cm باشد شعاع دایره محیطی این مثلث را دریابید؟
الف) 5 سانتی متر ب) 3 سانتی متر ج) 4cm د) 6cm
22. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره صفر باشد نقطه..... دایره قرار دارد؟
الف) داخل ب) خارج ج) بالای محیط دایره د) هیچکدام
23. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره کوچکتر از صفر باشد نقطه دایره قرار دارد؟
الف) داخل ب) خارج ج) مماس د) همه درست
24. در صورتکه طاقت یک نقطه نظر به یک دایره صفر باشد به یکی از حالت های ذیل نشان داده میشود؟
الف) $p = d^2 - b^2$ ب) $p = d^2 < r^2$ ج) $p = d^2 > r^2$ د) $p = r^2 - d^2$

25. از یک نقطه ثابت خارج از دایره اگر بالای یک دایره دو قاطع رسم گردد که قاطع دومی آن از مرکز دایره حاصل ضرب قاطع دومی در قطعه خارجی آن مساوی به مقدار ثابت است؟

الف) $p = d^2 - b^2$ (ب) $p = d^2 < r^2$ (ج) $p = d^2 - r^2$ (د) $p = r^2 - d^2$

26. اگر طاقت یک نقطه نظر به یک دایره کوچکتر از صفر باشد نقطه به کدام یکی از حالت های ذیل نشان داده میشود؟

الف) $p = d^2 - b^2$ (ب) $p = d^2 < r^2$ (ج) $p = d^2 > r^2$ (د) $p = r^2 - d^2$

27. نقطه تقاطع ناصف های عمودی اضلاع یک مثلث دایره محیطی این مثلث می باشد؟

الف) مرکز (ب) وتر (ج) قطر (د) محیط

28. نقطه تقاطع ناصف الزوایای داخلی هر مثلث مرکز دایره است؟

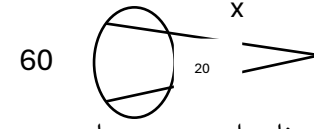
الف) محیطی (ب) متقاطع (ج) موازی (د) محاطی

29. مقدار x را دریافت کنید؟

الف) 10 (ب) 20 (ج) 15 (د) 30

30. در شکل داده شده ذیل قیمت P را محاسبه کنید؟

الف) 20 (ب) 60 (ج) 45 (د) 10



31. دایره ی که محیط آن به هر سه ضلع یک مثلث مماس باشد بنام دایره یاد میشود؟

الف) محیطی (ب) محاطی (ج) مماسی (د) داخلی

32. عمودی های و سطحی مثلث در داخل در یک نقطه کدام حالت را دارد؟

الف) متقاطع است (ب) موازی است (ج) منطبق است (د) هیچکدام

33. اگر یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع 4 واحد باشد شعاع دایره محاطی را دریابید؟

الف) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (ب) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ج) الف و ب درست (د) هیچکدام

34. اگر مساحت یک مثلث 20 سانتی متر مربع باشد و محیط آن 4 سانتی متر باشد شعاع دایره محاطی را دریابید؟

الف) 5 سانتی متر (ب) 4 سانتی متر (ج) 6 سانتی متر (د) هیچکدام

35. دایره های ه از راس های مثلث عبور ند و مثلث را کامل دربر بگیرد بنام دایره یاد میشود

الف) محیطی (ب) محاطی (ج) مماسی (د) داخلی

36. اگر در دو مثلث متشابه طول یک ضلع مثلث اول برابر ۱۲ cm و ضلع متناظر آن در مثلث دوم برابر ۱۸ cm باشد، نسبت مساحت دو مثلث چقدر است؟

الف) 1:2 (ب) 4:9 (ج) 2:3 (د) 1:3

37. اگر از یک نقطه خارج دایره دو قاطع رسم شوند که یکی از آن ها با دایره دو نقطه را قطع کند و دیگری مماس بر دایره باشد، رابطه چه خواهد بود؟

الف) مربع طول مماس برابر ضرب کل قاطع در قطعه خارجی آن است

(ب) طول مماس برابر قاطع است (ج) قاطع بزرگتر است (د) هیچکدام

38. طول وتر یک دایره برابر 16cm است و فاصله آن از مرکز دایره 3cm می باشد، شعاع دایره چند سانتی متر است؟

الف) 5 (ب) 8 (ج) 10 (د) 13

39. در مثلث ABC، اگر طول ارتفاع وارد بر وتر BC برابر 9 باشد و طول وتر BC برابر 12 باشد، مساحت مثلث چقدر است؟

الف) 54 (ب) 108 (ج) 27 (د) 36

40. اگر مجموع سه قوس دایره برابر 240 درجه باشد، قوس چهارم چند درجه است؟

الف) 120 (ب) 60 (ج) 90 (د) 180

41. اگر طول دو وتر در یک دایره به ترتیب 12 و 16 باشد و این وترها یکدیگر را عموداً در نقطه ای به فاصله 3cm از مرکز قطع کنند، شعاع دایره چقدر است؟

الف) 10 (ب) 5 (ج) 13 (د) 8

42. در مثلثی که شعاع دایره محیطی آن برابر با طول ضلع مقابل به زاویه ۹۰ درجه باشد، مثلث چگونه است

الف) متساوی الساقین (ب) متساوی الاضلاع

(ج) قائم الزاویه (د) قائم متساوی الساقین

43. اگر دو مثلث متشابه باشند و نسبت اضلاع متناظر آن ها برابر 3:4 باشد، نسبت ارتفاع های آن ها چیست؟

الف) 3:4 (ب) 9:16 (ج) 4:3 (د) 16:9

44. اگر دو قاطع از یک نقطه خارج دایره رسم شوند و یکی از آن ها با دایره در نقاط M و N و دیگری در نقاط P و Q قطع کند، حاصل ضرب AM×AN با AP×AQ چه رابطه ای دارد؟

الف) مساوی است (ب) یکی دو برابر دیگری است

(ج) هیچ رابطه ای ندارد (د) مکمل هم هستند

45. در مثلث ABC، اگر زاویه A=90 درجه باشد و ارتفاع وارد بر وتر برابر با نصف طول وتر باشد، مثلث چه ویژگی دارد؟

الف) متساوی الاضلاع (ب) قائم متساوی الساقین

در پایان این درس‌ها، شاگردان باید بتوانند:

1. چهارضلعی مرسوم به دایره را تعریف و خاصیت زوایای مقابل آن را تحلیل کنند.
2. با مفهوم مضلع منظم آشنا شده و بتوانند آن را ترسیم و زاویه‌های داخلی آن را حساب کنند.
3. شعاع، قطر، محیط و مساحت دایره را تعریف و از فرمول‌های مربوط استفاده نمایند.
4. با مفاهیم پایه هندسه تحلیلی آشنا شوند و فاصله بین دو نقطه در صفحه مختصاتی را به دست آورند.
5. مختصات نقطه وسط یک قطعه خط را به کمک فرمول محاسبه کنند.

چهارضلعی محاطی (چهارضلعی مرسوم به دایره)

تعریف تفصیلی:

چهارضلعی‌ای که هر چهار رأس آن روی محیط یک دایره قرار گیرد، چهارضلعی محاطی یا "چهارضلعی مرسوم به دایره" گفته می‌شود. به زبان ساده، اگر بتوانیم دایره‌ای رسم کنیم که از تمام گوشه‌های چهارضلعی عبور کند، آن چهارضلعی محاطی است.

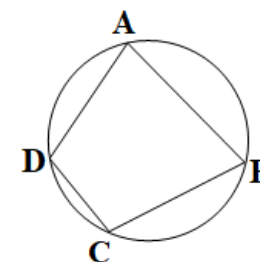
اهمیت:

این خاصیت در طراحی‌های معماری، ساخت چارچوب‌ها و حتی در هنر هندسی استفاده می‌شود.

خاصیت مهم:

در چنین چهارضلعی:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ \quad \text{و} \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$$



مثال دوم:

در چهارضلعی محاطی، اگر $\angle D = 65^\circ$ و $\angle B = ?$ باشد : چون $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ، پس:

$$\angle B = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

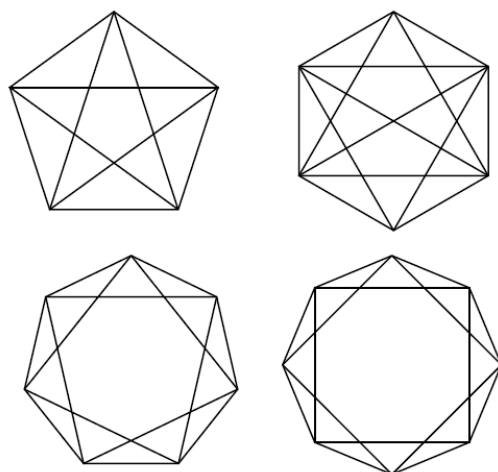
تمرین دوم:

در چهارضلعی محاطی، اگر $\angle A = 90^\circ$ و $\angle C = ?$ ، مقدار زاویه‌ی C را پیدا کن.

2. ترسیم مضلع منظم

تعریف تفصیلی:

مضلع منظم شکلی است که همه ضلع‌ها و زاویه‌های آن مساوی باشند. به عنوان مثال، مثلثی که هر سه ضلع و زاویه‌اش برابر باشد، مثلث متساوی‌الاضلاع و منظم است.



اهمیت:

ترسیم مضلع منظم در طراحی ساختمان‌ها، هنر اسلامی، نقشه‌برداری و مهندسی کاربرد دارد.

فرمول زاویه داخلی:

$$\text{زاویه داخلی} = \frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$$

مثال دوم:

در هشت ضلعی منظم:

$$\angle = \frac{(8 - 2) \times 180^\circ}{8} = \frac{6 \times 180^\circ}{8} = 135^\circ$$

تمرین دوم:

زاویه داخلی یک ده ضلعی منظم را پیدا نمایید.

فعالیت دوم:

یک دایره رسم کنید، و آن را به ۵ یا ۸ قسمت مساوی تقسیم نموده، یک مضلع منظم رسم نمایید.

محیط و مساحت دایره

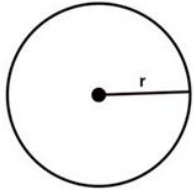
تعریف تفصیلی:

دایره مجموعه‌ای از نقاط در یک صفحه است که فاصله مساوی از یک نقطه مرکزی دارند. شعاع (r) فاصله بین مرکز تا محیط

قطر (d) دو برابر شعاع

محیط: فاصله دایره در دور رادور آن

مساحت: مقدار سطح داخل دایره



$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r$$

اهمیت:

محیط و مساحت دایره در اندازه‌گیری چاه‌ها، چرخ‌ها، درها، سی‌دی‌ها و غیره استفاده می‌شود.

فرمول‌ها:

$$P = 2\pi r \quad A = \pi r^2$$

مثال دوم:

اگر شعاع دایره ۵ سانتی‌متر باشد:

تمرین دوم:

اگر شعاع ۱۲ سانتی‌متر باشد، محیط و مساحت دایره را حساب کنید.

هندسه تحلیلی - فاصله بین دو نقطه

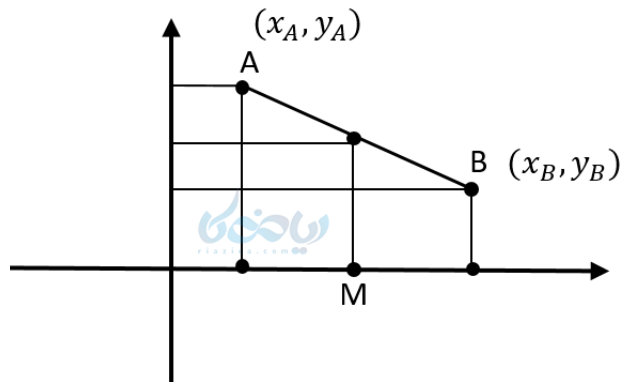
تعریف تفصیلی:

در هندسه تحلیلی، فاصله بین دو نقطه در صفحه مختصاتی با استفاده از فرمول فیثاغورس محاسبه می‌شود.

5. مختصات نقطه‌ی وسط یک قطعه خط

تعریف تفصیلی:

نقطه وسط یک قطعه خط نقطه‌ای است که آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این نقطه دقیقاً در وسط دو نقطه داده شده قرار دارد.



اهمیت:

در طراحی نقشه‌ها، تعیین مکان‌های متوازن، تنظیم میانه‌ها در ساختارها کاربرد دارد.

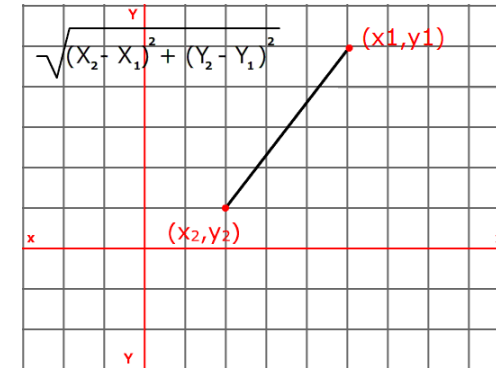
فرمول نقطه‌ی وسط:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

مثال دوم:

نقاط $A(-4, 2)$ و $B(6, -2)$ داده شده‌اند:

$$M = \left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{2 + (-2)}{2} \right) = (1, 0)$$



اهمیت:

از این فرمول در نقشه‌برداری، تعیین فاصله مکانی، موقعیت‌یابی GPS و بازی‌های کامپیوتری استفاده می‌شود.

فرمول فاصله:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

مثال دوم:

فاصله بین $A(2, 3)$ و $B(-1, -1)$:

$$= \sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

تمرین دوم:

نقاط $A(0, 0)$ و $B(6, 8)$ داده شده‌اند. فاصله بین آن‌ها را بیابید.

تمرین دوم:

مختصات نقطه وسط بین $A(3,7)$ و $B(9,1)$ را بیابید.

نتیجه گیری کلی:

این مفاهیم پایه‌های اصلی درک هندسه هستند و شاگردان با یادگیری این مطالب می‌توانند:

✓ درک قوی‌تری از ساختارهای ریاضی و هندسی پیدا کنند

✓ مهارت در ترسیم و تحلیل شکل‌ها را افزایش دهند

✓ مسائل واقعی مانند فاصله‌سنجی، طراحی و نقشه‌برداری را حل کنند

سوالات تقویتی:

1. تعداد قطرهای که از راس یک n ضلعی رسم می‌گردد از کدام رابطه بدست می‌آورند

(1) $n-2$ (2) $n-3$ (3) $n-4$ (4) $n-1$

2. مساحت دایره را پیدا کند که طول شعاع آن 3cm باشد؟

(1) $9\pi\text{cm}^2$ (2) $8\pi\text{cm}^2$ (3) $7\pi\text{cm}^2$ (4) $9\pi\text{m}^2$

3. مضلع بی‌که اضلاع و زاویه‌های آن باهم مساوی باشد، به نام مضلع یاد می‌شود؟

(1) منظم (2) غیر منظم (3) غیر مشابه (4) مشابه

4. وسعت زاویه مرکزی مقابل هر ضلع یک n ضلعی منظم مساوی است به؟

(1) $\theta = \frac{360}{n}$ (2) $\theta = \frac{300}{n}$ (3) $\theta = \frac{380}{n}$ (4) هیچکدام

5. طول ضلع هر شش ضلعی منظم مساوی به شعاع دایره است؟

(1) محاطی (2) محیطی (3) مرکزی (4) 1 و 2 درست اس

6. مجموعه زاویه داخلی 4 ضلعی چند درجه است؟

(1) 180° (2) 270° (3) 360° (4) 20°

7. اگر محیط دایره $14\pi\text{cm}$ باشد، شعاع آن را پیدا کند؟

(1) 7cm (2) 3cm (3) 10cm (4) $\frac{5}{\pi}$

8. فاصله بین نقطه $A(3, 4)$ و مبدا کمیات وضعیه را پیدا کند؟

(1) 5 (2) 6 (3) 7 (4) 8

9. سیستم کمیات وضعیه، صفحه را به چند حصه تقسیم می‌کند؟

(1) سه حصه (2) پنج حصه (3) شش حصه (4) چهار حصه

10. مجموعه زاویه مقابل یک چهار ضلعی مرسوم به دایره چند درجه است؟

(1) 180° (2) 270° (3) 360° (4) 720°

11. در سیستم کمیات وضعیه، خط عمودی رابه نام..... یاد می‌کند؟

(1) محور X (2) محور Y (3) مبدا (4) هیچ کدام

12. مجموع زاویه خارجی یک هشت ضلعی را پیدا کند؟

(1) 180° (2) 270° (3) 360° (4) 720°

13. اگر نقاط $A(1, 0)$ ، $B(3, 4)$ ، $C(0, 3)$ راس‌های یک مثلث باشد، موقعیت مثلث در کدام ناحیه است؟

(1) اول (2) دوم (3) سوم (4) چهارم

14. مجموع زاویه داخلی 6 ضلعی را پیدا کند؟

(1) 180° (2) 270° (3) 360° (4) 720°

15. نقطه وسطی یا میانه نقاط $A(1, 3)$ و $B(7, 5)$ را دریابید؟

(1) $M(4, 4)$ (2) $M(3, 4)$ (3) $M(2, 2)$ (4) هیچکدام

16. فاصله بین نقطه $A(1, 3)$ و $B(5, 2)$ را پیدا کند؟

(1) $\sqrt{4}$ (2) $\sqrt{17}$ (3) 3 (4) 5

17. اگر نقاط $A(0, 4)$, $B(3, 0)$ و $C(0, 0)$ راس های یک مثلث باشد، شما طول وتر مثلث را پیدا کنید؟

- (1) 5 (2) 6 (3) 8 (4) 7

18. قیمت تقریبی عدد پای (π) چند است؟

- (1) 3.1415 (2) 2.7172 (3) $\frac{22}{7}$ (4) 3 و 1 درست است

19. مساحت متوازی الاضلاع از کدام طریق بدست می آید؟

(1) قاعده ضرب ارتفاع (2) طول ضرب عرض

(3) ارتفاع ضرب عرض (4) قطر ضرب ارتفاع

20. مساحت یک دایره به شعاع p توسط کدام رابطه بدست می آید؟

- (1) πp^2 (2) πp (3) $2\pi p$ (4) هیچکدام

21. اعداد حقیقی که در قسمت بالای محوری عمودی قرار دارد به نام اعداد..... یاد می شود

- (1) مثبت (2) منفی (3) صفری (4) خنثی

22. سیستم کمیات وضعیه از تقاطع..... به وجود آمده است؟

- (1) موازی (2) مساوی (3) محورات عمودی و افقی (4) معادل

23. مختصات مبدا کمیات وضعیه را چگونه نشان می دهند؟

- (1) $O(0, 0)$ (2) $O(1, 1)$ (3) $O(0, 1)$ (4) هیچکدام

24. فاصله نقطه $A(0, 1)$ را از مبدا پیدا کنید؟

- (1) 1 واحد (2) 2 واحد (3) 5 واحد (4) 4 واحد

25. مجموعه زاویه جارجی یک 10 ضلعی را پیدا کنید؟

- (1) 180° (2) 270° (3) 360° (4) 20°

26. مجموعه زاویه داخلی یک 12 ضلعی را پیدا کنید؟

- (1) 1800° (2) 2700° (3) 360° (4) 20000°

27. مساحت دایره توسط کدام رابطه ذیل پیدا می شود؟

- (1) πr (2) $2\pi r$ (3) πr^2 (4) هیچکدام

28. در سیستم کمیات وضعیه، خط افقی را به نام یاد می کند؟

- (1) محور X (2) محور Y (3) مبدا (4) هیچ کدام

29. اگر نقاط $A(0, 0)$, $B(2, 2)$, $C(2, 0)$ و $D(0, 2)$ راس های یک مربع باشد شما طول قطر مربع را پیدا کنید؟

- (1) $\sqrt{8}$ (2) $\sqrt{17}$ (3) 4 (4) 5

30. اگر نقاط $A(0, 4)$, $B(3, 0)$ و $C(0, 0)$ راس های یک مثلث باشد، شما نوعیت مثلث را پیدا کنید؟

(1) متساوی الاضلاع (2) قائم الزاویه (3) حاده الزاویه (4) مثلث تشکل نمی شود

31. اگر نقطه $A(-2, 4)$ ، $B(-9, 3)$ انجام های یک قطعه خط باشد، شما موقعیت آن را در سیستم کمیات وضعیه تعیین کنید؟

- (1) ناحیه اول (2) ناحیه دوم (3) ناحیه سوم (4) ناحیه چهارم

32. موقعیت نقطه $P(0, -8)$ را در سیستم کمیات وضعیه تعیین کنید؟

- (1) روی مثبت محوری X (2) روی منفی محوری Y

(3) روی منفی محوری X (4) در مبدا سیستم کمیات وضعی

33. مجموعه زاویه های داخلی یک n ضلعی را از کدام رابطه ذیل پیدا می کنید؟

- (1) $s = (n - 3)360$ (2) $s = (n - 2)180$

- (3) $s = \frac{360}{n}$ (4) $s = \frac{n-2}{180} 360$

34. مساحت دایره را پیدا کند که محیط آن 24 واحد باشد؟

- (1) $A = 20\pi^2$ (2) $A = \frac{\pi}{144}$ (3) $A = \frac{144}{\pi}$ (4) هیچکدام

$$AB = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (2) \quad AB = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1)$$

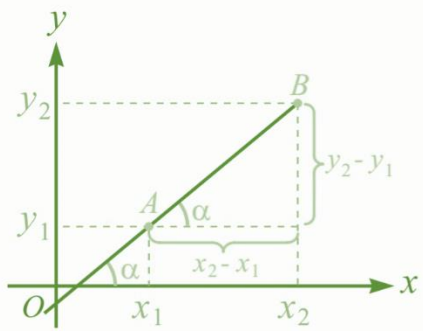
$$AB = \sqrt{x^3 + y^3} \quad (4) \quad AB = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \quad (3)$$

45. قطر یک دایره 60cm است شما محیط آن را پیدا کنید؟

$$\pi \quad (4) \quad 60\pi \quad (3) \quad 30\pi \quad (2) \quad 60 \quad (1)$$

میل خط مستقیم

میل خط مستقیم عبارت از Tan زاویه بی است که خط مستقیم با جهت مثبت محوری x می سازد.



$$M_{AB} = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

نکات اساسی و مهم:

- اگر خط مستقیم موازی با محوری x باشد میل آن صفر است.
- اگر خط مستقیم عمود بالای محوری x باشد میل آن تعریف نشده است.
- میل هر خط مستقیم مربوط زاویه بی است که با جهت مثبت محوری x می سازد.
- اگر یک خط مستقیم با جهت مثبت محوری x زاویه حاده بسازد، میل آن مثبت است.
- اگر یک خط مستقیم با جهت مثبت محوری x زاویه منفرجه بسازد، میل آن منفی است.

35. وسعت زاویه مرکزی مقابل هر شش ضلعی منظم چند درجه است؟

$$180 \quad (4) \quad 90 \quad (3) \quad 60 \quad (2) \quad 50 \quad (1)$$

36. اگر نقطه A(3, 8)، B(-8, -2) و C(-11, 3) راس های یک مثلث باشد شما نوعیت مثلث را مشخص کنید؟

(1) متساوی الاضلاع (2) متساوی الساقین (3) مختلف الاضلاع (4) مثلث تشکل نمی شود

37. مساحت دایره را پیدا کنید که قطر آن 22 سانتی متر باشد و محیط آن 22π باشد؟

$$25\pi \quad (4) \quad 300 \quad (3) \quad 380.1 \quad (2) \quad 121\pi \quad (1)$$

38. نسبت محیط دایره بر قطر دایره مساوی است به؟

$$\pi \quad (1) \quad \varepsilon \quad (2) \quad 3.4415 \quad (3) \quad 1 \text{ و } 3 \text{ درست} \quad (4)$$

39. شعاع یک دایره مساوی است به؟

(1) برابر قطر دایره (2) دو برابر قطر (3) نصف قطر (4) هیچکدام

40. مساحت مضلع منظم از روی شعاع دایره محاطی از کدام رابطه بدست می آورند؟

(1) نصف محیط ضرب در شعاع (2) قاعده ضرب ارتفاع

(3) هر دو گزینه درست است (4) هیچکدام

41. تعداد قطر های که از راس یک 8 ضلعی رسم می شود چند است؟

$$7 \quad (4) \quad 8 \quad (3) \quad 6 \quad (2) \quad 5 \quad (1)$$

42. اگر نقاط A(0, 4)، B(3, 0)، C(3, 4) و D(0, 0) راس های یک مستطیل باشد شما اندازه قطر مستطیل را پیدا کنید؟

$$5 \quad (1) \quad 10 \quad (2) \quad 15 \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad \text{واحد}$$

43. محیط دایره را توسط کدام رابطه بدست می آورند؟

$$2\pi r \quad (1) \quad 4\pi r \quad (2) \quad \pi r \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad \text{هیچکدام}$$

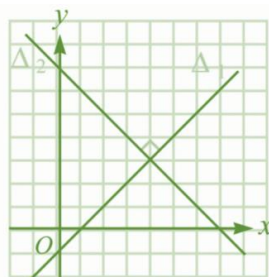
44. فاصله یک نقطه از مبدا کمیات وضعیه توسط کدام رابطه بدست می آورند؟

اگر خط مستقیم Δ_1 از نقاط $A(2, 5)$ و $B(-6, -11)$ و خط مستقیم Δ_2 از نقاط $C(-4, -6)$ و $D(3, 8)$ بگذرد خطوط باهم چه ارتباط دارند؟
حل: میل های مستقیم های Δ_1 و Δ_2 را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} &= \frac{-11 - (5)}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} &= \frac{8 + 6}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

میل مستقیم های عمود بر یکدیگر

زمان دو خط باهم عمود است که حاصل ضرب میل های مساوی به -1 شود.



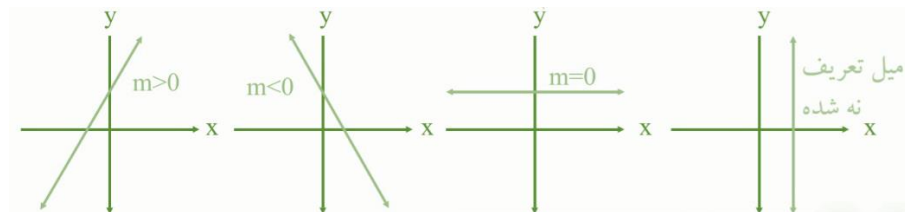
$$m_1 \times m_2 = -1$$

خط مستقیم که از نقطه $A(7, 5)$, $B(1, 1)$ و مستقیم که از نقطه $C(0, 5)$, $D(1, 1)$ می گذرد باهم چه ارتباط دارند؟

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{1 - 7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{CD} = \frac{2 - 5}{2 - 0} = \frac{-3}{2}$$

چون میل $m_{AB} \times m_{CD} = -1$ است پس خطوط باهم دیگر عمود است



مثال 1

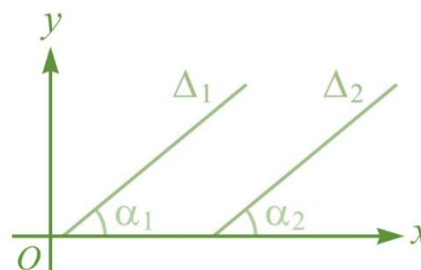
میل خط مستقیم را پیدا کنید که از نقطه $(2, 3)$, $(3, 5)$ میگذرد؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad m = \frac{5 - 3}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

میل مستقیم های موازی

اگر دو خط مستقیم میل های مساوی داشته باشند مستقیم ها باهم موازی و زاویه های که با جهت مثبت محوری x می سازد باهم برابر است.



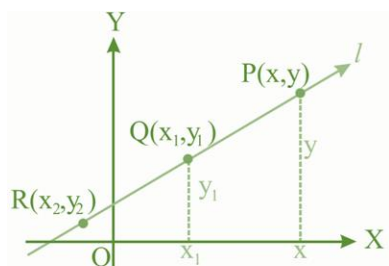
$$\Delta_1 \parallel \Delta_2$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$$

$$m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2}$$

مثال 1

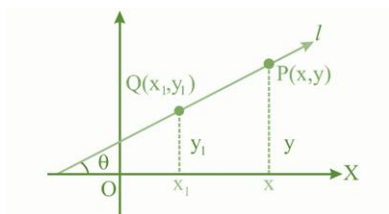
3. معادله خط مستقیم که دو نقطه آن معلوم باشد:
از رابطه ذیل پیدا میشود:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

4. معادله خط مستقیم که میل و یک نقطه آن معلوم باشد:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

شکل عمومی معادله خط مستقیم

معادله خط مستقیم در حالت معیاری (استاندارد) به شکل ذیل است:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{یا} \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

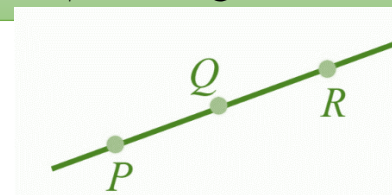
➤ که در معادله فوق x و y متحول است a, b و c اعداد حقیقی، طوری که a و b هم زمان صفر شده نمی تواند.

➤ و همچنان $-\frac{a}{b}$ میل خط و $-\frac{c}{b}$ نقطه تقاطع با محور y است.

حالات دو خط نظر به هم:

در صورت معادله خط اولی $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ و معادله خط دومی

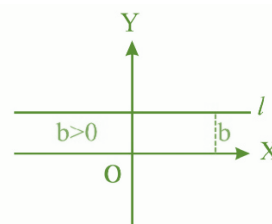
نکته: معادله یک خط مستقیم خط قرار دارد که میل هر قطع خط آن با هم مساوی باشد.



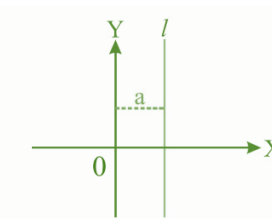
$$m_{PQ} = m_{QR}$$

معادله یک خط مستقیم رابطه الجبری است، که اگر مختصات هر نقطه از خط را در رابطه وضع نماییم علامه مساوات نکند. معادله خط مستقیم را در حالت های مختلف طوری ذیل بررسی می نماییم.

1. معادله خط مستقیم که موازی با محوری x باشد، میل آن صفر است و معادله $y = b$ است که b نقطه تقاطع با محوری y است.



2. معادله خط مستقیم که عمود بالای محوری x باشد، میل آن بی نهایت و معادله آن $x = a$ که a نقطه با محوری x است.



$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ باشد، حالت های ذیل را در نظر می گیریم:

1. زمانی که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ خطوط باهمدیگر موازی است.
2. زمانی که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ خطوط باهمدیگر متقاطع است.
3. زمانی که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ خطوط باهمدیگر منطبق است.
4. زمانی که $a_1a_2 = -b_1b_2$ خطوط باهمدیگر عمود است.

مثال 1

خطوط $5y + 3x = 1$ و $6x + 10y = 5$ باهم دیگر چه ارتباط دارند؟

$$\frac{5y + 3x = 1}{6x + 10y = 5} \quad \frac{5}{10} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{5}$$

پس خطوط باهم دیگر موازی است

سوالات تقویتی:

1. خط مستقیم که از نقطه $(2, 6)$ و $(5, k)$ میگذرد قیمت k را طوری پیدا کنید که میل آن 3 باشد؟

15 (1	16 (2	18 (3	20 (4
-------	-------	-------	-------
2. میل خط مستقیم را پیدا کند که از نقطه $(2, 4)$ و مبدای کمیات می گذرد؟

3 (1	4 (2	2 (3	6 (4
------	------	------	------
3. میل هر خط مستقیم مربوط به زاویه است که با جهت می سازد؟

1 (1 مثبت محوری Y	2 (2 مثبت محوری X
3 (3 منفی محوری Y	4 (4 منفی محوری X
4. اگر یک خط مستقیم با جهت مثبت محوری X زاویه حاده بسازد میل آن است؟

1 (1 مثبت	2 (2 منفی	3 (3 صفر	4 (4 بی نهایت
-----------	-----------	----------	---------------
5. میل خط مستقیم که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد از کدام رابطه پیدا می شود؟

1 (1 $M = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	2 (2 $M = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$	3 (3 $M = \frac{y - y_1}{x - x_1}$	4 (4 $M = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}$
--	--	------------------------------------	--
6. میل خط مستقیم که از نقطه $(3, 5)$ و $(4, 6)$ میگذرد را پیدا کنید؟

- 1 (1 2 (2 3 (3 4 (4
7. دو خط مستقیم که یکی از نقاط $(1, 1)$, $(7, 5)$ و دیگری آن از نقاط $(2, 2)$, $(0, 5)$ میگذرد باهم چه ارتباط دارد؟

1 (1 موازی است	2 (2 منطبق است	3 (3 عمود است	4 (4 متقاطع
----------------	----------------	---------------	-------------
8. اگر یک خط مستقیم با جهت مثبت محوری X زاویه منفرجه بسازد میل آن است؟

1 (1 مثبت	2 (2 منفی	3 (3 صفر	4 (4 بی نهایت
-----------	-----------	----------	---------------
9. میل خط مستقیم که از نقطه $(-1, -1)$ و $(1, 1)$ میگذرد را پیدا کنید؟

1 (1 2 (2 3 (3 4 (4

10. اگر میل یک خط مستقیم صفر درجه باشد، خط مستقیم با محوری Y زاویه چند درجه را می سازد؟

1 (1 60°	2 (2 180°	3 (3 90°	4 (4 360°
-----------------	------------------	-----------------	------------------
11. اگر میل خطوط و نقطه تقاطع آن باهم مساوی باشد خطوط باهم چه ارتباط دارند؟

1 (1 موازی است	2 (2 متقاطع است	3 (3 منطبق است	4 (4 عمود است
----------------	-----------------	----------------	---------------
12. خطوط موازی دارای میل های است؟

1 (1 مختلف	2 (2 عمود	3 (3 مساوی	4 (4 هیچکدام
------------	-----------	------------	--------------
13. میل خط مستقیم که با محوری Y موازی باشد، چند است؟

1 (1 صفر	2 (2 1	3 (3 ∞	4 (4 -1
----------	--------	---------------	---------
14. میل خط مستقیم که موازی با محوری X باشد چند است؟

1 (1 صفر	2 (2 1	3 (3 ∞	4 (4 -1
----------	--------	---------------	---------
15. اگر حاصل ضرب میل های دو خط مستقیم -1 شود، خطوط باهم چه ارتباط دارند؟

1 (1 موازی است	2 (2 منطبق است	3 (3 عمود است	4 (4 متقاطع
----------------	----------------	---------------	-------------
16. دو خط مستقیم که یکی از نقاط $(0, -1)$, $(-1, -3)$ و دیگری آن از نقاط $(0, -1)$, $(2, 3)$ میگذرد باهم چه ارتباط دارد؟

1 (1 موازی است	2 (2 منطبق است	3 (3 عمود است	4 (4 متقاطع
----------------	----------------	---------------	-------------
17. رابطه $y = x$ را به نام معادله خط یاد می کند؟

1 (1 خط منحنی	2 (2 خط مستقیم	3 (3 خط منکسر	4 (4 همه درست است
---------------	----------------	---------------	-------------------
18. معادله خط مستقیم را نشانی کند که نقطه $(3, 1)$ و عمود بالای محوری Y است؟

1 (1 $Y = -1$	2 (2 $Y = 1$	3 (3 $x = 1$	4 (4 $x = -1$
---------------	--------------	--------------	---------------
19. میل خط مستقیم که محوری X زاویه قائم را بسازد چند است؟

1 (1 صفر	2 (2 1	3 (3 ∞	4 (4 -1
----------	--------	---------------	---------
20. خط مستقیم که از نقطه $(3, 2)$ و $(1, a)$ میگذرد قیمت را a طوری پیدا کنید که میل آن 3 باشد؟

21. معادله خط مستقیم به شکل استاندارد $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ داده شده شما نقطه تقاطع

بمحوری y را پیدا کنید؟

(1) $y = b$ (2) $m = -\frac{a}{b}$ (3) $m = \frac{-c}{b}$ (4) $m = 1$

(22) هر مستقیمی در مستوی دارای معادله ذیل است؟

(1) $y = mx$ (2) $y = mx - h$ (3) $y = mx$ (4) هیچکدام

(23) معادله خط مستقیم که دو نقطه آن داده شده باشد از کدام رابطه بدست می آید؟

(1) $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (2) $\frac{y+y_1}{x+x_2} = \frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$

(3) $\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (4) $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(24) معادله خط مستقیم را دریابید که میل آن 0.5 و از نقطه (2, 3) میگذرد؟

(1) $y = x + 2$ (2) $y = 0.5x + 2$

(3) $y = 5x - 2$ (4) $y = \frac{1}{2}x$

(25) معادله خط مستقیم که محوری x را در نقطه a قطع کند مساوی است به؟

(1) $x=b$ (2) $x=a$ (3) $y=b$ (4) $y=-b$

(26) اگر خط مستقیم باجهت مثبت محوری X زاویه منفرجه را بسازد میل آن.....است؟

(1) مثبت (2) منفی (3) صفر (4) یک

(27) اگر میل دو خط باهم مساوی باشد زاویه های که با جهت مثبت محوری X می سازد باهم چه ارتباط دارد؟

(1) مختلف است (2) مساوی است (3) موازی است (4) متقاطع است

(28) کدام یک از گزینه ها بیانگر شیب خطی است که با محور x زاویه صفر درجه می سازد

(1) 1 (2) صفر (3) بی نهایت (4) گزینه 2 س درست است

(29) معادله خط مستقیم را نشانی کند که از (2, -1) و (3, 4) بگذرد؟

(1) $y = 5x - 10$ (2) $y = 5x - 9$

(3) $y = 5x + 9$ (4) $y = -5x + 11$

(30) در حالت معیاری چه زمانی خطوط باهم منطبق است؟

(1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (2) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (4) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(31) معادله خط مستقیم را نشانی کند که محوری X را در نقطه 2 و محوری Y را در نقطه 3

قطع نمایند؟

(1) $y = -\frac{3}{2}x - 3$ (2) $y = -4x - 3$

(3) $y = -\frac{3}{2}x + 3$ (4) $y = 3x - 4$

(32) معادله خط مستقیم به شکل استاندارد $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$ داده شده شما میل را پیدا کند؟

(1) $y = m$ (2) $m = -\frac{a}{b}$ (3) $m = \frac{c}{a}$ (4) $m = 1$

(33) وضعیت قطعه خط های که از نقاط (7, 5), (2, 4) و نقاط (-3, -5), (2, -4) می گذرد تعیین کنید؟

(1) موازی است (2) متقاطع است (3) عمود است (4) منطبق است

(34) در حالت معیاری چه زمانی خطوط باهم موازی است؟

(1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (2) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (4) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(35) معادله خط مستقیم را دریابید که میل آن 4 و محوری Y را در نقطه 3- قطع می کند؟

(1) $y = 4x - 3$ (2) $y = 3x - 4$ (3) $y = 4x - 1$ (4) هیچکدام

(36) معادله خط مستقیم در حالت استاندارد به کدام شکل است؟

(1) $ax + by + c = 0$ (2) $y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$

(3) $ax - b = c$ (4) 1 و 2 درست است

(37) اگر میل دو خط باهم مساوی نباشد آن دو خط باهم دیگر چه ارتباط دارد؟

(1) موازی است (2) متقاطع است (3) منطبق است (4) هیچکدام

(38) در حالت معیاری چه زمانی خطوط باهم متقاطع است؟

(1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ (2) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (3) هر دو درست است (4) هر دو غلط است

(39) خط مستقیم $3x + 4y = 5$ و $4x - 3y = 1$ باهم چه ارتباط دارد؟

(1) موازی است (2) متقاطع است (3) منطبق است (4) عمود است

(40) معادله خط مستقیم که میل و نقطه تقاطع با محوری y معلوم باشد از کدام رابطه بدست می آید

(1) $y = mx - c$ (2) $y = mx + b$ (3) $y = mx$ (4) $y = b$

(41) معادله خط مستقیم که محوری y را در نقطه b قطع می کند مساوی است به؟

(1) $x=b$ (2) $x=a$ (3) $y=b$ (4) $y=-b$

(42) معادله خط مستقیم که میل و یک نقطه آن معلوم باشد از کدام رابطه بدست می آید؟

(1) $y = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ (2) $m = \frac{y+y_1}{x+x_1}$ (3) $m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ (4) هیچکدام

(43) در معادله خط مستقیم $y = 5x - 6$ نقطه تقاطع با محوری y عبارت است ؟

(1) -5 (2) 5 (3) -6 (4) 6

(44) قطر مربع بالای یک دیگر..... است؟

(1) موازی (2) متقاطع (3) عمود (4) منطبق

3. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش افنا (مساوی ساختن ضرایب)

البته روش های دیگر هم وجود دارد مانند روش گراف، روش دیترینانت، روش گاوس و غیره. اما روش های فوق مورد بحث ما است.

1. حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به روش مساوات

در این روش یکی از مجهول ها را در هر دو معادله در نظر گرفته از جنس مجهول دیگر آن را پیدا می نماییم، بعداً با استفاده از مساوی بودن یک طرف مساوات، طرف دیگر آن را مساوی قرار داده یکی از مجهول ها را دریافت می گردد و بعد با وضع نمودن یکی از معادلات مجهول دومی نیز دریافت خواهد گردید.

مثال 1

سیستم معادلات دو مجهوله ذیل را به روش مساوات حل نمایید:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 19 \dots (1) \\ 3x + y = 9 \dots (2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{19-5y}{2} \dots (1) \\ x = \frac{9-y}{3} \dots (2) \end{cases}$$

از مقایسه رابطه 1 و 2 چون یک طرف مساوات باهم مساوی اند طرف دیگر مساوات نیز مساوی اند، پس می توان نوشت:

$$\begin{cases} x = \frac{19-5y}{2} \dots (1) \\ x = \frac{9-y}{3} \dots (2) \end{cases}$$

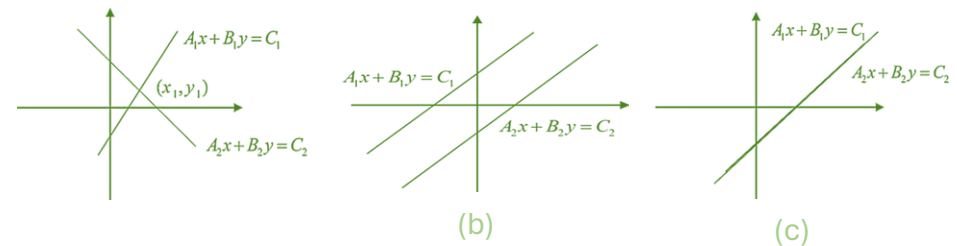
$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{19-5y}{2} &= \frac{9-y}{3} \\ 57-15y &= 18-2y \\ -15y+2y &= 18-57 \\ -13y &= -39 \\ \Rightarrow y &= 3 \end{aligned}$$

سیستم معادلات خطی

شکل عمومی آن به صورت $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ بوده طوریکه $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ اعداد ثابت و x, y مجهول معادله می باشند.

برای اینکه بدانیم سیستم معادلات فوق دارای حل می باشد یا خیر، سه حالت ذیل را در نظر می گیریم.

1. اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ باشد خطوط با یکدیگر در یک نقطه متقاطع است، معادله یک حل دارد.
2. اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ باشد خطوط با یکدیگر موازی است، معادله حل ندارد.
3. اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ باشد خطوط با یکدیگر منطبق است، معادله بینهایت حل دارد.



حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه یک

(a)

سیستم معادلات دو مجهوله به روش های مختلف قابل بوده که در همه روش ها عین جواب به دست می آید، که عبارت اند از:

1. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش مساوات
2. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش تعویضی

با قیمت گذاری y در یکی از معادله قیمت x حاصل می

$$\Rightarrow 2x + 5y = 8 \dots (1)$$

$$2x + 5\left(\frac{3}{4}\right) = 8$$

$$2x = 8 - \frac{15}{4}$$

$$2x = \frac{32 - 15}{4} = \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{17}{8}$$

3. حل سیستم معادلات دو مجهوله به روش مساوی ساختن ضرایب (افنا)

در این روش یکی از مجهول ها را در نظر گرفته، طوری که ضریب معادله اول را در معادله دوم و معادله دوم را در اول ضرب نموده تا ضرایب آن مجهول باهم مساوی گردد و بعداً عملیه افنا (جمع و تفریق) را انجام داده تا یک مجهول از بین رفته و مجهول دومی دریافت گردد و سپس با وضع قیمت آن در یکی از معادلات مذکور می توان، مجهول اولی را به سادگی به دست آورد.

مثال 1

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول ذیل را به روش افنا

حل نمایید:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \dots (1) \\ 3x + 2y = 4 \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 3 \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 6x - 9y = -3 \\ \pm 6x \pm 4y = \pm 8 \\ \hline 0 - 13y = -11 \\ \hline \Rightarrow y = \frac{11}{13} \end{array} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \\ = \frac{19 - 5y}{2} \dots (1) \\ x = \frac{19 - 5(3)}{2} \\ x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \end{array} \right\}$$

2. حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به روش تعویضی

در این روش قیمت یکی از مجهول ها را از یک معادله از جنس دیگری دریافت و در معادله دومی تعویض می نماییم، در این صورت معادله یک مجهوله درجه یک بدست می آید که با ساده نمودن آن می توان مجهول دوم را نیز بدست آورد.

مثال 1

سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول را به روش تعویضی حل نمایید:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \dots (1) \\ 4x - 6y = 4 \dots (2) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{8 - 5y}{2} \dots (2)$$

$$4\left(\frac{8 - 5y}{2}\right) - 6y = 4 \dots (2)$$

$$\begin{aligned} 16 - 10y - 6y &= 4 \\ -16y &= 4 - 16 \\ -16y &= -12 \\ \Rightarrow y &= \frac{-12}{-16} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$C(2, 4) = (-2, 4)$$

(b) تحت این تبدیلی فقط مختصه x و y را تبدیل می کنیم:

$$(x, y) \xrightarrow{t_2} (y, x)$$

$$A(4, 1) = (1, 4)$$

$$B(1, 2) = (2, 1)$$

$$C(2, 4) = (4, 2)$$

(c) تحت این تبدیلی فقط مختصه y را ضرب منفی یک می کنیم:

$$(x, y) \xrightarrow{t_3} (x, -y)$$

$$A(4, 1) = (4, -1)$$

$$B(1, 2) = (1, -2)$$

$$C(2, 4) = (2, -4)$$

(d) تحت این تبدیلی فقط مختصه x جمع عدد 2 و مختصه y را جمع عدد 3 می کنیم:

$$(x, y) \xrightarrow{t_4} (x + 2, y + 3)$$

$$A(4, 1) = (6, 4)$$

$$B(1, 2) = (3, 5)$$

$$C(2, 4) = (4, 7)$$

نکته: اگر در یک تبدیل که فاصله بین نقاط تغییر نکند تبدیل ایزومتري است. در تبدیل ایزومتري

تصویر یک شکل با اصل انطباق پذیر است.

انتقال Translation

$$2x - 3y = -1 \dots (1)$$

$$2x - 3\left(\frac{11}{13}\right) = -1$$

$$2x = -1 + \frac{33}{13}$$

$$2x = \frac{20}{13} \div 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{26} \Rightarrow x$$

تغییر مکان Transformation

رابطه که یک نقطه از سیستم کمیات وضعیه را تنها به نقطه دیگر روی سیستم نسبت می دهد تغییر مکان یا تبدیل گفته می شود.

این موضوع را توسط یک مثال به صورت ساده تشریح می نماییم:

مثال 1

تصویر نقاط $A(4, 1)$ ، $B(1, 2)$ و $C(2, 4)$ را تحت تبدیلی های زیر در مستوی به دست آرید.

$$a: (x, y) \xrightarrow{t_1} (-x, y)$$

$$c: (x, y) \xrightarrow{t_3} (x, -y)$$

$$b: (x, y) \xrightarrow{t_2} (y, x)$$

$$d: (x, y) \xrightarrow{t_4} (x + 2, y + 3)$$

حل: ابتدا نقطه داده شده را روی سیستم کمیات وضعیه مشخص می نماییم، بعداً با توجه به نوعیت تبدیلی تصویر آن را میابیم.

(a) تحت این تبدیلی فقط مختصه x را ضرب منفی یک می کنیم:

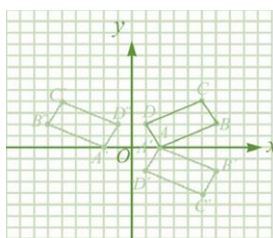
$$(x, y) \xrightarrow{t_1} (-x, y)$$

$$A(4, 1) = (-4, 1)$$

$$B(1, 2) = (-1, 2)$$

هرگاه نقاط $A(2, 0)$, $B(6, 2)$, $C(5, 4)$, $D(1, 2)$ راس های یک مستطیل باشد، مستطیل را در سیستم کمیات وضعه قایم رسم نموده، تصویر آن را نظر به هردو محور رسم نمایید.

برای رسم تصویر نظر به محوری x مختصه y را ضرب منفی یک نموده و برای رسم تصویر نظر به محوری y مختصه x را ضرب منفی یک می نماییم، طوری که در شکل دیده می شود

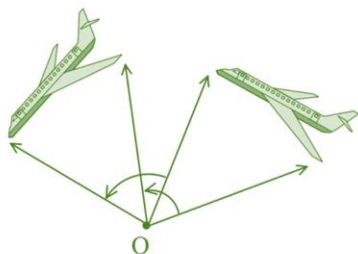


نقاط	انعکاس نظر به محور x	انعکاس نظر به محور y
(x, y)	$(x, -y)$	$(-x, y)$
$A(2, 0)$	$A'(2, 0)$	$A''(-2, 0)$
$B(6, 2)$	$B'(6, -2)$	$B''(-6, 2)$
$C(5, 4)$	$C'(5, -4)$	$C''(-5, 4)$
$D(1, 2)$	$D'(1, -2)$	$D''(-1, 2)$

Rotation دوران

اگر یک شکل در یک مستوی حول یک نقطه ثابت به اندازه یک زاویه دوران نمایید، تمام نقاط شکل به همان اندازه دوران می کنند.

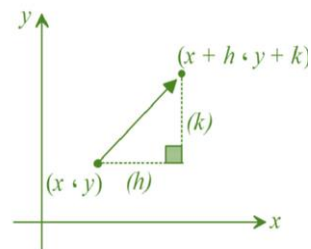
که دوران نظر به یک مرکز و یک زاویه صورت می گیرد، اگر هم جهت عقربه ساعت باشد دوران منفی و اگر مخالف عقربه ساعت باشد دوران مثبت است.



سوالات تقویتی:

1. اگر در معادلات دو مجهوله درجه اول $a_1b_2 = a_2b_1$ باشد معادله داری چند حل می باشد؟
 (1) یک حل اند (2) دو حل اند (3) حل ندارد (4) بی نهایت حل اند

هرگاه تمام نقاط یک شکل به یک فاصله معین به یک سمت حرکت دهیم شکل دومی بنام منتقله شکل اولی می گوید، که این حرکت را به نام انتقال یاد می نمایند. انتقال را طوری ذیل نشان می



$$(x, y) \xrightarrow{T} (x + h, y + k)$$

خواص انتقال

- انتقال یک تبدیل ایزومتری است. یعنی محیط و مساحت شکل تغییر نمی کند.
- در انتقال میل یک خط تغییر نمی کند.
- انتقال نظر به یک وکتور صورت می گیرد که به نام وکتوری انتقال یاد می شود.

انعکاس Reflection

اگر یک نقطه از یک شکل به یک شکل دومی طوری تبدیل شود که فاصله هر نقطه از یک خط (محور) برابر باشد این تبدیل را به نام انعکاس یاد می کنند.

خواص انعکاس

- انعکاس نیز یک تبدیل ایزومتری است.
- انعکاس جهت شکل (میل خط) تغییر می کند.
- انعکاس همیشه نظر به یک خط (محور) یا یک نقطه صورت می گیرد.
- تبدیل $T(x, y) = (-x, y)$ انعکاس نسبت به محوری y است.
- تبدیل $T(x, y) = (x, -y)$ انعکاس نسبت به محوری x است.
- تبدیل $T(x, y) = (y, x)$ انعکاس نسبت به مستقیم $y=x$ است.

مثال 1

2. مختصات نقطه تقاطع خط $y = -3x + 5$ و $y = 4x - 2$ کدام یکی از گزینه ذیل است؟

- (1) $p(1, 2)$ (2) $p(2, 2)$ (3) $p(2, 1)$ (4) $p(1, 1)$

3. قیمت x را در معادله $\begin{cases} y + x = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ دریابید؟

- (1) 1 (2) 2 (3) -2 (4) -1

4. خطوط $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -6x + 21 \end{cases}$ باهم دیگر چند نقطه ی مشترک دارد؟

- (1) یک نقطه مشترک (2) دو نقطه مشترک (3) بی نهایت نقطه مشترک (4) نقطه مشترک ندارد

5. اگر قیمت های بدست آمده از معادله، هم زمان در هر معادله صدق نمایند حل معادله.....

(1) درست نیست (2) درست است (3) هر دو درست (4) هر دو غلط است

6. سیستم معادلات خطی $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ دارای چند حل است؟

- (1) یک حل (2) دو حل (3) حل ندارد (4) بی نهایت حل

7. سیستم معادلات دو مجهوله $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 27 \end{cases}$ دارای چند حل است؟

- (1) یک حل (2) دو حل (3) بی نهایت (4) حل ندارد

8. اگر میل دو خط و نقطه تقاطع با محور y باهم مساوی باشد در آن صورت خطوط باهم چند نقطه مشترک دارند؟

- (1) یک نقطه (2) دو نقطه (3) بی نهایت (4) مشترک ندارد

9. قیمت x و y را در معادله $\begin{cases} x + y = 39 \\ x - y = 9 \end{cases}$ بدست آورید؟

- (1) $(24, 15)$ (2) $(15, 24)$ (3) $(-15, 24)$ (4) هیچکدام

10. گراف های معادلات $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ باهم چه ارتباط دارد؟

(1) متقاطع است (2) موازی است (3) منطبق است (4) متناظر است

11. قیمت x و y در معادله دو مجهوله درجه اول $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases}$ چند است؟

- (1) $(2, 4)$ (2) $(-2, 3)$ (3) $(3, 4)$ (4) هیچکدام

12. اگر در سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول، معادله دارای حل نباشد خطوط باهم چه ارتباط دارند؟

(1) متقاطع است (2) منطبق است (3) موازی است (4) همه درست است

13. حل سیستم معادلات خطی $\begin{cases} 5x - 2y - 7 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ عبارت از؟

- (1) $x=2, y=4$ (2) $x=3, y=4$ (3) $x=2, y=3$ (4) $x=0, y=4$

14. گراف خطوط $\begin{cases} 2x - 5y = 3x - 8 \\ 11y - 3x = y \end{cases}$ باهم چه ارتباط دارد؟

(1) متقاطع اند (2) موازی اند (3) منطبق اند (4) هیچکدام

15. حل سیستم معادلات خطی $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 6 \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{2}y = -4 \end{cases}$ عبارت از؟

- (1) $(3, 8)$ (2) $(6, 10)$ (3) $(5, 3)$ (4) $(3, 5)$

16. اگر میل دو خط باهم مساوی باشد و نقطه تقاطع با محور y مختلف باشد، خطوط باهم چند نقطه ی مشترک دارند؟

- (1) یک نقطه (2) دو نقطه (3) نقطه مشترک ندارد (4) بی نهایت

17. اگر سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ باشد معادله دارای:

- (1) یک حل اند (2) دو حل اند (3) حل ندارد (4) بی نهایت حل دارد

18. اگر همه نقاط یک شکل به یک جهت معین و فاصله معین انتقال دهیم، شکل حاصله به شکل اولی چه ارتباط دارد؟

(1) متناظر است (2) انطباق پذیر است (3) غیر انطباق پذیر است (4) هیچکدام

19. برای حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول به روش تعویضی: قیمت یکی از مجهول ها را از جنس مجهول دیگر آن از معادله اول دریافته و در معادلهوضع می نماییم؟

- (1) اول (2) دوم (3) اول و دوم (4) هیچکدام

20. آرزو به زحل گفت: اگر پول هایت را به من بدهی، من صاحب 20 افغانی می شوم. زحل به آرزو گفت: اگر نصف پول خود را به من بدهی، من صاحب 15 افغانی می شوم. پول زحل رادریابید؟

- (1) 7 افغانی (2) 10 افغانی (3) 15 افغانی (4) 20 افغانی

21. اگر قیمت های بدست آمده از حل سیستم معادله دو مجهوله درجه اول، هم زمان در هردو معادله صدق نه نمایند حل معادله

(1) درست است (2) درست نیست (3) هردو درست است (4) هیچکدام

22. اگر در معادلات خطی $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ باشد گراف خطوط باهم چه ارتباط دارد؟

- (1) متقاطع اند (2) موازی اند (3) منطبق اند (4) هیچکدام

23. اگر خطوط باهم منطبق باشد معادله دارای چند حل است؟

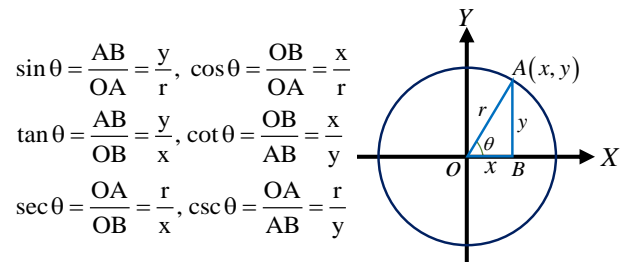
- (1) یک حل اند (2) دو حل اند (3) حل ندارد (4) بی نهایت حل اند

36. اگر سیستم معادلات دوجمله درجه اول $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1}{b_1}$ باشد معادله دارای؟
 (1) یک حل اند (2) دو حل اند (3) حل ندارد (4) بی نهایت حل اند
37. حل سیستم معادلات خطی $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ به روش افنا مساوی است؟
 (1) $(2, -7)$ (2) $(-2, 9)$ (3) هیچکدام (4) $(9, -2)$
38. تغییر مکان رابطه $T(x, y) = (y, x)$ انعکاس نسبت به است؟
 (1) محوری x (2) محوری y (3) $y = x$ (4) هیچکدام
39. اگر قیمت های بدست آمده از حل یک سیستم معادلات خطی، هم زمان در هر دو معادله صدق نمایند حل معادله
 (1) صحیح است (2) صحیح نیست (3) هر دو درست است (4) هیچکدام
40. رابطه که به هر نقطه از مستوی کمیات وضعیه تنها به یک نقطه جدید نسبت می دهند عبارت از؟
 (1) تبدیل است (2) تغییر مکان است (3) دوران است (4) 1 و 2 درست است
41. در انعکاس جهت شکل (میل خط) را تغییر می دهد؟
 (1) بلی (2) خیر (3) هر دو درست است (4) هیچکدام
42. هرگاه $A(5, 0)$, $B(7, 0)$, $C(5, 3)$ راس های یک مثلث باشد تصویر آن را تحت تبدیل $(x, y) = (x-1, y+1)$ رسم کند؟
 (1) $A(4, 1)$ $B(6, 1)$ $C(4, 4)$ (2) $A(2, 0)$ $B(7, 2)$ $C(3, 0)$
 (3) $A(-2, 4)$ $B(-1, 2)$ $C(-3, 4)$ (4) $A(-2, 0)$ $B(-1, 2)$ $C(-3, 0)$
43. تصویر نقاط $A(1, 2)$, $B(5, 6)$, $C(5, 2)$ تحت تبدیل $(x, y) = (-x, y)$ عبارت از؟
 (1) $A(-1, 2)$ $B(-5, 6)$ $C(-5, 2)$ (2) $A(1, -2)$ $B(3, -1)$ $C(2, -4)$
 (3) $A(-2, 4)$ $B(-1, 2)$ $C(-3, 4)$ (4) $A(-1, 2)$ $B(-3, 1)$ $C(-2, 4)$
44. حل سیستم معادله $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$ را دریافت نمایید؟
 (1) $x = -4$ $y = 6$ (2) $x = 6$ $y = -4$ (3) $x = 5$ $y = 8$ (4) هیچکدام

قضیه تالس در مثلث

اگر خطی موازی به یک ضلع مثلث، دو ضلع دیگر آن را قطع کند، قطعات ایجاد شده روی این دو ضلع متناسب است.

24. حل سیستم معادلات $\begin{cases} 3x + 1 - y = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$ عبارت از؟
 (1) $x=1$ $y=5$ (2) $x=2$ $y=7$ (3) $x=-2$ $y=5$ (4) $x=6$ $y=2$
25. قیمت y را در معادله $\begin{cases} 10x + 3y = 26 \\ 8x + 3y = 18 \end{cases}$ بدست آورید؟
 (1) $\frac{-3}{14}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) $\frac{-14}{3}$ (4) 0
26. گر شکل توسط یک ایزومتريک تغییر مکان نمایند با اصل شکل چه ارتباط دارد؟
 (1) انطباق پذیر است (2) غیرانطباق پذیر است (3) هر دو درست است (4) هر دو غلط است
27. سیستم معادلات $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x - 6y = 3 \end{cases}$ چند حل دارد؟
 (1) یک حل (2) دو حل (3) حل ندارد (4) بی نهایت
28. میل هر خط موازی با محوری x عبارت از؟
 (1) یک است (2) صفر است (3) بینهایت (4) هیچکدام
29. تصویر نقاط $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 4)$ و $C(2, 4)$ تحت تبدیل $(x, y) = (-x, y)$ عبارت از؟
 (1) $A(-1, 2)$ $B(3, 1)$ $C(2, 3)$ (2) $A(1, -2)$ $B(3, -1)$ $C(2, -4)$
 (3) $A(-1, 2)$ $B(-3, 1)$ $C(-2, 4)$ (4) $A(-2, 4)$ $B(-1, 2)$ $C(-3, 4)$
30. اگر تغییر مکان $T(x, y) = (-x, y)$ انعکاس نسبت به است؟
 (1) محوری x (2) محوری y (3) خطی $y=x$ (4) هیچکدام
31. تبدیلی های که فاصله بین نقاط را حفظ می کند به یاد می شوند؟
 (1) ایزومتري (2) انطباق پذیر (3) Isometry (4) 1 و 3 درست اند
32. اگر در سیستم معادلات دو مجهول درجه اول $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ باشد معادله دارای چند حل می باشد؟
 (1) یک است (2) دو حل است (3) حل ندارد (4) بی نهایت حل دارد
33. انتقال نقاط $A(4, 6)$ و $B(2, 3)$ تحت رابطه $(x, y) = (x+1, -y)$ عبارت از؟
 (1) $A(3, 2)$ $B(6, 4)$ (2) $A(4, -2)$ $B(3, -3)$
 (3) $A(5, -6)$ $B(3, -3)$ (4) $A(-6, 4)$ $B(-2, 3)$
34. اگر نقاط $A(4, 1)$, $B(1, 4)$, $C(1, 1)$ راس های یک مثلث باشد تصویر آن را تحت رابطه $(x, y) = (x, y+1)$ عبارت از؟
 (1) $A(4, 2)$, $B(1, 5)$, $C(1, 2)$ (2) $A(5, 1)$, $B(2, 4)$, $C(2, 1)$
 (3) $A(1, 2)$, $B(1, 5)$, $C(4, 5)$ (4) هیچکدام
35. تغییر مکان رابطه $T(x, y) = (x, -y)$ انعکاس نسبت به است؟
 (1) محوری x (2) محوری y (3) مبدا (4) خط $y=x$



در رابطه‌ای فوقانی دیده می‌شود که $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ ، $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ و $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ می‌باشند.

مثال 1. اگر در حالت معیاری ضلع دوم زاویه θ از نقطه $(8, 15)$ بگذرد، نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را دریابید.

حل. در شکل ذیل نظر به قضیه فیثاغورث $r^2 = x^2 + y^2$ داریم که:

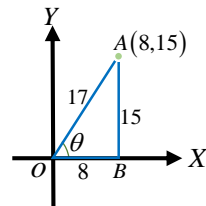
$$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow r^2 = 8^2 + 15^2 = 289$$

$$r = 17$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

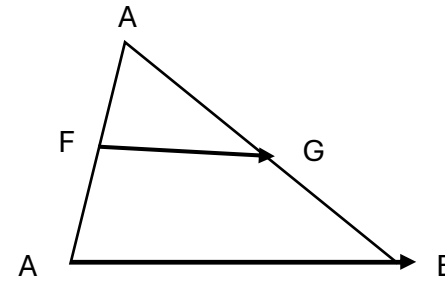
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8}, \quad \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$



نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45°

اگر یک مثلث قائم‌الزاویه که اضلاع قائم آن دارای یک واحد طول باشند نسبت‌های مثلثاتی شان را طور ذیل محاسبه می‌کنیم.



$$FG \parallel AB \Leftrightarrow \frac{CF}{FA} = \frac{CG}{GB}$$

ساین یک زاویه حاده:

اگر به شکل ساده تر بیان عرض کنیم؛ ساین یعنی ضلع مقابل بر وتر

کوساین یک زاویه حاده:

کوساین یعنی ضلع مجاور بر وتر

تانجانت یک زاویه حاده:

ضلع مقابل بر ضلع مجاور

کوئتانجانت یک زاویه حاده:

ضلع مجاور بر ضلع مقابل

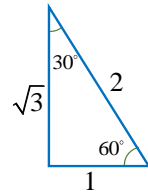
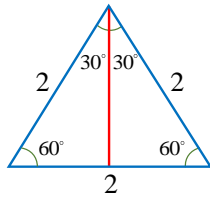
سیکینت یک زاویه حاده:

وتر بر ضلع مجاور

کوسیکینت یک زاویه حاده:

وتر بر ضلع مقابل

نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده (θ) در یک مثلث قائم‌الزاویه قرار شکل ذیل تعریف شده اند:



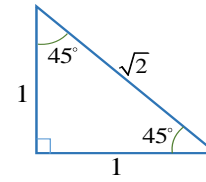
$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^\circ &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \tan 60^\circ &= \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\ \cot 60^\circ &= \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sec 60^\circ &= \sec \frac{\pi}{3} = 2 \\ \csc 60^\circ &= \csc \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ &= \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot 30^\circ &= \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ \sec 30^\circ &= \sec \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \csc 30^\circ &= \csc \frac{\pi}{6} = 2 \end{aligned}$$

3. نسبت‌های مثلثاتی زوایای 0° ، 90° ، 180° ، 270° و 360°

نسبت‌های مثلثاتی زوایای 0° و 360° با هم مساوی اند، چون با هم کنترمینل می‌باشند و از نقطه $P(1,0)$ می‌گذرد زاویه 90° از نقطه $P(0,1)$ ، زاویه 180° از نقطه $P(-1,0)$ و زاویه‌ای 270° از نقطه $P(0,-1)$ می‌گذرد و داریم که:

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= \sin 360^\circ = 0 & \sin 90^\circ &= 1 \\ \cos 0^\circ &= \cos 360^\circ = 1 & \cos 90^\circ &= 0 \\ \tan 0^\circ &= \tan 360^\circ = 0 & \tan 90^\circ &= \infty \\ \cot 0^\circ &= \cot 360^\circ = \infty & \cot 90^\circ &= 0 \\ \sec 0^\circ &= \sec 360^\circ = 1 & \sec 90^\circ &= \infty \\ \csc 0^\circ &= \csc 360^\circ = \infty & \csc 90^\circ &= 1 \end{aligned}$$



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan 45^\circ &= \tan \frac{\pi}{4} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1 \\ \cot 45^\circ &= \cot \frac{\pi}{4} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1 \\ \sec 45^\circ &= \sec \frac{\pi}{4} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\ \csc 45^\circ &= \csc \frac{\pi}{4} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. نسبت‌های مثلثاتی زاویه 30° و 60°

برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی زوایای فوقانی باید یک مثلث متساوی الاضلاع را با طول اضلاع 2 واحد رسم نمود و داریم که:

1. اگر در مثلث ABC، خط $DE \parallel BC$ و $AD = 5 \text{ cm}$ ، $AB = 10 \text{ cm}$ ، $AE = 7.5 \text{ cm}$ ، مقدار AC چند است؟

$$AD/AB = AE/AC$$

الف) 15cm ب) 12cm ج) 10cm د) 17.5cm

2. در مثلث PQR، $ST \parallel QR$ و $PS = 4 \text{ cm}$ ، $PR = 12 \text{ cm}$ ، اگر $PT = 6 \text{ cm}$ ، اندازه PQ چند است؟

$$PS/PR = PT/PQ$$

الف) 8cm ب) 18cm ج) 16cm د) 10cm

3. یک خط، ضلع AB مثلث را به دو قسمت 2 به 3 تقسیم کرده است. اگر $AB = 20$ سانتی متر باشد، قسمت بزرگتر چند سانتی متر است؟

الف) 8cm ب) 12cm ج) 10cm د) 14cm

4. در مثلث ABC، اگر خط DE موازی با ضلع BC باشد،

$AB = 12 \text{ cm}$ ، $AD = 6 \text{ cm}$ ، $AC = 18 \text{ cm}$. اندازه AE چند است؟ $DE \parallel BC \rightarrow$

$$AD/AB = AE/AC$$

الف) 9cm ب) 8cm ج) 6cm د) 10cm

5. در یک مثلث، خطی موازی با یک ضلع کشیده شده که طول دو قسمت روی ضلع دیگر به نسبت 3:5 تقسیم شده. اگر طول یکی از قسمت‌ها 6cm باشد، طول کل ضلع چند است؟

الف) 16cm ب) 14cm ج) 15cm د) 12cm

6. در مثلث XYZ، خط MN موازی با ضلع YZ کشیده شده است. اگر $XM = 9 \text{ cm}$ و XY

15 cm و $XN = 6 \text{ cm}$ ، مقدار XZ چند است؟ $XM/XY = XN/XZ$

الف) 10cm ب) 12cm ج) 15cm د) 8cm

7. در مثلث ABC، اگر $DE \parallel BC$ و $AB = 24 \text{ cm}$ ، $AD = 6 \text{ cm}$ ، $AE = 8 \text{ cm}$ ، مقدار AC

$$AD/AB = AE/AC$$

الف) 32cm ب) 36cm ج) 28cm د) 30cm

8. اگر یک خط، ضلع‌های مثلث را به نسبت 7:5 و 14:10 تقسیم کند، آیا این خط با ضلع سوم موازی است؟

الف) بلی ب) نه ج) گاهی د) بستگی دارد

9. تعریف ساین یک زاویه حاده در مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

الف) طول ضلع مجاور ÷ طول وتر

ب) طول وتر ÷ طول ضلع مجاور

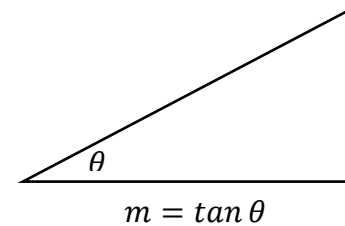
ج) طول ضلع مقابل ÷ طول وتر

د) طول ضلع مقابل ÷ طول ضلع مجاور

$$\begin{aligned} \sin 270^\circ &= -1 \\ \cos 270^\circ &= 0 \\ \tan 270^\circ &= -\infty \\ \cot 270^\circ &= 0 \\ \sec 270^\circ &= \infty \\ \csc 270^\circ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 180^\circ &= 0 \\ \cos 180^\circ &= -1 \\ \tan 180^\circ &= 0 \\ \cot 180^\circ &= -\infty \\ \sec 180^\circ &= -1 \\ \csc 180^\circ &= \infty \end{aligned}$$

رابطه میل خط مستقیم و تانجانت یک زاویه:



نکته:

$$y = mx + b$$

معادله فوق عبارت از معادله نارمل خط مستقیم میباشد. در معادله فوق m میل مستقیم و نقطه b نقطه تقاطع خط با محور y می باشد.

جدول مثلثاتی و کاربرد آن:

نسبت های مثلثاتی زاویه مشهور را می توانیم با استفاده از روابط فوق که تحلیل شد به آسانی بدست آوریم، ولی محاسبه بعضی از نسبت های مثلثاتی که مشهور نیست را می

توانیم به کمک بعضی از روابط مثلثاتی مانند $\left\{ \begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \theta \\ \pi - \theta \\ \frac{3\pi}{2} - \theta \\ 2\pi - \theta \end{aligned} \right\}$ را بدست آوریم که در درس قبلی

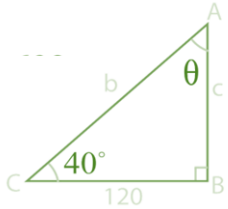
مفصل مطالعه خواهیم نمود.

سوالات تقویتی:

10. یک ضلع مثلث به دو قسمت تقسیم شده است. نسبت این دو قسمت 2 به 5 است. اگر قسمت کوچک 6 سانتی متر باشد، طول کل ضلع چند سانتی متر است؟
الف) 21cm (ب) 15cm (ج) 18cm (د) 24cm
11. اگر $DE \parallel BC$ در مثلث ABC و $AB = 18\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $AD = 6\text{ cm}$ ، مقدار AE چند است؟
 $AD/AB = AE/AC$
الف) 4cm (ب) 5cm (ج) 6cm (د) 8cm
12. در مثلث قائم الزاویه ABC، زاویه A حاده است و طول ضلع مقابل آن 6cm و وتر 10cm باشد. مقدار $\sin A$ چند است؟
الف) 0.4 (ب) 0.5 (ج) 0.6 (د) 0.8
13. اگر $\sin \theta = 3/5$ باشد، وتر چقدر است اگر ضلع مقابل 9 cm باشد؟
الف) 12cm (ب) 13cm (ج) 15cm (د) 10cm
14. اگر ضلع مقابل زاویه حاده برابر 12 cm و ضلع مجاور 16 cm باشد، مقدار \sin زاویه حاده چند است؟
الف) 0.6 (ب) 0.75 (ج) 0.8 (د) 0.9
15. در مثلث قائم الزاویه، اگر وتر 17cm و ضلع مجاور 15cm باشد، \sin زاویه حاده مقابل ضلع مقابل چند است؟
الف) 0.6 (ب) 0.47 (ج) 0.7 (د) 0.9
16. اگر در یک مثلث، $\sin \alpha = 0.75$ و وتر 20 cm باشد، طول ضلع مقابل چقدر است؟
الف) 15cm (ب) 12cm (ج) 10cm (د) 17.5cm
17. اگر در یک مثلث، $\sin \theta = x/13$ و ضلع مقابل برابر 5cm باشد، مقدار x چند است؟
الف) 10 (ب) 8 (ج) 5 (د) 7
18. در مثلثی، اگر \sin زاویه حاده برابر 5/4 باشد و ضلع مقابل 8cm، وتر چند است؟
الف) 9cm (ب) 10cm (ج) 11cm (د) 12cm
19. اگر $\sin \alpha = 0.5$ ، زاویه α چند درجه است؟
الف) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 90°
20. اگر در یک مثلث قائم الزاویه طول وتر 25cm و ضلع مقابل 7 cm باشد، مقدار \sin زاویه حاده مقابل این ضلع چند است؟
الف) 0.28 (ب) 0.32 (ج) 0.35 (د) 0.4
21. در مثلث قائم الزاویه، اگر ضلع مقابل 12cm و وتر 13cm باشد، مقدار \sin زاویه حاده چند است؟
الف) 0.92 (ب) 0.84 (ج) 0.89 (د) 0.79

22. در مثلث قائم الزاویه ABC، زاویه A حاده است و طول ضلع مجاور آن 12cm و وتر 13cm باشد. مقدار $\cos A$ چند است؟
الف) 0.6 (ب) 0.7 (ج) 0.8 (د) 0.9
23. اگر $\cos \theta = 3/5$ باشد، وتر چقدر است اگر ضلع مجاور 9 cm باشد؟
الف) 12cm (ب) 13cm (ج) 15cm (د) 10cm
24. در مثلث قائم الزاویه، اگر وتر 17cm و ضلع مجاور 15cm باشد، \cos زاویه حاده مقابل ضلع مقابل چند است؟
الف) 0.6 (ب) 0.8 (ج) 0.7 (د) 0.9
25. تعریف کوساین یک زاویه حاده در مثلث قائم الزاویه کدام است؟
الف) طول ضلع مجاور ÷ طول وتر
ب) طول ضلع مقابل ÷ طول وتر
ج) طول وتر ÷ ضلع مجاور
د) طول ضلع مقابل ÷ ضلع مجاور
26. اگر در یک مثلث، $\cos \alpha = 0.75$ و وتر 20cm باشد، طول ضلع مجاور چقدر است؟
الف) 15cm (ب) 12cm (ج) 10cm (د) 17.5cm
27. اگر ضلع مجاور زاویه حاده برابر 12cm و ضلع مقابل 16cm باشد، مقدار \cos زاویه حاده چند است؟
الف) 0.6 (ب) 0.75 (ج) 0.8 (د) 0.9
28. تعریف تانجانت یک زاویه حاده در مثلث قائم الزاویه چیست؟
الف) طول ضلع مجاور ÷ طول وتر (ب) طول ضلع مقابل ÷ طول ضلع مجاور
ج) طول ضلع مقابل ÷ طول وتر (د) طول وتر ÷ ضلع مقابل
29. اگر در یک مثلث، $\cos \theta = x/13$ و ضلع مجاور زاویه θ برابر 5 cm باشد، مقدار x چند است؟
الف) 10 (ب) 8 (ج) 5 (د) 7
30. در مثلث قائم الزاویه، اگر ضلع مجاور 12cm و وتر 13cm باشد، مقدار \cos زاویه حاده چند است؟
الف) 0.92 (ب) 0.84 (ج) 0.89 (د) 0.79
31. در مثلثی، اگر \cos زاویه حاده برابر 4/5 باشد و ضلع مجاور 8cm، وتر چند است؟
الف) 9cm (ب) 10cm (ج) 11cm (د) 12cm
32. اگر $\cos \alpha = 0.5$ ، زاویه α چند درجه است؟
الف) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 90°
33. اگر در یک مثلث قائم الزاویه طول وتر 25cm و ضلع مجاور 7cm باشد، مقدار \cos زاویه حاده مقابل این ضلع چند است؟

هرگاه یک زاویه حاده مثلث قائم الزاویه 40° و ضلع مجاور این زاویه دارای $120m$ باشد، اجزای نامعلوم مثلث را پیدا کنید.



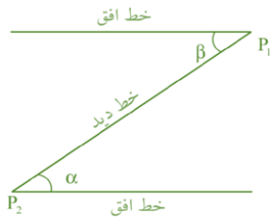
حل: اجرای نامعلوم را طوری زیر پیدا می کنیم.

داریم: $\cos 40^\circ = 0,7660$ و $\tan 40^\circ = 0,8391$ است

- $\theta + 40^\circ = 90 \Rightarrow \theta = 50^\circ$
- $\tan 40^\circ = \frac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0,8391 = 100,692m$
- $\cos 40^\circ = \frac{120}{b} \Rightarrow b = \frac{120}{\cos 40^\circ} = \frac{120}{0,7660} = 156,6579m$

زاویه میل، ارتفاع و تنزیل

- زاویه ارتفاع: هرگاه یک جسم در یک ارتفاع قرار گیرد، خط دید با افق یک زاویه را تشکیل می دهد، که زاویه ارتفاع نامیده می شود، مانند زاویه α در شکل زیر.
- زاویه تنزیل: هرگاه یک جسم در پایین قرار داشته باشد، خط دید با افق یک زاویه تشکیل می دهد که به نام زاویه تنزیل یاد می شود، مانند شکل زیر.



- الف) 0.28 (ب) 0.32 (ج) 0.35 (د) 0.4
34. در مثلث قائم الزاویه ای اگر $\tan(\theta) = 1$ باشد، زاویه θ چند درجه است؟
الف) 30 (ب) 45 (ج) 60 (د) 90
35. اگر $\tan(\theta) = 3/4$ باشد، و ضلع مجاور برابر 12 باشد، طول ضلع مقابل چند است؟
الف) 9 (ب) 15 (ج) 16 (د) 8
36. اگر $\tan(\theta) = 5$ و ضلع مقابل برابر 10 باشد، ضلع مجاور چند است؟
الف) 50 (ب) 2 (ج) 5 (د) 15
37. اگر ضلع مقابل زاویه A برابر 6 و ضلع مجاور آن برابر 8 باشد، $\tan(A)$ چند است؟
الف) 1 (ب) 0.75 (ج) 1.5 (د) 0.6
38. اگر $\tan(\theta) = 0.5$ و ضلع مجاور برابر 6 باشد، ضلع مقابل چند است؟
الف) 3 (ب) 2 (ج) 4 (د) 5
39. $\tan(60^\circ)$ تقریباً برابر است با؟
الف) 1 (ب) $\sqrt{3}$ (ج) 0.5 (د) 2
40. اگر ضلع مجاور = 7 و $\tan(\theta) = 2$ ، طول ضلع مقابل چند است؟
الف) 14 (ب) 10 (ج) 9 (د) 7
41. مقدار $\sin(30^\circ)$ کدام است؟
الف) $\sqrt{2}/2$ (ب) $1/2$ (ج) $\sqrt{3}/2$ (د) 0
42. در مثلث ABC زاویه B قائم است. اگر ضلع $AB = 5$ و $BC = 12$ ، مقدار $\tan(A)$ چند است؟
الف) $5/12$ (ب) $12/5$ (ج) $5/13$ (د) $13/5$
43. اگر $\tan(x) = 1.2$ باشد، و ضلع مقابل = 6، ضلع مجاور چند است؟
الف) 5 (ب) 4 (ج) 7.2 (د) 10
44. $\tan(\theta) = \sqrt{3}/3$ است، مقدار θ تقریباً چند درجه است؟
الف) 60 (ب) 30 (ج) 45 (د) 90
45. اگر در مثلث قائم الزاویه، $\tan(\theta) = x/y$ باشد، کدام یک درست است؟
الف) وتر = x (ب) وتر = y (ج) ضلع مجاور = x (د) ضلع مقابل = x

حل مثلث قائم الزاویه

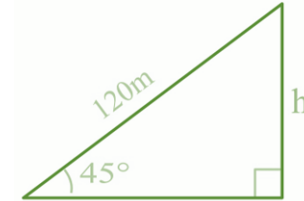
در هر مثلث قائم الزاویه اگر زاویه حاده و دو ضلع آن معلوم باشد، اجزای متباقی مثلث را با استفاده از توابع مثلث به دست می آوریم.

طول تار یک کاغذپران 120m است و زاویه ارتفاع کاغذپران 45° است، ارتفاع کاغذپران را دریابید.

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{120}$$

$$h = 120 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h = 60 \cdot \sqrt{2}m$$



معادلات های مثلثاتی

هر معادله که در آن یک یا چند نسبت مثلثاتی موجود باشد، معادله مثلثاتی نامیده می شود؛

$$\text{مانند } \sin x - 1 = 0 \text{ یا } 2 \tan x - \frac{1}{2} = 0$$

برای حل معادلات مثلثاتی طوری زیر عمل می نمایم:

1. با کمک حل معادلات الجبری قیمت مجهول را به دست می آوریم.
2. با کمک جدول نسبت های مثلثاتی قیمت مجهول اصلی را به دست می آوریم.
3. چون معادله های مثلثاتی پیروی از یک است، بنا حل های بیشماری دارد. پس با استفاده از فورمول های زوایای که نسبت های یکسان دارد، حل های معادله اند.

مثال 1

معادلات مثلثاتی $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$ و $\cos x + \frac{1}{2} = 0$ را حل نماید.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \cos 4x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$2 \cos 4x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 45^\circ$$

$$x = 11,25^\circ$$

نکته: به یاد داشته باشید که x قیمت های دیگر نیز دارد، که در صنوف بالا تر مطالعه می کنید. اما کوچک ترین قیمت همان قیمت های فوق است.

سوالات تقویتی:

1. مقدار $\cos(60^\circ)$ کدام است؟
الف) 0.5 ب) 0.866 ج) 0.707 د) 1
2. مقدار $\cos(30^\circ)$ کدام است؟
الف) 0.5 ب) 0.707 ج) 0.866 د) 1
3. اگر $\tan(\theta) = 1$ باشد، مقدار θ در ربع اول کدام است؟
الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°
4. اگر $\sin(\theta) = 0.5$ باشد، مقدار θ در ربع اول کدام است؟
الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°
5. اگر $\sin(\theta) = 0.707$ باشد، مقدار θ در ربع اول کدام است؟
الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°
6. مقدار $\sin(45^\circ)$ کدام است؟
الف) 0.5 ب) 0.707 ج) 0.866 د) 1
7. اگر $\cos(\theta) = 0.866$ باشد، مقدار θ در ربع اول کدام است؟
الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°
8. مقدار $\tan(60^\circ)$ کدام است؟
الف) 1 ب) 1.732 ج) 0.577 د) 0.866
9. اگر $\tan(\theta) = 0.577$ باشد، مقدار θ در ربع اول کدام است؟
الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°

10. مقدار $\sin(60^\circ)$ کدام است؟
 الف) 0.5 ب) 0.707 ج) 0.866 د) 1
11. اگر $\cos(\theta) = 0.707$ باشد، مقدار θ در ربع اول کدام است؟
 الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°
12. مقدار $\tan(30^\circ)$ کدام است؟
 الف) 0.577 ب) 0.707 ج) 0.866 د) 1
13. مقدار $\sin(45^\circ)$ چند است؟
 الف) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{4}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{1}{2}$
14. در مثلث قائم‌الزاویه ABC که $\angle C = 90^\circ$ و $\angle A = 30^\circ$ و ضلع مقابل $\angle A$ برابر با 5 واحد است، طول وتر را بیابید.
 الف) 10 ب) $2\sqrt{5}$ ج) $2\sqrt{10}$ د) 6
15. مقدار $\cos(15^\circ)$ چقدر است؟
 الف) 0.878 ب) 0.966 ج) 0.884 د) 0.890
16. اگر $\tan(37^\circ) = x$ ، مقدار x کدام است؟
 الف) 0.713 ب) 0.753 ج) 0.789 د) 0.797
17. در مثلث قائم‌الزاویه، اگر $\tan(\theta) = 3/4$ باشد و وتر برابر 5 واحد باشد، طول ضلع مجاور را بیابید؟
 الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 12
18. اگر $\cot(\theta) = 1$ باشد، مقدار $\sin(\theta)$ چیست؟
 الف) $\sqrt{2}/2$ ب) 1 ج) 0.5 د) $\sqrt{3}/2$
19. در مثلث قائم‌الزاویه، اگر وتر برابر 13 و یک ضلع برابر 5 باشد، ضلع سوم را بیابید؟
 الف) 12 ب) 10 ج) 14 د) 8
20. در مثلث قائم‌الزاویه، اگر زاویه A برابر 45° باشد، چه رابطه‌ای بین دو ضلع قائمه وجود دارد؟
 الف) ضلع‌ها مساوی‌اند ب) یکی دو برابر دیگری است
 ج) وتر مساوی ضلع مجاور است د) ضلع مقابل صفر است
21. اگر $\cos(\theta) = 0.8$ و وتر برابر 10، طول ضلع مجاور چیست؟
 الف) 6 ب) 8 ج) 10 د) 12
22. اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه $\sin(\theta) = 0.6$ باشد و وتر برابر 10، طول ضلع مقابل چیست؟

- الف) 6 ب) 4 ج) 8 د) 10
23. اگر $\tan(\theta) = 1.73$ ، مقدار θ تقریباً چیست؟
 الف) 30° ب) 45° ج) 60° د) 90°
24. در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویه $B = 60^\circ$ و طول ضلع مجاور به این زاویه 9 واحد است. طول وتر چند واحد است؟
 الف) 10.4 ب) 18 ج) 12.5 د) 15.6
25. در مثلث قائم‌الزاویه، اگر وتر برابر 17 و یک ضلع برابر 15 باشد، ضلع سوم را بیابید؟
 الف) 8 ب) 10 ج) 12 د) 9
26. در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویه $A = 43^\circ$ و ضلع مقابل این زاویه 8 واحد است. طول وتر چقدر است؟
 الف) 11.3 ب) 10.5 ج) 12.3 د) 9.4
27. اگر در یک مثلث قائم‌الزاویه ضلع‌های قائمه برابر 6 و 8 باشد، طول وتر را بیابید؟
 الف) 10 ب) 9 ج) 14 د) 7
28. در یک مثلث قائم‌الزاویه، زاویه $A = 35^\circ$ و طول وتر 10 واحد است. طول ضلع مقابل زاویه A چقدر است؟
 الف) 5.8 ب) 6.3 ج) 5.4 د) 7.2
29. زاویه تنزیل چگونه تعریف می‌شود؟
 الف) زاویه‌ای است بین خط دید ناظر و سطح افق وقتی به جسمی در پایین‌تر از خود نگاه کند
 ب) زاویه‌ای است که بین سطح زمین و خط مستقیم بالا به پایین تشکیل می‌شود
 ج) زاویه‌ای که بین دو خط عمود بر هم تشکیل شود
 د) زاویه‌ای بین افق و دید مستقیم رو به بالا
30. مفهوم زاویه میل کدام است؟
 الف) زاویه‌ای است بین دو خط عمودی در یک مثلث قائم‌الزاویه
 ب) زاویه‌ای است که بین خط افق و امتداد شیب‌دار خط مستقیم تشکیل شود
 ج) زاویه‌ای که همیشه مساوی 90° درجه باشد
 د) زاویه‌ای که در سطح زمین به وجود می‌آید
31. کدام گزینه تعریف درست زاویه ارتفاع است؟
 الف) زاویه‌ای بین خط دید ناظر و خط عمودی وقتی به پایین نگاه کند
 ب) زاویه‌ای بین خط دید ناظر و خط افق وقتی به جسمی در ارتفاع پایین‌تر نگاه شود

41. ناظری از پای یک تپه به قله آن با زاویه ارتفاع 60° نگاه می‌کند. اگر فاصله افقی بین ناظر و قله 20 متر باشد، ارتفاع تپه چقدر است؟
 الف) 34.6 متر (ب) 17.3 متر (ج) 20 متر (د) 28.9 متر
42. از پای یک ساختمان به نوک آن با زاویه ارتفاع 60° نگاه می‌شود. اگر فاصله افقی ناظر تا ساختمان 12 متر باشد، ارتفاع ساختمان چقدر است؟
 الف) 17.3 م، (ب) 10 م، (ج) 20.8 م، (د) 15 م
43. از پای یک تپه به قله آن با زاویه ارتفاع 45° نگاه می‌شود. اگر فاصله افقی ناظر تا قله 25 متر باشد، ارتفاع تپه چقدر است؟
 الف) 20 م، (ب) 25 م، (ج) 17.3 م، (د) 28 م
44. از بالای یک برج به جسمی روی زمین با زاویه تنزیل 40° نگاه می‌شود. اگر ارتفاع برج 30 متر باشد، فاصله افقی ناظر تا جسم چقدر است؟
 الف) 35.8 م، (ب) 23.7 م، (ج) 30 م، (د) 25.17 م
45. ناظری از بالای یک ساختمان به جسمی روی زمین با زاویه تنزیل 30° نگاه می‌کند. اگر فاصله افقی ناظر تا جسم 40 متر باشد، ارتفاع ساختمان چقدر است؟
 الف) 23.1 م، (ب) 20 م، (ج) 25 م، (د) 30 م

- ج) زاویه‌ای بین خط دید ناظر و سطح افق وقتی ناظر به جسمی در ارتفاع بالاتر نگاه کند (د) زاویه‌ای که بین دو جسم روی زمین تشکیل
32. ناظری از بالای یک برج به جسمی روی زمین با زاویه تنزیل 30° نگاه می‌کند. اگر ارتفاع برج 20 متر باشد، فاصله افقی بین ناظر و جسم چقدر است؟
 الف) 34.6 متر (ب) 11.5 متر (ج) 20 متر (د) 17.3 متر
33. ناظری از بالای یک ساختمان به جسمی روی زمین با زاویه تنزیل 60° نگاه می‌کند. اگر فاصله افقی بین ناظر و جسم 15 متر باشد، ارتفاع ساختمان چقدر است؟
 الف) 25.9 متر (ب) 8.7 متر (ج) 15 متر (د) 12.9 متر
34. از پای یک برج به نوک آن با زاویه ارتفاع 45° نگاه می‌شود. اگر فاصله افقی بین ناظر و برج 10 متر باشد، ارتفاع برج چقدر است؟
 الف) 10 متر (ب) 14.1 متر (ج) 7.1 متر (د) 20 متر
35. ناظری از پای یک تپه به قله آن با زاویه ارتفاع 30° نگاه می‌کند. اگر فاصله افقی بین ناظر و قله 50 متر باشد، ارتفاع تپه چقدر است؟
 الف) 28.9 متر (ب) 25 متر (ج) 43.3 متر (د) 50 متر
36. ارتفاع درختی را دریابید که زاویه ارتفاع آن از 20° به 40° تبدیل گردد. در این حالت مشاهده‌کننده به درخت نزدیک می‌شود. فرض کنید فاصله اول ناظر از درخت 40 ft باشد.
 الف) 15.7 ft (ب) 23.5 ft (ج) 29.9 ft (د) 34.6 ft
37. ناظری از پای یک برج به نوک آن با زاویه ارتفاع 60° نگاه می‌کند. اگر فاصله افقی بین ناظر و برج 10 متر باشد، ارتفاع برج چقدر است؟
 الف) 17.3 متر (ب) 8.7 متر (ج) 10 متر (د) 14.1 متر
38. از بالای یک ساختمان به جسمی روی زمین با زاویه تنزیل 45° نگاه می‌شود. اگر فاصله افقی بین ناظر و جسم 30 متر باشد، ارتفاع ساختمان چقدر است؟
 الف) 30 متر (ب) 21.2 متر (ج) 42.4 متر (د) 15 متر
39. یک درخت از بالا شکسته و قسمت شکسته‌اش با زمین زاویه 50° می‌سازد. اگر قسمت ایستاده 20 ft باشد، ارتفاع اصلی درخت را پیدا کنید.
 الف) 32.5 ft (ب) 43.6 ft (ج) 50.2 ft (د) 38.4 ft
40. از بالای یک برج به جسمی روی زمین با زاویه تنزیل 45° نگاه می‌شود. اگر ارتفاع برج 20 متر باشد، فاصله افقی بین ناظر و جسم چقدر است؟
 الف) 20 متر (ب) 28.3 متر (ج) 14.1 متر (د) 10 متر