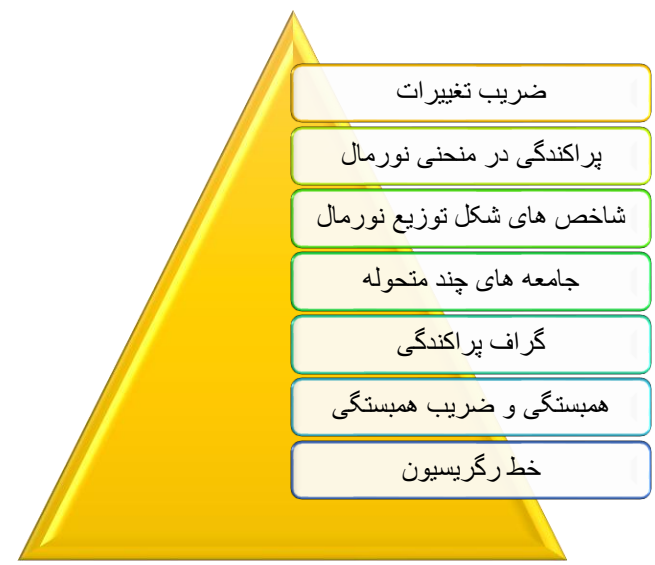


راهنمایی آموزشی ریاضی صنف یازدهم – دور چهاردهم

آنچه درین بخش خواهیم آموخت



اهداف آموزشی

شاگردان در ختم این بخش قادر گردد تا:

- ✓ ضریب تغییرات را بدانند.
- ✓ پراکندگی در منحنی نورمال را بشناسند.
- ✓ شاخص های توزیع نورمال را بدانند.
- ✓ جامعه ها چند متحوله را بشناسند.
- ✓ گراف پراکندگی را ترسیم بتوانند.
- ✓ همبستگی و ضریب همبستگی را بشناسند.
- ✓ خط رگرسیون را بدانند.

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات که به CV نشان داده می‌شود عبارت از خارج قسمت انحراف معیاری بر اوسط که عدد مطلق (بدون واحد) است.

$$CV = \frac{S}{x} \quad \text{یا} \quad \text{ضریب تغییرات} = \frac{\text{انحراف معیاری}}{\text{اوسط}}$$

اگر ضریب تغییرات با عدد 100 ضرب شود، ضریب تحول بدست می‌آید.

$$CV\% = 100 \cdot \frac{S}{x}$$

- ضری تغییرات فقط برای داتا مثبت تعریف می‌گردد.
- اگر همه داتا باهم برابر باشند ضریب تغییرات صفر است.
- اگر همه داتا را در یک عدد مثبت ضرب کنیم ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند.
- اگر به همه داتا یک عدد مثبت اضافه کنیم ضریب تغییرات جدید کوچکتر از ضریب تغییرات داتا اولیه است.

مثال: ضریب تغییرات داتای 1 3 5 را دریافت نمایند.

حل:

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

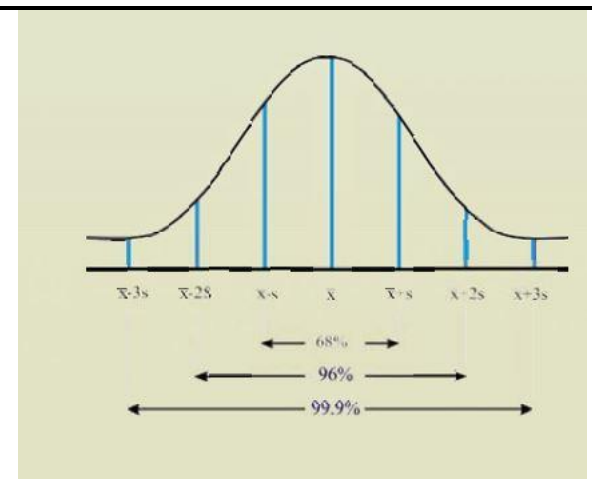
$$S = \sqrt{2.67}$$

$$CV = \frac{S}{x} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

پراکندگی در منحنی نورمال

منحنی نورمال وسیله مهم برای توصیف از مجموع های آماری است. در توزیع نورمال در حالتی که داده ها دارای توزیع نورمال و منحنی کثرت متناظر باشد، واریانس نقشی عمده بی دارد. در واقع با مشخص بودن دو پارامتر اوسط و انحراف معیاری در توزیع نورمال، این توزیع در کل مشخص خواهد بود و محاسبه هر نوع شاخص مساعد است.

گراف منحنی نورمال قرار ذیل ترسیم می‌گردد.



مثال: اگر اوسط معاش کارمندان یک موسسه برابر با مبلغ 12500 افغانی و انحراف معیاری برابر با 700 افغانی باشد.

الف: با استفاده از فیصدی های توزیع نورمال، توزیع معاش داده شده را شرح دهید.

ب: آیا معاش معادل 1400 افغانی غیر عادی است؟ چرا؟

حل الف:

ابتدا مقادیر $\bar{x} \pm S$, $\bar{x} \pm 2S$, $\bar{x} \pm 3S$ را محاسبه می کنیم.

فیصدی	فاصله بر حسب افغانی	فاصله بر حسب S
68%	13200 – 11800	$\bar{x} \pm S$
96%	13900 – 11100	$\bar{x} \pm 2S$
99.6%	14600 – 10400	$\bar{x} \pm 3S$

حل ب:

ابتدا $\bar{x} - 1400$ را حساب می کنیم که برابر است با 1500 یعنی معاش 1400 افغانی به اندازه 1500 افغانی بیشتر از اوسط است. حال اگر این رقم را به S تقسیم کنیم.

$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

بنابراین معاش 1400 افغانی است غیر عادی زیرا به اندازه بیش از 2S بالاتر از \bar{x} قرار دارد.

شاخ های شکل توزیع نورمال

به کمک اوسط و انحراف معیاری می توان چگونگی داتا را به شکل شاخص خمیدگی و شاخص کشیدگی بهتر توضیح و ارائه نمود.

1. شاخص خمیدگی skewness

توزیعی که در اطراف اوسط متناظر نباشد خمیدگی گفته می شود. این شاخص توسط دو ضریب زیر نشان می دهد.

الف: **ضریب خمیدگی:** شاخصی است که برای تعیین میزان خمیدگی به کار می رود و به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

α_3 یک عدد مطلق است که برای مقایسه مورد استفاده قرار می گیرد.

اگر $\alpha_3 = 0$ توزیع متناظر، اگر $\alpha_3 > 0$ توزیع دارای خمیدگی مثبت و اگر $\alpha_3 < 0$ توزیع دارای خمیدگی منفی است.

ب: **ضریب خمیدگی پیرسون:** ضریب پیرسون به صورت زیر تعریف می شود.

$$SK(p) = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

در توزیع متناظر ضریب خمیدگی پیرسون برابر صفر است. کیمیت های مثبت و منفی ضریب خمیدگی پیرسون به ترتیب نشان دهنده خمیدگی مثبت یا منفی توزیع است.

2. شاخص کشیدگی Kurtosis

شاخص کشیدگی نشان دهنده آن است که یک توزیع چه وقت دارای اوج و چه وقت دارای پخشی می باشد. ضریب کشیدگی معمولترین شاخص است که برای اندازه گیری کشیدگی به کار رفته و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

اگر جدول کثرت را در دست داشته باشیم پس فارمول شاخصی کشیدگی قرار ذیل است.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

شاخص کشیدگی بستگی به موقعیت و پراکندگی توزیع ندارد. این شاخص برای مقایسه مورد استفاده قرار می گیرد.

2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

داتای بالا جامعه دو متحوله را بیان می کند.

گراف پراکندگی

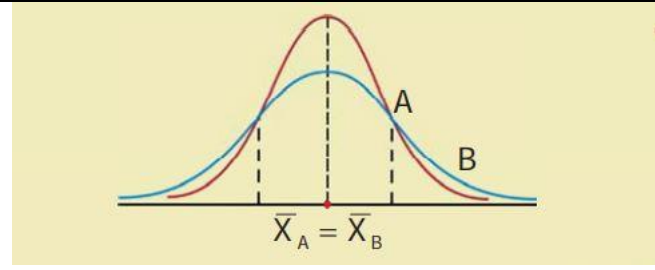
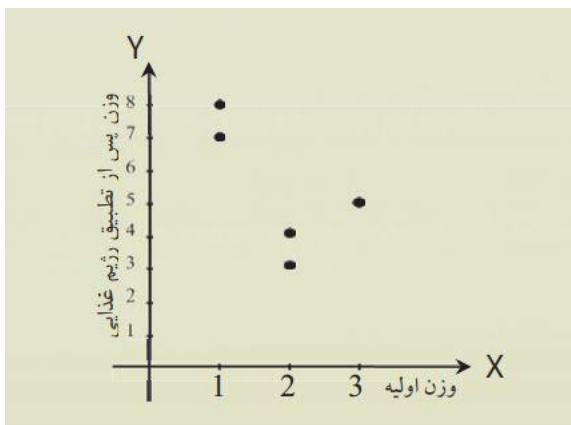
گراف پراکندگی (پراکنش) مجموعه یی از نقاط در مستوی محورهای مختصات است که از ترسیم داتای مربوطه به اندازه گیری در جامعه های دو متحوله بدست می آید.

برای ترسیم گراف پراکندگی داده ها را به صورت جوره های مرتب ارائه و توسط نقاط در یک مستوی محور های مختصات نمایش می دهیم. این گراف می تواند سه نوع اطلاعات را در اختیار ما قرار دهد.

- نمونه یی، که نشان دهنده نوعی ارتباط بین مشاهدات باشد موجود است یا نه؟
- در صورت موجودیت نوعی ارتباط آیا ارتباط خطی است یا غیر خطی؟
- در صورتی که رابطه خطی باشد نوع ارتباط چگونه است؟

مثال: جوره های مرتب زیر را که از تاثیر رژیم غذایی خرگوش ها در مال قبلی بدست آمده است در نظر گرفته و گراف پراکندگی آنها را قرار ذیل ترسیم می نمایم.

حل:



جامعه های چند متحوله

یکی از اهداف عمده در اکثریت تحقیقات احصائیوی پیشبینی و پیش گویی نمودن و تعیین یک متحول از جنس متحول دیگر است. زمان که ارتباط بین دو شی را مورد بررسی قرار می دهیم، منظور از جامعه دو متحوله است.

مانند: رابطه بین حجم و فشار، ارتباط بین صحت و میزان مرگ و میر، رابطه بین کشت و محصول ... رابطه بین دو متحول را بیان می کند. برای سهولت ارتباط بین دو متحول را معمولاً توسط معادلات ریاضیکی بیان می کند.

مثال: یک متخصص تاثیر نوع رژیم غذایی را روی یک تعداد خرگوش ها بررسی کرده است، بدین سبب وزن اولیه هر خرگوش را اندازه گرفته و سپس عملیه رژیم غذایی را بالای آن ها تطبیق و دوباره وزن آنها را اندازه گیری نموده است. داتاهای بدست آمده عبارت اند از:

- (1,8), (2,3), (1,7), (3,5), (2,4)

مختصه اول بیانگر وزن اولیه و مختصه دوم بیانگر وزن خرگوش پس از تطبیق رژیم غذایی اند.

- داتا را بصورت جدول سطری و ستونی بیان کنید.
- اگر داتای بالا را به عنوان یک جامعه فرض نمایم، آیا این جامعه دارای چند متحول است؟

حل:

شماره خرگوش ها	1	3	4	5
وزن اولیه خرگوش ها	1	1	3	2
وزن خرگوش ها بعد از تطبیق رژیم غذایی	8	7	5	4

جدول ستونی زیر را در نظر می گیریم.

شماره خرگوش ها	وزن اولیه	وزن بعد از رژیم
1	1	8



همبستگی و گراف همبستگی

همبستگی به سنجش و دریافت درجه ارتباط بین متحوله‌ها می‌باشد ارتباط بین متحول‌ها می‌تواند به صورت خطی توسط یک خط مستقیم و یا به صورت غیر خطی به وسیله یک منحنی ارائه گردد. همبستگی عموماً به صورت مثبت و منفی بین دو متحول بیان می‌شود.

اگر اندازه دو متحول در یک جهت تغییر کند یعنی x و y هر دو بزرگ یا هر دو کوچک شوند همبستگی مثبت (خط مستقیم) است.

بهترین معیار تشخیص وجود همبستگی یا عدم همبستگی و حتی نوع، جهت و میزان همبستگی خطی ضریب همبستگی است که توسط فرمول زیر ارائه می‌گردد.

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - (\bar{x})(\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

مثال: داتای مربوط به وزن اولیه و وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی خرگوش‌ها را مانند جدول زیر در نظر بگیرید.

شماره خرگوش‌ها	وزن اولیه x	وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی y	حاصل ضرب x و y
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

ضریب همبستگی بین وزن اولیه و وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی را محاسبه کنید.

حل:

اگر x ها وزن اولیه و y ها وزن بعد از تطبیق رژیم غذایی و $n = 5$ تعداد موش‌ها باشد، درین صورت برای محاسبه اوسط x ها و y ها داریم:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S^2_x = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S^2_y = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$= \frac{\sum x \sum y}{n} = \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

در نتیجه ضریب همبستگی عبارت اند از.

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - (\bar{x})(\bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{10.2 - (1.8)(5.6)}{0.74 \cdot 1.86} = \frac{0.12}{1.375} = 0.09$$

$r = 0.09$

خط رگرسیون

رگرسیون (تخمین)، سنجش و دریافت ارزش یک متحول تابع نظر به ارزش یک یا چند متحول مستقل می‌باشد.

معادله که ارتباط بین متحول‌ها را افاده می‌نماید به نام معادله ی رگرسیون یا معادله سنجش یاد می‌کند و این معادله را می‌توان به روش کمترین مربعات محاسبه و ضرایب a و b را به کمک این روش به صورت زیر بدست آورد.

$$a = r \frac{S_y}{S_x}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$



- ضریب تغییرات چیست؟ و فیصدی یا ضریب تحول چگونه بدست می آید؟
- پراکنگی چیست؟
- جامعه چند متحوله چیست؟
- چگونه داتا ها را می توان در جامعه چند متحوله ارزیابی کرد؟
- گراف پراکنش چیست؟
- پراف پراکنش چه چیز را در یک جامعه احصائیوی نشان می دهد؟

$$b = \frac{\sum xy - n \bar{x}\bar{y}}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

نکته: خط رگرسیون وسیله یا ابزاری است برای پیش بینی مقدار یک متحول بر حسب متحول دیگر که به آن وابسته است مورد استفاده قرار گیرد.

مثال: داتای زیر را درد نظر گرفته خط رگرسیون y نسبت به x را دریافت کنید.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2 \Rightarrow S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = 2 \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum xy - (\bar{x})(\bar{y})}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{5}(4-6)}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = \frac{(-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2 - (-1)3 = 2 + 3 = 5$$

پس معادله خط رگرسیون عبارت اند از

$$y = ax + b \Rightarrow y = -x +$$

فعالیت ها

➤ خط رگرسیون را بدانند.