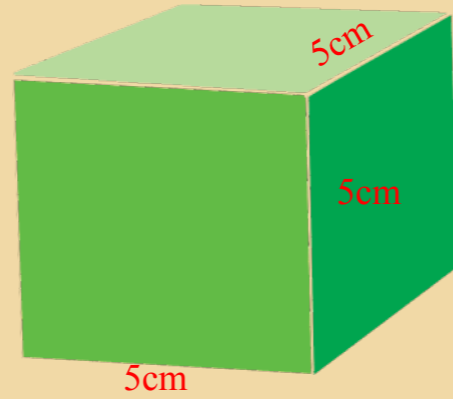
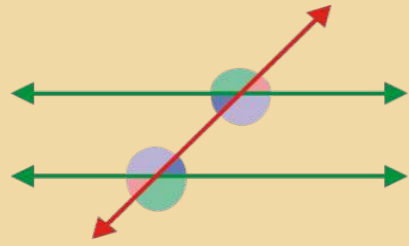
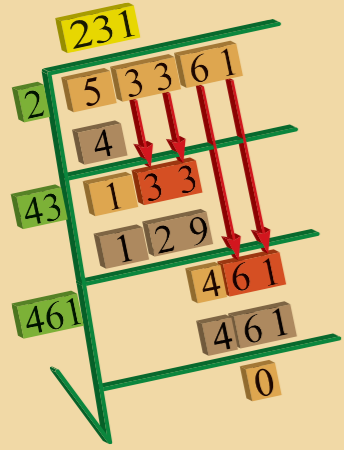
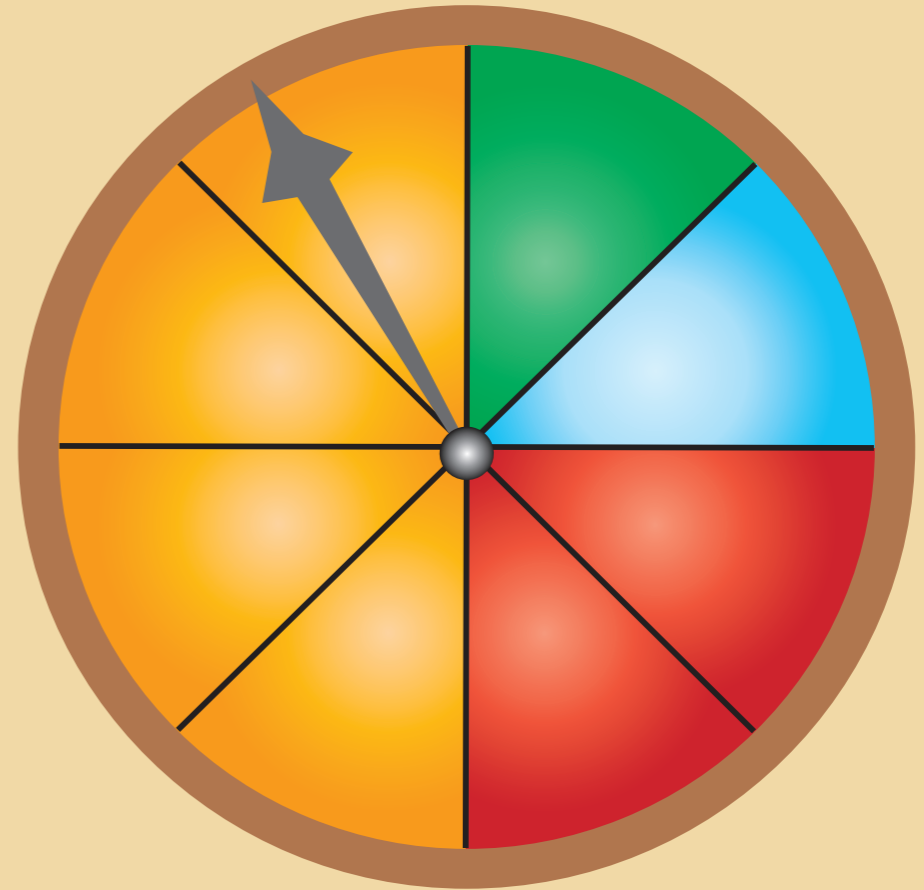


# ریاضی

صنف ۷



ریاضی صنف ۷





## سرود ملی

دا وطن افغانستان دی  
کور د سولې کور د تورې  
دا وطن د ټولو کور دی  
د پښتون او هزاره وو  
ورسره عرب، گوجر دي  
براهوي دي، قزلباش دي  
دا هېواد به تل خلیږي  
په سینه کې د آسیا به  
نوم د حق مودی رهبر

دا عزت د هر افغان دی  
هر بچی یې قهرمان دی  
د بلوڅو د ازبکو  
د ترکمنو د تاجکو  
پامیریان، نورستانیان  
هم ایماق، هم پشه یان  
لکه لمر پر شنه آسمان  
لکه زره وي جاویدان  
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رياضي  
صنف ٧

١٣٩٨  
هـ . ش .

## مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی نصاب تعلیمی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: هفتم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامه وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

مکان چاپ: کابل

چاپخانه:

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

حق طبع، توزیع و فروش کتاب‌های درسی برای وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان محفوظ است. خرید و فروش آن در بازار ممنوع بوده و با متخلفان برخورد قانونی صورت می‌گیرد.

اقراً باسم ربك

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی پایان بر رسول خاتم - حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه گان هویدا است، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می نمایند. در چنین برهه سرنوشت ساز، رهبری و خانواده بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می باشد.

از همین رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت های مهم وزارت معارف پنداشته می شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی با کیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکر شده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به عنوان تربیت کننده گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس را آغاز کنند، که در آینده نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه های فردای کشور می خواهیم تا از فرصت ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوای علمی از درس معلمان گرامی استفاده بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند. در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن ها در این راه مقدس و انسان ساز موفقیت استدعا دارم. با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

### ● فصل اول (ست)..... 3

مفهوم ست، عناصر و روش‌های نوشتن یک ست  
ست‌های مساوی و معادل  
ست فرعی، تقاطع و اتحاد ست‌ها  
تفاضل ست‌ها، ست کلی و مکملهٔ یک ست  
ست‌های متناهی و نامتناهی  
خلاصهٔ فصل اول و تمرین

### ● فصل دوم (اعداد طبیعی)..... 27

قابلیت‌های تقسیم و تجزیهٔ اعداد طبیعی  
طاقت و قوانین طاق (قوانین ضرب و تقسیم طاق)  
روش علمی عددنویسی  
بزرگ‌ترین قاسم مشترک و دریافت آن توسط تجزیه  
کوچک‌ترین مضرب مشترک و دریافت آن توسط تجزیه به اعداد اولیه  
موارد استعمال کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک در حل مسائل روزمرهٔ زنده‌گی  
رابطه بین کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد  
دریافت همزمان کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد  
مربع و جذر مربع تام اعداد طبیعی توسط تجزیه و طریق عمومی  
جذر مکعب تام اعداد طبیعی  
خلاصهٔ و تمرین فصل دوم

### ● فصل سوم (اعداد تام)..... 71

اعداد مثبت و منفی  
ترتیب اعداد تام و نمایش اعداد تام روی محور اعداد  
قیمت مطلقهٔ یک عدد تام، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد تام  
قیمت افاده‌های حسابی  
خواص عملیه‌ها  
خلاصهٔ فصل سوم و تمرین

### ● فصل چهارم (اعداد نسبتی)..... 97

اعداد نسبتی  
مقایسهٔ اعداد نسبتی  
جمع و تفریق، ضرب و تقسیم اعداد نسبتی  
خواص عملیه‌های اعداد نسبتی  
تبدیل اعداد نسبتی به اعداد اعشاری

خلاصه فصل چهارم و تمرین

● **فصل پنجم (مثلث ها و چندضلعی ها)..... 119**

صنف بندی و اقسام مثلث ها، میانه، ارتفاع و ناصف الزاویه در مثلث  
مجموع زوایای داخلی یک مثلث و زوایای خارجی یک مثلث  
رابطه بین اضلاع یک مثلث

چندضلعی ها (مضلع ها)

مجموع زوایای داخلی و خارجی یک مضلع (چندضلعی)

اشکال انطباق پذیر

حالات انطباق پذیری مثلث ها

خلاصه فصل پنجم و تمرین

● **فصل ششم (خطوط موازی و عمود)..... 157**

زوایای متبادله داخلی و خارجی

زوایای متواکفه

زوایای متمم داخلی یک طرف خط قاطع

چهارضلعی ها (متوازی الاضلاع، مستطیل، مربع، معین و ذوزنقه)

زوایای مقابل متوازی الاضلاع

زوایای خارجی یک چهارضلعی

خاصیت قطرهای متوازی الاضلاع

خاصیت قطرهای مستطیل

خاصیت قطرهای لوزی (معین)

خلاصه فصل ششم و تمرین

● **فصل هفتم (احصائیه)..... 187**

روش های جمع آوری اطلاعات

جامعه و نمونه

نمونه تصادفی

متحول تصادفی و انواع آن

جدول کثرت (فریکونسی)

گراف تصویری

مد (Mode)

اوسط

خلاصه فصل هفتم و تمرین

● **فصل هشتم (احتمالات)..... 211**

چانس

احتمال

تجربه کردن یک اتفاق

تجربه تصادفی

فضای نتیجه یا نمونه

احتمال نظری، خلاصه و تمرین فصل هشتم



# فصل اوّل

ست





آیا تا به حال تصمیم گرفته اید که عضو یکی از تیم های ورزشی مکتب خود شوید؟

### فعالیت

تصور کنید که در صنف هفتم یک مکتب 10 شاگرد وجود دارند و آن ها می خواهند که در سه تیم والیبال، فوتبال و باسکتبال مکتب خود شامل شوند. در تیم والیبال 5 نفر و در تیم فوتبال 7 نفر عضو می شود و در تیم باسکتبال هیچ شاگردی شرکت نکرده باشند.

- چه تعداد شاگردان در تیم والیبال و هم در تیم فوتبال ثبت نام کرده اند؟
- چه تعداد شاگردان در هر یک از تیم های ورزشی فوق ثبت نام کرده اند؟

A

احمد	حسن	محمود
نادر	زلمی	قاسم
صفت الله	عزت الله	
دین محمد	عطاء الله	

هر یک از تیم های فوق یک خصوصیت مشترک دارند یا به عبارت دیگر هر یک از این تیم ها یک مجموعه (ست) را تشکیل می دهند.

معمولاً ست ها را به حروف کلان زبان انگلیسی چون  $A, B, C, \dots, X, Y, Z$  نشان می دهند و عناصر ست توسط حروف کوچک مثل  $a, b, c, \dots, x, y, z$  را در

داخل علامت  $\{ \}$  می نویسند. عناصر ست توسط علامت «و» از یکدیگر جدا می شوند.

**مثال اول:** اگر ست شاگردان صنف 7 را، ست A، ست تیم والیبال را B، ست تیم فوتبال را C و ست تیم باسکتبال را D بنامیم؛ هر یک از این ست ها به طور زیر نشان داده می شود:

$A = \{ \text{احمد، حسن، صفت الله، قاسم، عزت الله، نادر، دین محمد، عطاء الله} \}$

$B = \{ \text{محمود، زلمی، قاسم، حسن، احمد} \}$

$C = \{ \text{عزت الله، عطاء الله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد} \}$

ست D خالی است؛ زیرا در تیم باسکتبال هیچ شاگردی اشتراک نکرده است.  $D = \{ \}$

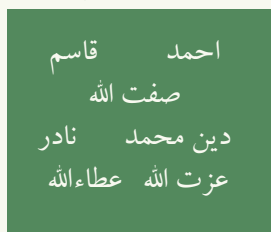
ستی که هیچ عنصر نداشته باشد، به نام ست خالی یاد می شود و به علامت  $\emptyset$  و یا  $\{\}$  نشان داده می شود.

ست ها را می توانیم توسط اشکال مختلف نشان دهیم که به نام **دیاگرام وین** یاد می شوند؛ طور مثال می توان ست های  $A, B, C$  را توسط وین دیاگرام طور زیر نشان دهیم.

C ست تیم فوتبال

B ست تیم والیبال

A ست شاگردان صنف 7



## فعالیت

- ستی را بنویسید که عناصر آن، لوازم و سامان یک بکس هندسی باشند.
- یک ست 5 عنصری را بنویسید که عناصر آن نام های حیوانات اهلی باشند.
- ست 6 عنصری را بنویسید که عناصر آن نام های میوه های تازه باشند.

**مثال دوم:** اگر ست اعداد طاقی را که از 10 کوچک تر باشد  $O$ ، و ست اعداد جفتی را که از 10 کوچک تر باشد  $E$  بنامیم، در این صورت:

$$O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

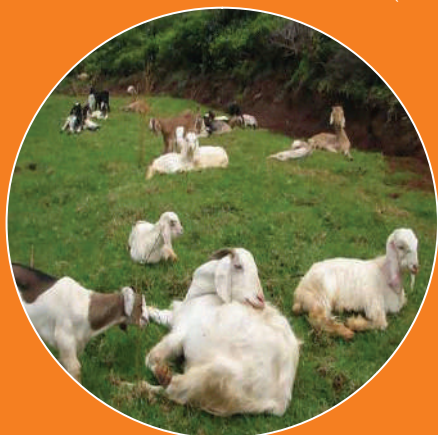
$$E = \{2, 4, 6, 8\}$$

هر دسته مشخص شده از اشیا را یک ست و اشیای آن را عناصر (عضو) ست می نامند.

## تمرین

- 1- ستی را بنویسید که عناصر آن نام روزهای هفته باشند.
- 2- ستی را بنویسید که عناصر آن نام ماه های سال باشند.
- 3- ست حروف صدادار زبان انگلیسی را بنویسید.
- 4- ستی را بنویسید که عناصر آن نام های ولایات افغانستان باشند.
- 5- ستی را بنویسید که عناصر آن انسان هایی باشند که قد آن ها 3 متر است.

## عناصر یک ست (Members of a Set)



آیا می‌توانید بگویید که بز در ست حیوانات اهلی شامل است یا خیر؟

در مثال تیم‌های ورزشی، صفت الله عضو تیم فوتبال بود. او یک عنصر از ست  $C$  می‌باشد و این طور نشان داده می‌شود:  $\text{صفت الله} \in C$   
چون زلمی عنصر (عضو) تیم فوتبال (ست  $C$ ) نیست، این طور نشان داده می‌شود:  
 $C \notin \text{زلمی}$  (زلمی عنصر ست  $C$  نیست و یا عنصر ست تیم فوتبال نیست).  
اما زلمی عضو تیم والیبال یا عنصر ست  $B$  بوده؛ بنابراین:  
 $B \in \text{زلمی}$  (زلمی عنصر ست  $B$  است)

### فعالیت

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

ست‌های زیر را در نظر بگیرید:

- آیا  $b$  عنصر ست  $B$  می‌باشد؟ در مورد عضویت  $d$  در ست  $B$  چه می‌گویید؟
- آیا  $5$  عنصر ست  $A$  است؟ آیا  $5$  عنصر ست  $B$  است؟
- ست  $A$  چند عنصر دارد؟ ست  $B$  چند عنصر دارد؟

**مثال اول:** ست‌های  $A$  و  $B$  را در نظر می‌گیریم طوری که

$$A = \{\text{اعداد جفت یک‌رقمی}\}$$

$$B = \{\text{اعداد یک‌رقمی که بر 3 قابلیت تقسیم دارند}\}$$

- ست‌های  $A$  و  $B$  را با عناصرشان بنویسید.
- ست‌های  $A$  و  $B$  را به وسیلهٔ دیاگرام وین نشان دهید.

حل

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{3, 6, 9\}$$

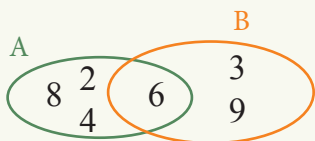
$$2 \in A \quad 3 \in B$$

$$4 \in A \quad 9 \in B$$

$$8 \in A \quad 6 \in B$$

$$6 \in A \quad 4 \notin B$$

مشاهده می شود که:



مثال دوم: درستی یا نادرستی رابطه های زیر را تعیین کنید.

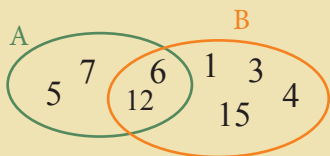
$$f \in \{a, b, c, d, e\} \quad (b)$$



حل: a درست است؛ اما b درست نیست.

عنصر بودن و یا شامل بودن یک عنصر در یک ست با علامت ( $\in$ ) و عنصر نبودن در یک ست با علامت ( $\notin$ ) نشان داده می شود.

## تمرین



1- خانه های خالی زیر را بر اساس شکل فوق ست های A و B پر کنید.

$$5 \in \square$$

$$6 \square B$$

$$12 \square A$$

$$7 \notin \square$$

$$3 \notin \square$$

$$4 \square A$$

2- اگر  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  و  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  باشد، کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$5 \in A \quad , \quad 4 \in A \quad , \quad 7 \notin A \quad , \quad 9 \in B \quad , \quad 8 \notin B$$

$$10 \in A \quad , \quad 11 \in B \quad , \quad 1 \notin A \quad , \quad 2 \in A \quad , \quad 3 \notin B$$

3- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  باشد، کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$4 \in A \quad 5 \in B \quad 5 \in A \quad 6 \notin A$$

$$3 \in A \quad 2 \in B \quad 2 \notin A \quad 6 \in A$$

4- درستی و نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

$$8 \in \{3, 5, 7, 8, 9, 11, 13\} \quad , \quad 5 \notin \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$10 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad , \quad g \notin \{a, b, c, d, e\}$$

$$A = \{ \text{گل صورتی}, \text{گل سفید}, \text{گل زرد} \}$$

$$B = \{ \text{کلمه}, \text{نماز}, \text{روزه}, \text{زکات}, \text{حج} \}$$

$$C = \{ \text{پنج بنای اسلام} \}$$

یک ست را به چند روش می توان نشان داد؟

به طور عموم ست را به دو روش نشان می دهند:

1- تمام عناصر یک ست و یا تصاویر عناصر به این روش در بین علامت ست  $\{ \}$  قرار می گیرند طوری که در بین عناصر علامت  $(,)$  نوشته می شود. این روش را روش تفصیلی یا روش لست کردن عناصر (Tabulation Method) می گویند.

**مثال اول:**  $A = \{ \text{گل زرد}, \text{گل قرمز}, \text{گل سفید}, \text{گل صورتی} \}$  ،  $B = \{ \text{احمد}, \text{حسن}, \text{قاسم}, \text{زلمی}, \text{محمود} \}$

$E = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, 500 \}$  و  $D = \{ a, b, c, d, e \}$   $C = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$   
چون عناصر ست E زیاد می باشد، بدین سبب سه نقطه (...) این مفهوم را دارد که اعداد الی 500 دوام دارند.

2- ست را به اساس خاصیت های مشترک عناصر در یک جمله مشخص می کنند. در این طریقه، نوشتن علامت  $\{ \}$  ضروری نیست. این روش را روش اجمالی یا روش توصیفی (Description Method) می نامند.

**مثال دوم:** ست B و ست E مثال اول را توسط طریقه اجمالی طور زیر می نویسیم:

ست نام های شاگردان تیم والیبال صنف 7  $B =$

ست 500 عدد طبیعی پیهم که با 1 شروع می شوند  $E =$

$$P = \{ 2, 3, 5, 7, 11, \dots \}$$

را به شکل زیر نشان می دهیم

ست اعداد اولیه  $P =$

**مثال سوم:** اگر  $\{ \text{کلمه طیبه}, \text{نماز}, \text{روزه}, \text{زکات}, \text{حج} \} = K$  باشد، ست K را توسط طریقه اجمالی به شکل زیر نشان می دهیم:

$$K = \text{ست پنج بنای اسلام}$$

## فعالیت

A = ست 8 حرف اول زبان انگلیسی

B = ست اعداد طبیعی کوچک تر از 10 و بزرگ تر از 2

C = ست مضرب های عدد 3 کمتر از 20

ست های A، B و C را توسط روش لست کردن عناصر بنویسید.

**مثال چهارم:** اگر  $A = \{a, e, i, o, u\}$  و  $B = \{a, b, c, d, e\}$  باشد. این ست ها را به روش اجمالی یا توصیفی بنویسید.

**حل:** ست حروف صدادار زبان انگلیسی  $A =$  ، ست پنج حرف اول زبان انگلیسی  $B =$

## تمرین

1- ست های زیر را به روش لست کردن عناصر بنویسید.

B = ست نام روزهای یک هفته

A = ست نام ماه های یک سال

E = ست رنگ های بیرق افغانستان

2- ست های زیر را به طریقه توصیفی (تشریحی) بنویسید.

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{\text{سیاه، سرخ، سبز}\}$

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$D = \{2, 4, 6, 8\}$

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

3- ست های زیر را به طریقه لست کردن عناصر بنویسید.

K = ست اعداد طبیعی جفت یک رقمی

L = ست اعداد طبیعی طاق یک رقمی

T = ست مضرب های عدد هفتم

C = ست شاگردان تیم فوتبال صنف هفتم

B = ست شاگردان تیم والیبال صنف هفتم

A = ست شاگردان صنف هفتم

## ست‌های مساوی و ست‌های معادل (Equal and Equivalent Sets)

$$A = \{ \text{flower, rose, blue flower} \}$$

$$B = \{ \text{ant, ladybug, beetle} \}$$

$$C = \{ \text{blue flower, pink flower, rose} \}$$

آیا می‌توان گفت که ست‌های  $A$  و  $C$  چه رابطه‌یی با هم دارند و نیز در بین ست‌های  $A$  و  $B$  چه رابطه‌یی موجود است؟

### فعالیت

اگر ست  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$  باشد، ست‌های  $B$  و  $C$  را از روی ست  $A$  طوری بسازید که:

- ست  $B$  اعداد جفت یک‌رقمی باشد.
- ست  $C$  اعداد یک‌رقمی بی‌که بر 2 قابلیت تقسیم را دارند.
- در باره ست‌های  $B$  و  $C$  چه گفته می‌توانید؟

**تعریف:** ست‌های  $A$  و  $B$  را ست‌های مساوی می‌نامند، هرگاه تعداد عناصر هر دو ست با هم مساوی و یکسان باشند. به عبارت دیگر، اگر تمام عناصر ست  $A$  در ست  $B$  و تمام عناصر ست  $B$  در ست  $A$  شامل باشند، در این صورت می‌نویسیم که  $A = B$  می‌باشد.

**مثال اول:** اگر  $A = \{1, 2, 6\}$  و  $B = \{1, 1, 2, 2, 6\}$  باشد متوجه باشید که:  
 $A = B$  می‌باشد.

متوجه باید بود که  $\{2, 3, 5, 7\} = \{5, 3, 2, 7\}$  می‌باشد. ست‌های  $A = \{1, 2\}$  و  $B = \{2, 3\}$  را در نظر بگیرید. این دو ست با هم مساوی نیستند؛ زیرا که  $1 \in A$  ولی  $1 \notin B$

تکرار عناصر یک ست و یا تبدیل کردن جاهای عناصر یک ست، هیچ کدام تغییری در ست وارد نمی‌کند.

## فعالیت

دو ست  $A$  و  $B$  را در نظر بگیرید:

$$A = \{a, b, c, d\} \quad \text{و} \quad B = \{5, 4, 7, 8\}$$

- تعداد عناصر هر یک از ست  $A$  و  $B$  چند است؟
- آیا  $a$  عنصر ست  $B$  است؟
- آیا ست  $A$  با ست  $B$  مساوی است، چرا؟

**مثال دوم:** اگر  $A = \{\bullet, \blacktriangle, \blacksquare\}$  و  $B = \{8, 10, 12\}$  باشند، آیا دو ست  $A$  و  $B$  با هم معادل اند؟

چون تعداد عناصر ست  $A$  سه و تعداد عناصر ست  $B$  نیز سه می‌باشند؛ پس ست‌های  $A$  و  $B$  با هم معادل اند.

**مثال سوم:** آیا ست اعداد طاق یک‌رقمی و ست اعداد جفت یک‌رقمی با هم معادل اند؟

**حل:**  $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$        $B = \{2, 4, 6, 8\}$

چون تعداد عناصر ست  $A$  مساوی به پنج و تعداد عناصر ست  $B$  مساوی به چهار می‌باشد،  $A$  و  $B$  با هم معادل نیستند.

اگر عناصر ست‌های  $A$  و  $B$  یکسان باشند به نام ست‌های مساوی و اگر صرف تعداد عناصرشان با هم مساوی باشند به نام ست‌های معادل (Equivalent Sets) یاد می‌شوند.

1- ست‌های  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{a, b, c, d, e\}$  را در نظر بگیرید:

## تمرین

- آیا ست  $A$  مساوی با ست  $B$  می‌باشد؟
  - آیا ست  $A$  معادل با ست  $B$  می‌باشد؟
- 2- ست‌های  $A = \{1, 7, 8, 9\}$  و  $B = \{9, 8, 1, 7, 9\}$  را در نظر بگیرید:
- آیا ست  $A$  با ست  $B$  مساوی است؟
- 3- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟
- اگر  $A = \{5, 6, 8, 11\}$  و  $B = \{11, 11, 6, 5, 8\}$  باشد، پس  $A = B$  است.
  - اگر  $C = \{\text{شنبه، یکشنبه، دوشنبه}\}$  و  $D = \{x, y, z\}$  باشد، ست  $C$  با ست  $D$  معادل می‌باشد.
  - اگر  $M = \{2, 4, 6\}$  و  $N = \{6, 4, 6, 2\}$  باشد  $M \neq N$  است.

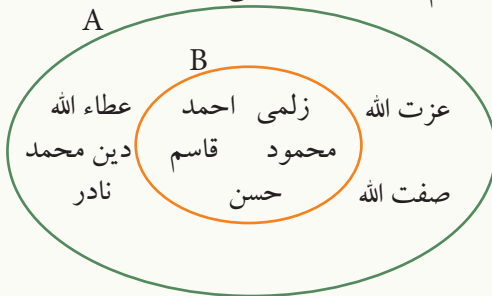
## ست فرعی (Subset)



اعضای خانواده شما اهل یک شهر یا قریه استند،  
اهالی شهر یا قریه شما از مردمان افغانستان استند،  
مردم افغانستان ...

## فعالیت

A ست شاگردان صنف 7 و B ست شاگردان تیم والیبال صنف 7 می باشد.



- با توجه به شکل فوق عناصر ست های A و B را بنویسید.
- بین عناصر ست A و B چه رابطه‌ی وجود دارد؟ توضیح دهید.

دیده می شود که هر عنصر ست B عنصر ست A نیز می باشد، در این صورت می گوئیم که ست B یک ست فرعی ست A بوده که این طور نشان داده می شود:  $B \subset A$   
این علامت ست فرعی می باشد. از طرف دیگر چون هر عنصر ست A در ست B موجود نیست؛ پس ست A، ست فرعی B نمی باشد و این طور نشان داده می شود:  $A \not\subset B$   
**مثال اول:** ست های زیر را در نظر می گیریم:

$$A = \{\text{احمد، محمود، زهرا، مریم}\}$$

$$B = \{\text{داوود، قاسم، احمد، مریم}\}$$

$$C = \{\text{مریم، احمد}\}$$

پس می توان گفت که:  $A \not\subset B$  ،  $B \not\subset A$  ،  $C \subset B$  ،  $C \subset A$  و نیز می توان گفت که  $A \subset A$  می باشد؛ یعنی هر ست، ست فرعی خودش می باشد. اگر هر عنصر ست  $A$  در ست  $B$  و برعکس هر عنصر ست  $B$  در ست  $A$  شامل باشد، می گوییم که این دو ست با همدیگر مساوی اند و می توانیم بنویسیم:

$$A \subset B \text{ و } B \subset A \Rightarrow A = B$$

## فعالیت

ست های  $D = \{1, 2, 5, 6\}$  و  $E = \{7, 6, 2, 5\}$  ،  $B = \{5, 7\}$  ،  $A = \{2, 5, 6, 7\}$  داده شده اند.

- آیا  $B \subset A$  می باشد؟
- آیا  $D \subset A$  می باشد؟
- آیا ست  $E$  ست فرعی  $A$  می باشد؟

**مثال دوم:** اگر  $A = \{2, 4, 6, 8\}$  باشد، کدام یک از ست های زیر ست فرعی  $A$  می باشد؟

$$B = \{1, 2, 4\} \quad , \quad E = \{ \}$$

**حل:**  $E \subset A$  است؛ زیرا ست خالی ست فرعی هر ست شده می تواند، و  $B \not\subset A$  (ست فرعی  $A$  نیست)؛ زیرا  $1 \in B$  است؛ ولی  $1 \notin A$ .

اگر تمام عناصر ست  $B$  در ست  $A$  شامل باشند، ست  $B$  یک ست فرعی ست  $A$  می باشد که این طور نشان داده می شود  $B \subset A$ .

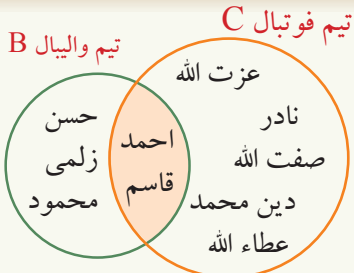
## تمرین

- 1- هر گاه  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد، ست های  $B$ ،  $C$  و  $D$  را به شکل تفصیلی بنویسید.
  - $B$  ستی باشد که همه عناصر آن اعداد جفت باشند.
  - $C$  ستی باشد که همه عناصر آن اعداد طاق باشند.
  - $D$  ستی باشد که همه عناصر آن اعداد بزرگتر از چهار باشند.
- 2- آیا هر ست، ست فرعی خودش می باشد؟
- 3- کدام یک از ست های زیر ست فرعی ست  $C = \{2, 4, 6, 8\}$  می باشد؟
 
$$A = \{1, 2, 4\} \quad , \quad B = \{ \}$$
- 4- کدام یک از ست های زیر ست فرعی ست  $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  می باشد؟
 
$$A = \{3, 5, 7\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
- 5- کدام یک از ست های زیر با ست  $C = \{1, 2, 3, 4\}$  مساوی می باشد؟
 
$$A = \{1, 2, 3\} \quad , \quad B = \{4, 3, 2, 1\}$$

## تقاطع ست‌ها (Intersection of Sets)



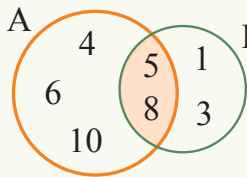
آیا از مثال اول درس اول گفته می‌توانید که کدام شاگردان صنف هفتم هم در تیم والیبال و هم در تیم فوتبال اشتراک دارند؟



طوری که دیده می‌شود، احمد و قاسم در هر دو تیم والیبال و فوتبال اشتراک دارند. تقاطع دو ست B و C عبارت از ستی است که عناصر آن احمد و قاسم بوده، این گونه نشان داده می‌شود.  
 $B \cap C = \{\text{احمد، قاسم}\}$  که علامت تقاطع می‌باشد.

$$B \cap C = \{\text{احمد، قاسم، عزت الله، نادر، صفت الله، دین محمد، عطاء الله}\} \cap \{\text{حسن، زلمی، محمود، احمد، قاسم}\} = \{\text{احمد، قاسم}\}$$

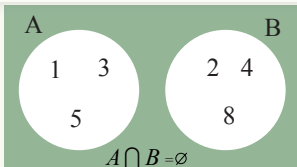
**مثال اول:** هرگاه ست‌های  $A = \{4, 5, 6, 8, 10\}$  و  $B = \{3, 5, 8, 1\}$  داده شده باشند،  $A \cap B$  و  $B \cap A$  را دریابید.



**حل:**  
 $A \cap B = \{4, 5, 6, 8, 10\} \cap \{3, 5, 8, 1\} = \{5, 8\}$   
 $B \cap A = \{3, 5, 8, 1\} \cap \{4, 5, 6, 8, 10\} = \{5, 8\}$   
 در نتیجه طوری که در شکل نیز مشاهده می‌شود، می‌توان گفت که:  
 $A \cap B = B \cap A = \{5, 8\}$

### فعالیت

هرگاه ست‌های  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ،  $B = \{1, 2, 7, 8\}$  و  $C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$  داده شده باشند،  $A \cap B$ ،  $B \cap C$  و  $(A \cap B) \cap C$  را دریافت نموده و توسط دیاگرام وین نشان دهید.

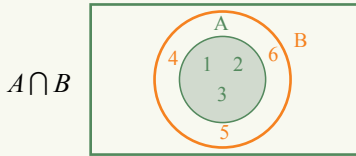


**مثال دوم:** دو ست A و B را قرار زیر در نظر بگیرید.  
 $A = \{1, 3, 5\}$        $B = \{2, 4, 8\}$   
 $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 8\} = \emptyset$  دیده می‌شود که:

ست‌هایی را که هیچ عنصر مشترک ندارند ست‌های غیر مشترک (Disjoint Sets) می‌نامند.

تقاطع دو ست  $A$  و  $B$  در صورتی که تمام عناصر  $A$  در  $B$  شامل باشند، با ست  $A$  برابر است.

**مثال سوم:** اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  باشد  $A \cap B$  را دریابید.



**حل:** همان‌طور که در دیاگرام مقابل نشان داده شده است:

$$A \cap B = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3\} = A$$

**مثال چهارم:** اگر  $A = \{1\}$ ،  $B = \{1, 2\}$  و  $C = \{1, 2, 3\}$  باشد؛

$(A \cap B) \cap C$  و  $A \cap (B \cap C)$  را دریافت نموده، با هم مقایسه کنید.

$$B \cap C = \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$$

$$A \cap (B \cap C) = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$$

$$A \cap B = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$$

$$(A \cap B) \cap C = \{1\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = \{1\}$$

**حل:**

به همین ترتیب

در نتیجه

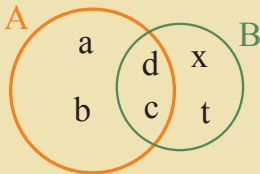
این خاصیت را به نام خاصیت اتحادی تقاطع یاد می‌کنند.

تقاطع دو ست  $A$  و  $B$  عبارت از ستی است که عناصر آن هم در  $A$  و هم در  $B$  شامل باشند.

$$A \cap A = A$$

تقاطع هر ست  $A$  با خودش مساوی به خود  $A$  است:

## تمرین



1- شکل مقابل را در نظر بگیرید.

• عناصر هر یک از ست‌های  $A$  و  $B$  را از روی شکل بنویسید.

•  $A \cap B$  و  $B \cap A$  را به دست آورده، در شکل نشان دهید.

2- اگر  $A = \{5, 10, 15, 20\}$ ،  $B = \{6, 10, 12, 20\}$  و  $C = \{1, 2, 10, 20, 30\}$  باشند.

• ست‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  را در دیاگرام وین نشان دهید.

•  $A \cap B$ ،  $A \cap C$  و  $B \cap C$  را دریابید.

## اتحاد ست ها (Union Of Sets)



5 نفر شاگرد صنف 7، عضو تیم والیبال و 7 نفر شاگرد صنف 7 عضو تیم فوتبال می باشند؛ زمانی که شاگردان هر دو تیم فوتبال و والیبال غرض درس به صنف می روند، جمعا در صنف چند نفر می باشند؟

ست شاگردان صنف 7 = {دین محمد، عطاء الله، صفت الله، نادر، عزت الله، قاسم، احمد، محمود، زلمی، حسن} = A

ست تیم والیبال = {قاسم، احمد، محمود، زلمی، حسن} = B

ست تیم فوتبال = {عطاء الله، دین محمد، صفت الله، نادر، عزت الله، قاسم، احمد} = C

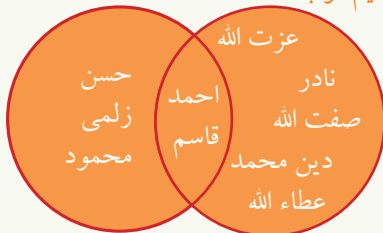
مشاهده می گردد که 5 نفر در تیم والیبال و 7 نفر در تیم فوتبال اشتراک دارند؛ اما زمانی که به صنف می روند جمعا در صنف 10 نفر می شوند؛ این مسأله اتحاد ست های B و C بوده به شکل زیر نمایش داده می شود:

BU C، که U علامت اتحاد بین دو ست می باشد.

$BU C = \{عطاء الله، دین محمد، صفت الله، نادر، عزت الله، قاسم، احمد\} \cup \{حسن، زلمی، محمود، احمد\}$

$A = \{دین محمد، عطاء الله، صفت الله، نادر، عزت الله، قاسم، احمد، محمود، زلمی، حسن\}$

تیم فوتبال C

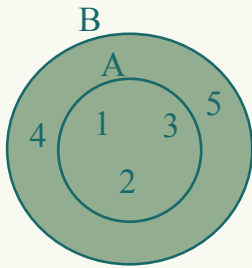


BU C تیم والیبال B

دیده می شود که قاسم و احمد هم عضو تیم والیبال و هم عضو تیم فوتبال می باشند. در اتحاد ست ها عناصر مشترک تنها یک بار نوشته می شوند، طوری که در دیاگرام وین نشان داده شده است.

## فعالیت

هرگاه ست های  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 6\}$  داده شده باشند،  $A \cup B$  و  $B \cup A$  را به دست آورده و در دیاگرام وین نشان دهید.



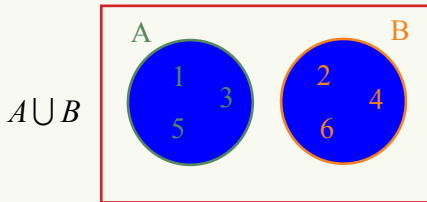
**مثال اول:** اگر ست‌های  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  داده شده باشند،  $A \cup B$  و  $B \cup A$  را دریافت نموده و در شکل نشان دهید.

$$A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

**مثال دوم:** اگر ست‌های  $A = \{1, 3, 5\}$  و  $B = \{2, 4, 6\}$  داده شده باشند،  $A \cup B$  را دریافت

نموده و در شکل نشان دهید.  $A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



**مثال سوم:** اگر  $A = \{1\}$ ،  $B = \{1, 2\}$  و  $C = \{1, 2, 3\}$  باشد  $(A \cup B) \cup C$  و  $A \cup (B \cup C)$

$$B \cup C = \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cup (B \cup C) = \{1\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

$$A \cup B = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}$$

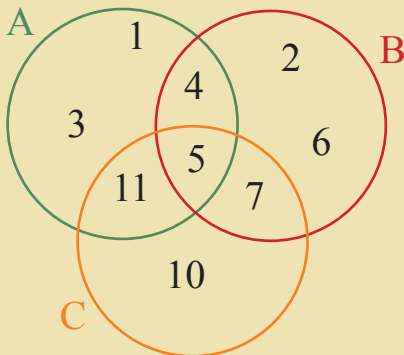
$$(A \cup B) \cup C = \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

در نتیجه  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

خاصیت فوق را به نام خاصیت اتحادی عملیهٔ اتحاد ست‌ها یاد می‌نمایند.

اتحاد دو ست  $A$  و  $B$  عبارت از ستی است که عناصر آن یا در  $A$  یا در  $B$  شامل باشند.

## تمرین



بدر نظر داشت شکل مقابل، ست‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$ :

$A \cup B$ ،  $A \cup C$ ،  $B \cup C$ ، و  $(A \cup B) \cup C$  را به طریق لست کردن عناصر بنویسید.

## تفاضل دو ست (Difference Of two Sets)



اگر شاگردان تیم والیبال صنف 7 به مسابقه بروند، در صنف 7 چند نفر شاگرد باقی می ماند؟

طوری که می دانید:

شاگردان صنف 7 که عضو تیم والیبال هستند، عبارت از ست  $B = \{\text{قاسم، احمد، محمود، زلمی، حسن}\}$  بوده و ست تمام شاگردان صنف 7 یا ست  $A$  مساوی است به:

$A = \{\text{زلمی، محمود، دین محمد، عطاءالله، نادر، عزت الله، قاسم، صفت الله، احمد، حسن}\}$  بنابراین ست شاگردانی که در صنف می مانند و عضو تیم والیبال نیستند، عبارت است از: صفت الله، عزت الله، نادر، عطاءالله و دین محمد، که در حقیقت تفاضل این دو ست می باشد.

شاگردان باقی مانده در صنف که عضو تیم والیبال نیستند  $A - B = \{\text{صفت الله، دین محمد}\}$  که در حقیقت تفاضل این دو ست می باشد. تفاضل دو ست فوق در شکل نیز نشان داده شده است:

A شاگردان صنف 7



**مثال اول:** تیم والیبال = {محمود، زلمی، قاسم، حسن، احمد}  $B = \{\text{احمد، حسن، محمود، زلمی، قاسم}\}$

تیم فوتبال = {عزت الله، عطاءالله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد}  $C = \{\text{عزت الله، عطاءالله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد}\}$



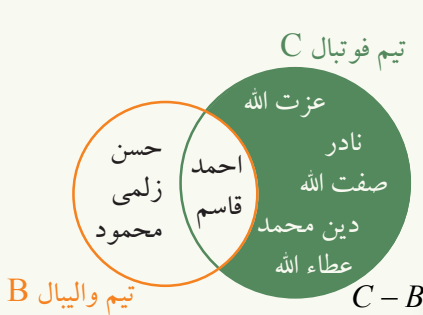
$B - C$  و  $C - B$  را دریافت نموده و در شکل نشان دهید.

**حل:** در  $B - C$  عناصری شامل اند که در  $B$  شامل؛ اما در  $C$  شامل نیستند؛ بدین معنا شاگردانی که در تیم والیبال باشند؛ اما در تیم فوتبال نباشند، مطلوب است.

$B - C = \{\text{عزت الله، عطاءالله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد}\} - \{\text{احمد، حسن، محمود، زلمی، قاسم}\}$

$B - C = \{\text{محمود، زلمی، حسن}\}$

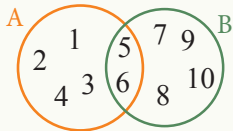
در  $C - B$  شاگردانی شامل می‌باشند که در تیم فوتبال شامل؛ اما در تیم والیبال شامل نمی‌باشند.  
 $C - B = \{\text{محمود، زلمی، قاسم، حسن، احمد}\} - \{\text{عزت الله، عطاء الله، دین محمد، نادر، صفت الله، قاسم، احمد}\}$   
 $= \{\text{عزت الله، عطاء الله، دین محمد، نادر، صفت الله}\}$



$C - B$  در شکل هندسی به طور زیر نشان داده شده است:

دیده می‌شود که  $B - C \neq C - B$  بوده و علامت  $\neq$  به مفهوم مساوی نیست به کار می‌رود.

## فعالیت



- عناصر ست A و B را بنویسید.
- $A - B$  و  $B - A$  را به دست آورده و در شکل نشان دهید.

$$\{a, b\} - \{b\} = \{a\}$$

$$\{x, y, z\} - \{a, b\} = \{x, y, z\}$$

$$\{a, b\} - \{a, b\} = \emptyset$$

مثال دوم:

حل:

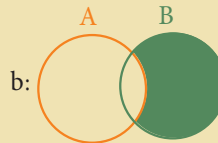
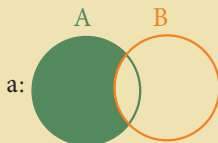
تفاضل دو ست  $A - B$  عبارت از ستی است که عناصر آن در A شامل؛ اما در B شامل نیستند.  
 $B - A$  عبارت از ستی است که عناصر آن در B شامل؛ اما در A شامل نیستند.

## تمرین

1- اگر ست‌های  $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, 7\}$  و  $C = \{4, 6, 8\}$  داده شده باشند.  
 $A - A$ ,  $A - B$ ,  $B - A$ ,  $B - B$ ,  $A - C$  و  $C - A$  را دریابید.

2- اگر ست‌های  $C = \{a, b, 8, 12\}$  و  $D = \{a, 12, 16\}$  داده شده باشند.  
 $C - D$  و  $D - C$  را دریابید.

3- در کدام شکل قسمت رنگ‌شده ست  $A - B$  را نشان می‌دهد؟



4- اگر  $A = \{1, 3, 5\}$  و  $B = \{2, 4, 6\}$  داده شده باشند،  $A - B$  مساوی است به:

a) B

b) A



در صنف 7 مضامین تعلیمات اسلامی، ریاضی، ساینس، اجتماعیات، پشتو، دری، انگلیسی، عربی، هنرها و تربیت بدنی تدریس می شوند. یک شاگرد صنف 7، کتاب های تعلیمات اسلامی، اجتماعیات، پشتو، هنرها، انگلیسی، عربی و تربیت بدنی را به دست آورده است. این شاگرد کدام کتاب ها را باید به دست آورد تا تمام کتاب هایش تکمیل گردند؟

## فعالیت

- ست تمام حروف زبان انگلیسی را بنویسید و آن را به  $U$  نشان دهید.
- ست تمام حروف صدادار زبان انگلیسی را مشخص نموده، آن را  $A$  بنامید.
- ست تمام حروف زبان انگلیسی را با دیاگرام وین نشان دهید.
- ست حروف صدا دار و ست حروف بی صدا (غیر واول) را در همان شکل نشان دهید.

در فعالیت فوق ست حروف زبان انگلیسی را ست عمومی می نامند که به  $U$  نشان داده می شود و ست حروف بی صدای (غیر واول) را به نام ست مکملۀ حروف صدا دار (واول)  $\bar{A}$  یاد می کنند. مکملۀ ست  $A$  را به  $A'$  یا  $\bar{A}$  نشان می دهند.

به عبارۀ دیگر، اتحاد ست حروف بی صدا زبان انگلیسی با ست حروف صدا دار، ست حروف زبان انگلیسی را تشکیل می دهند.

طوری که می دانید، زبان انگلیسی 26 حرف داشته که 5 حرف آن صدا دار و 21 حرف آن غیر بی صدا می باشد. ست حروف بی صدا به نام ست مکملۀ ست حروف صدادار یاد می شوند.

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

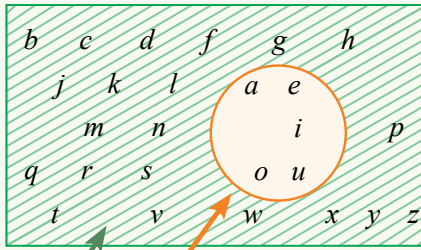
$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

ست حروف واول (صدادار)  $\rightarrow \bar{A} = U - A \leftarrow$  ست حروف غیر واول (بی صدا)

↓  
ست حروف زبان انگلیسی

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\} - \{a, e, i, o, u\} \\ &= \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\} \end{aligned}$$

U



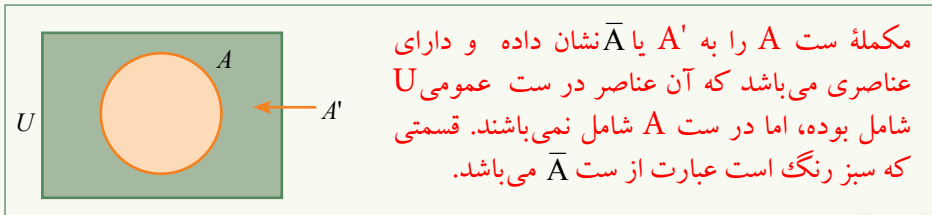
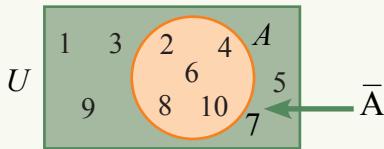
$\bar{A}$  که در این شکل خط خط شده است؛ مکملهٔ ست A می‌باشد.

در هر موردی که بحث می‌شود، یک ست مشخص وجود دارد که تمام عناصر مربوط موضوع را احتوا نموده و آن را ست عمومی یا ست کلی می‌نامند.

**مثال:** اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  و  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  باشد مکملهٔ A را نظر به U دریافت نموده و در شکل نشان دهید.

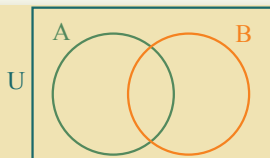
**حل:** برای به دست آوردن  $\bar{A}$  عناصر ست A را از ست U حذف می‌کنیم؛ عناصری که در ست U باقی می‌مانند،  $\bar{A}$  یا مکملهٔ A نظر به U می‌باشند.

$$\bar{A} = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$



مکملهٔ ست A را به  $A'$  یا  $\bar{A}$  نشان داده و دارای عناصری می‌باشد که آن عناصر در ست عمومی U شامل بوده، اما در ست A شامل نمی‌باشند. قسمتی که سبز رنگ است عبارت از ست  $\bar{A}$  می‌باشد.

## تمرین



1-  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  را در شکل مقابل مشخص کنید.  
2- ست اعداد اولیهٔ کوچک‌تر از 20 را دریافت نموده و آن را U بنامید.

• ست فرعی B را طوری مشخص کنید که عناصر آن بین 5 و 15 باشد.

•  $\bar{B}$  را در شکل مشخص کنید.



آیا ستاره گانی را که در آسمان می بینید، قابل شمارش اند؟

هرگاه  $A = \{a, b\}$  باشد،  $A$  دارای دو عنصر و هرگاه  $B = \{1, 2, 3, 4\}$  باشد،  $B$  دارای چهار عنصر می باشد. هرگاه ست اعداد طبیعی طاق بین 2 تا 20 را به  $C$  نشان دهیم،  $C = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$  بوده و دارای 9 عنصر می باشد.

**مثال اول:** ست حروف صدا دار زبان انگلیسی که عناصر آن قابل شمارش اند یک ست متناهی است:  $A = \{a, e, i, o, u\}$

اما ست اعداد طبیعی که یک ست نامتناهی بوده و عناصر آن قابل شمارش نمی باشند، طور زیر نشان داده می شود:  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  ارائه نقطه نقطه (... بدین معنا است که اعداد طبیعی پایان ندارند.

### فعالیت

- ست اعداد جفت بین 20 و 30 را بنویسید.
- تعداد عناصر آن را تعیین نموده و بگویید که آیا این یک ست متناهی است، یا خیر؟
- ست اعداد جفت بزرگتر از عدد 20 را بنویسید. آیا می توانید تعداد عناصر این ست را تعیین کنید. آیا این یک ست متناهی است یا نامتناهی؟

**مثال دوم:** در ست های زیر کدام ست ها متناهی و کدام ست ها نامتناهی می باشند؟

$A = \{\text{نام های ماه های سال}\}$

$B = \{\text{رنگ های بیرق افغانستان}\}$

$C = \{2, 3, 4, 5\}$

$D = \{2, 4, 6, 8, \dots, 100\}$

$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

**حل:** ست های A, B, C و D ست های متناهی اند؛ اما ست های E و N ست های نامتناهی می باشند.

**مثال سوم:** در ست های زیر کدام ست متناهی و کدام ست نامتناهی است؟

$$A = \{\text{حروف زبان انگلیسی}\} \quad B = \{\text{مضرب های عدد شش}\}$$

**حل:** ست A یک ست متناهی است، زیرا 26 عنصر دارد. اما ست B یک ست نامتناهی است، زیرا مضرب های عدد 6 قابل شمارش نمی باشند.

اگر عناصر یک ست قابل شمارش (معین) باشند، به نام **ست متناهی** یاد می شود؛ اما اگر عمل شمارش عناصر یک ست به انتها نرسد، این گونه ست را **ست نامتناهی** می گویند. ست خالی نیز یک ست متناهی است.

## تمرین

1- در ست های زیر ست های متناهی و نامتناهی را مشخص کنید.  $M = \{1, 2, 3, a, b, c\}$

$$D = \{a, b, c, d, e\}$$

$$O = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$$

$$E = \{10, 20, 30, \dots, 1000\}$$

2- کدام یک از ست های زیر ست نامتناهی می باشد؟

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 1000\} \quad B = \{1, 2, 3, \dots\} \quad C = \{\text{اعداد طاق بین 50 و 100}\}$$

3- کدام یک از ست های زیر ست متناهی می باشد؟

$$A = \{\text{پنج بنای اسلام}\} \quad B = \{2, 4, 6, 8, \dots\} \quad D = \{1, 3, 5, \dots\}$$

4- چهار ست متناهی و چهار ست نامتناهی را بنویسید.

## خلاصه فصل اول

- هر دسته مشخص شده از اشیای مختلف را یک ست می نامند و اشیای آن عبارت از عناصر ست می باشند. عناصر ست را در بین علامت ست  $\{ \}$  نوشته و توسط علامت « $\in$ » از یکدیگر جدا می سازند.
- ستی که هیچ عنصری ندارد به نام ست خالی یاد می گردد که توسط علامت  $\emptyset$  و یا  $\{ \}$  نشان داده می شود.
- عنصر بودن در یک ست با علامت  $\in$  و عنصر نبودن در یک ست با علامت  $\notin$  نشان داده می شود.
- ست ها عموماً به دو روش ارائه می شوند. روش لست کردن (روش تفصیلی) که تمام عناصر و یا تصاویر آن ها در بین علامت  $\{ \}$  نوشته می شوند و طریق توصیفی (روش اجمالی) که بر اساس خاصیت های مشترک عناصر، در یک جمله نگاشته می شوند.
- دو ست که عناصر آن ها یکسان باشند ست های مساوی و اگر تنها تعداد عناصر آن ها با هم مساوی باشند؛ به نام ست های معادل یاد می کنند.
- اگر تمام عناصر ست  $B$  در ست  $A$  شامل باشند، ست  $B$  ست فرعی ست  $A$  بوده و این طور نشان داده می شود:  $B \subset A$
- تقاطع دو ست  $A$  و  $B$  عبارت از ستی است که عناصر آن هم در  $A$  و هم در  $B$  شامل باشند و این طور نشان داده می شود:  $A \cap B$
- اتحاد دو ست  $A$  و  $B$  عبارت از ستی است که عناصر آن یا در  $A$ ، یا در  $B$  و یا در هر دوی آن ها شامل باشند و این طور نشان داده می شوند:  $A \cup B$
- تفاضل دو ست  $A - B$  عبارت از ستی است که عناصر آن در ست  $A$  شامل بوده؛ ولی در ست  $B$  شامل نباشند.
- مکمله یک ست  $A$  نظر به یک ست  $U$  عبارت از ستی است که عناصر آن در  $U$  شامل بوده؛ ولی در  $A$  شامل نباشد که به  $\bar{A}$  نشان داده می شود.
- ستی که عناصر آن قابل شمارش باشد، ست متناهی و ستی که عناصر آن قابل شمارش نباشد، ست نامتناهی نامیده می شود.
- قوانین تبدیلی و اتحادی در عملیه های تقاطع و اتحاد ست ها صدق می کنند.

## تمرین فصل اول

- 1- ست اعداد طاق را که بر 2 پوره قابل تقسیم باشند بنویسید.  
 2- اگر A ست نام ماه‌های سال باشد، آن را به طریق لست کردن عناصر ارائه کنید.  
 3- اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  ،  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  و  $C = \{a, e, i, o, u\}$  باشد،

خانه خالی‌های زیر را با استفاده از علامت  $\in$  و  $\notin$  پر کنید.

$$3 \square A \quad , \quad u \square B \quad , \quad 10 \square C \quad , \quad i \square A \quad , \quad 8 \square B \quad , \quad e \square C$$

$$8 \square A \quad , \quad 3 \square B \quad , \quad f \square C \quad , \quad 2 \square A \quad , \quad e \square B \quad , \quad 8 \square C$$

- 4- اگر ست‌های  $A = \{a, b, c\}$  ،  $B = \{1, 2, 3\}$  و  $C = \{b, a, c\}$  داده شده باشند، کدام جفت از ست‌ها، مساوی و کدام آن‌ها معادل اند؟

- 5- اگر ست شاگردان مکتب شما A و ست شاگردان صنف شما B باشد، آیا ست B می‌تواند ست فرعی A باشد؟

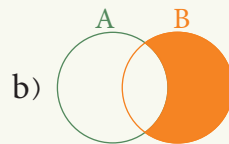
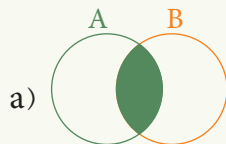
- 6- اگر ست‌های  $A = \{0, 1, 2\}$  ،  $B = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  و  $C = \{3, 4\}$  داده شده باشند،  $B \cap C$  و  $A \cup B$  ،  $C \cup A$  ،  $B \cup C$  ،  $A \cap C$  ،  $A \cap B$  ،  $A \cap A$  را دریابید.

- 7- هرگاه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  باشد،  $B - A$  و  $A - B$  را دریابید.

- 8- اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  ،  $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$  و  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$  باشد؛  $A \cup \bar{B}$  ،  $\bar{A} \cup B$  ،  $\bar{A} \cap \bar{B}$  و  $\bar{A}$  ،  $\bar{B}$  را دریابید.

- 9- کدام یک از این ست‌ها متناهی و کدام یک نامتناهی می‌باشد؟  
 $A = \{x, y, m\}$        $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$        $C = \{1, 2, \dots, 100\}$

- 10- در کدام شکل قسمت رنگ‌شده تقاطع دو ست A و B را نشان می‌دهد؟



- 11- اگر ست‌های  $A = \{7, 9, 11, 13\}$  و  $B = \{6, 8, 10, 12\}$  داده شده باشند،  $A - B$  و  $B - A$  را دریابید و در دیاگرام وین نشان دهید.



# فصل دوم اعداد طبیعی



بشر از ابتدای تاریخ با شمارش اشیا  
در محیط خود آشنا بود.

## اعداد طبیعی (Natural numbers)



چه فکر می‌کنید اولین اعدادی که بشر به آن‌ها سر و کار داشت کدام اعداد بودند؟

انسان‌ها از زمان قدیم به شمارش اشیایی که در طبیعت مشاهده می‌کردند، ضرورت داشتند. از همین شمار کردن اشیاء مفهوم اعداد طبیعی به وجود آمده است. اعداد طبیعی را اعداد شمارش (Count numbers) نیز می‌گویند. این اعداد از یک شروع می‌شود و با علاوه نمودن یک به عدد قبلی، عدد بعدی حاصل می‌گردد. اعداد  $1, 2, 3, 4, \dots$  را اعداد طبیعی می‌گویند. و ست آن به طور زیر نشان داده می‌شود:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots\}$$

اعداد طبیعی را می‌توان روی خط اعداد (line numbers) به طور زیر نشان داد:



هر عدد که به طرف راست عدد دیگری واقع باشد، بزرگتر و اگر به طرف چپ عدد واقع باشد کوچکتر از آن عدد می‌باشد به طور مثال:  $7 < 8$  و  $8 < 9$  است. می‌دانیم که حاصل جمع دو عدد طبیعی نیز یک عدد طبیعی است؛ به طور مثال: 3 و 5 دو عدد طبیعی اند و حاصل جمع آن دو ( $3 + 5 = 8$ ) نیز یک عدد طبیعی است، پس ست اعداد طبیعی در عملیه جمع دارای خاصیت بسته گی می‌باشد.

**سؤال:** آیا در جمع دو عدد طبیعی ترتیب جمع کردن آن‌ها با هم شرط است؟

**مثال اول:**  $7 + 6 = 13$  و نیز  $6 + 7 = 13$  می‌شود؛ پس:  $6 + 7 = 7 + 6$

دیده می‌شود که در جمع دو عدد طبیعی، ترتیب قرار گرفتن آن‌ها با هم شرط نیست. این خاصیت را خاصیت تبدیلی اعداد طبیعی در عملیه جمع می‌گویند.

$$8 + (3 + 2) = (8 + 3) + 2$$

$$8 + 5 = 11 + 2$$

$$13 = 13$$

**مثال دوم**

این خاصیت را خاصیت اتحادی اعداد طبیعی در عملیه جمع می‌گویند.  
 صفر با هر عدد طبیعی که جمع شود، حاصل جمع مساوی با خود عدد می‌گردد؛ مثلاً:  
 $3+0=0+3=3$  است صفر را به نام عنصر عینیت عملیه جمع یاد می‌کنند.

## فعالیت

- آیا خاصیت‌های فوق در عملیه ضرب اعداد طبیعی نیز صدق می‌کنند؟
- خانه‌های خالی زیر را پر کنید.

$$888 \times \square = 0 \quad , \quad 11 + (\square + 17) = (\square + 18) + \square$$

$$25 \times \square = 12 \times \square \quad , \quad 11 \times (18 + \square) = \square \times 18 + \square \times 15$$

دیده می‌شود خاصیت‌های اتحادی و تبدیلی در عملیه ضرب اعداد طبیعی نیز صدق می‌کنند.

**به خاطر داشته باشید:** حاصل ضرب هر عدد طبیعی با صفر مساوی به صفر و حاصل ضرب هر عدد طبیعی با یک مساوی به خود عدد می‌باشد؛ مثلاً:  
 $3 \times 0 = 0$  ,  $3 \times 1 = 3$   
**مثال سوم**

$$3 \times (4 + 5) = (3 \times 4) + (3 \times 5)$$

$$3 \times 9 = 12 + 15$$

$$27 = 27$$

این خاصیت به نام خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع یاد می‌گردد.  
 صفر عنصر عینیت در عملیه جمع و یک عنصر عینیت در عملیه ضرب می‌باشد و خاصیت‌های بسته‌گی، تبدیلی و اتحادی در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد طبیعی و خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع صدق می‌کنند.

## تمرین

1- کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

- حاصل جمع دو عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است.
  - در اعداد طبیعی، عدد یک، عنصر عینیت عملیه جمع می‌باشد.
  - اعداد طبیعی در عملیه جمع از خاصیت تبدیلی پیروی می‌کنند.
  - اعداد طبیعی در عملیه ضرب نیز از خاصیت تبدیلی پیروی می‌کنند.
  - خاصیت تبدیلی عملیه تفریق در اعداد طبیعی صدق می‌کند.
  - خاصیت تبدیلی عملیه تقسیم در اعداد طبیعی صدق می‌کند.
- 2- خالیگاه‌های زیر را پر کنید.

$$211 + 327 = 327 + \square \quad , \quad 325 \times 88 + 325 \times 73 = 325 \times (\square + \square)$$

$$3935 \times \square = 0 \quad , \quad 803 \times 593 = 593 \times \square$$

$$79 \times (35 \times 89) = (\square \times 35) \times 89$$

$$82 \div 9$$

آیا عدد 82 بر 9 پوره تقسیم می شود؟  
 عددی را پیدا کنید که بر 9 پوره قابل تقسیم  
 باشد.

طبق مثال داده شده، خانه های خالی جدول زیر را پر کنید.  
 کدام اعداد بر کدام اعداد پوره تقسیم می شوند؟

اعداد	2	3	4	5	6	7	8	9	10
210	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✓
1200									
817									
105									
2008									

اگر 81, 36 و 45 را بر 9 تقسیم کنیم، باقی مانده تقسیم مساوی به صفر است؛ ولی در تقسیم 82 بر 9 باقی مانده صفر نمی شود. در حالت اول تقسیم، که باقی مانده مساوی به صفر شد، می گوئیم 81 بر 9 پوره قابل تقسیم است؛ ولی 82 بر 9 پوره قابل تقسیم نیست.

### فعالیت

- زیر اعدادی که بر 2 پوره قابل تقسیم اند خط بکشید:  
 47, 29, 7821, 2790, 3154, 106, 218, 7822
- زیر اعدادی که بر 9 پوره قابل تقسیم اند خط بکشید:  
 882, 1232, 11115, 1115, 315, 702
- جمله صحیح را به علامت ✓ و جمله غلط را به علامت ✗ مشخص کنید:  
 -  $\square$  عددی که رقم یک های آن صفر و یا 5 باشد، بر 5 پوره قابل تقسیم است.

- □ عددی که مجموع ارقام آن بر 3 پوره تقسیم شود، آن عدد بر 3 پوره قابل تقسیم است.
  - □ اگر عددی بر 9 پوره قابل تقسیم باشد، بر 3 نیز پوره قابل تقسیم است.
  - زیر اعدادی که هم بر 2 و هم بر 3 پوره قابل تقسیم اند، خط کشیده و توسط عملیه تقسیم نشان دهید که بالای 6 نیز پوره قابل تقسیم می باشند یا خیر؟
- 438 , 216 , 73 , 128 , 54 , 537 , 126 , 582 , 602

**مثال:** کدام عدد بر 6 و کدام عدد بر 9 پوره قابل تقسیم است؟ 14, 12, 24, 18  
**حل:** چون 12, 18 و 24 هم بر 3 و هم بر 2 پوره قابل تقسیم هستند، پس بر 6 نیز پوره قابل تقسیم هستند. 18 تنها عددی است که بر 9 نیز پوره قابل تقسیم است.  
 هر گاه در تقسیم دو عدد با هم، باقی مانده صفر شود، می گوییم مقسوم بر مقسوم علیه پوره قابل تقسیم است.

## تمرین

- 1- در خانه های خالی کوچک ترین رقمی را بنویسید تا عددی که حاصل می شود، بر اعداد داده شده پوره قابل تقسیم باشند.
 

□ 725 بر 4	□ 56 بر 3	□ 723 بر 6
□ 672 بر 5	□ 392 بر 2	□ 56 بر 5
- 2- جواب های درست را انتخاب کنید.  
 اعدادی که رقم یک ها آن ها صفر باشد، بر کدام اعداد قابلیت تقسیم را دارند؟  
 a) 2, 5, 10      b) 3      c) 4      d) 8  
 - عدد 1110 بر کدام عدد زیر پوره قابل تقسیم است؟  
 a) 2, 5, 6, 10      b) 4      c) 7      d) 9  
 - عدد 12300 بر کدام اعداد پوره قابل تقسیم است؟  
 a) 7      b) 8      c) 2, 3, 4, 5, 6, 10      d) 7, 8, 9
- 3- کدام اعداد زیر بر 2, 3, 4 و 6 پوره قابل تقسیم است؟  
 87 , 128 , 531 , 588 , 1017 , 24324 , 76
- 4- سه عدد مختلف را دریابید که هم بر 3 و هم بر 4 پوره قابل تقسیم باشند.
- 5- سه عدد مختلف را دریابید که هم بر 2 و هم بر 3 پوره قابل تقسیم باشند.
- 6- عدد 4092 بر کدام اعداد زیر پوره قابل تقسیم است؟  
 a) 8      b) 7      c) 11, 3      d) 13

## تجزیه (Factoring) اعداد طبیعی



عدد 20 را به شکل حاصل ضرب دو عدد طبیعی بنویسید.  
زیر اعدادی که تنها به عدد یک و خودشان قابل تقسیم اند خط بکشید:  
21, 17, 15, 23, 32

می دانیم که  $24 = 4 \times 6$  است و اعداد 4 و 6 را به نام اجزای ضربی (عوامل ضربی) 24 یاد می کنند.  
**سؤال:** آیا تنها 6 و 4 اجزای ضربی 24 می باشند؟

### فعالیت

- اعداد 18 و 31 را به اجزای ضربی تجزیه نموده و بگویید که تعداد اجزای ضربی 18 زیادتر است یا از 31؟
- اجزای ضربی اعداد 5، 11 و 19 را بنویسید.

در فعالیت فوق دیدیم که برخی از اعداد مانند 18 بیشتر از دو جزء ضربی دارند و برخی از اعداد مانند 31 و 11 تنها دو جزء ضربی دارند.

**اعداد اولیه (Prime Numbers):** اعدادی اند که به جز از یک و خودشان بر عدد دیگری پوره قابل تقسیم نمی باشند. به عبارتی دیگر اعدادی که تنها دو قاسم داشته باشند، به نام اعداد اولیه یاد می شوند. ست اعداد اولیه با P نشان داده می شود و عبارت است از:  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots\}$

**اعداد مرکب (Composite Numbers):** اعدادی که علاوه بر یک و خودشان بر اعداد دیگری نیز قابل تقسیم باشند به نام اعداد مرکب یاد می گردند. مانند:

$$C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, \dots\}$$

**یادداشت:** عدد یک نه اولیه و نه مرکب است.

**مثال:** کدام یک از عددهای 27، 17، 36 و 19 اولیه و کدام یک آن ها مرکب اند؟

**حل:** ابتدا قاسم های هر یک از اعداد را می نویسیم:

اعداد 3, 9, 27 و 1 قاسم‌های 27 می‌باشند، بنابراین 27 عددی مرکب است.  
 اعداد 1, 17, 1 قاسم‌های 17 می‌باشند، بنابراین عدد 17 عددی اولیه است.  
 اعداد 18, 36, 12, 9, 6, 4, 3, 2 و 1 قاسم‌های عدد 36 می‌باشند، بنابراین 36 عددی مرکب است.  
 اعداد 9, 3 و 1 قاسم‌های 9 می‌باشند، بنابراین 9 عددی مرکب است.  
 اعداد 19 و 1 قاسم‌های 19 می‌باشند، بنابراین 19 عددی اولیه است؛ زیرا که تنها دو قاسم دارد.

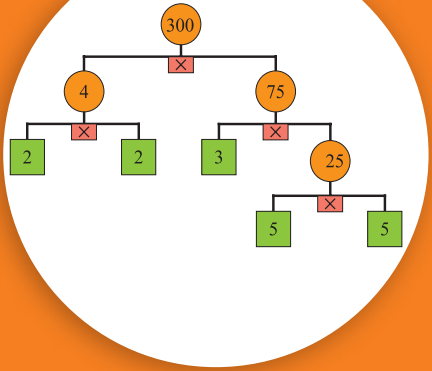
نوشتن یک عدد به صورت حاصل ضرب اجزای ضربی را تجزیه (Factoring) می‌گویند.

## تمرین

- 1- کدام جمله درست است؟  
 (a) عدد یک، عدد اولیه نیست.  
 (b) عدد یک، عدد قابل تجزیه می‌باشد.
- 2- اگر  $187 = 11 \times 17$  باشد؛ پس:  
 (a) 187 یک عدد اولیه است.  
 (b) 17 جزء ضربی 187 است.
- 3- کدام یک از اعداد زیر اولیه و کدام یک مرکب است؟  
 11 ، 14 ، 37 ، 49 ، 51 ، 15
- 4- آیا عدد یک، عدد مرکب است؟ چرا؟
- 5- در مقابل اعدادی که اولیه اند، اولیه و در مقابل اعدادی که مرکب اند، مرکب بنویسید.  

59	90	67
73	847	1111
- 6- در اعداد زیر، کدام یک آن‌ها عدد اولیه نیست؟  
 a) 47                      b) 19                      c) 21                      d) 23
- 7- در اعداد زیر، کدام یک آن‌ها عدد مرکب نیست؟  
 a) 90                      b) 67                      c) 39                      d) 64

## تجزیه به اعداد اولیه (Prime Factoring)



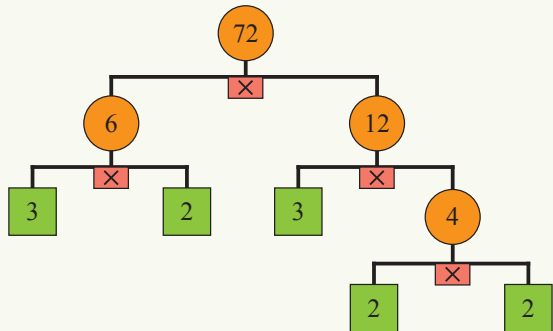
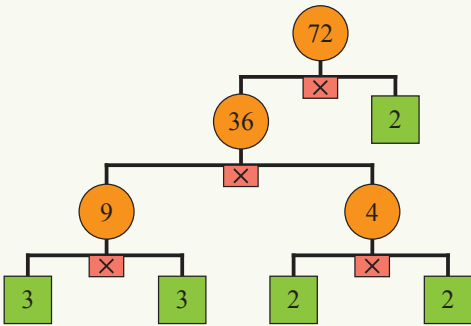
$12 = 2 \times 2 \times 3$  و  $12 = 3 \times 4$   
چه تفاوتی بین اجزای ضربی 12 در ارائه‌های  
فوق وجود دارد؟

عدد 72 را به اشکال مختلف اجزای ضربی آن تجزیه نمایید:

1)  $72 = 2 \times 36 = 2 \times 4 \times 9 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

2)  $72 = 6 \times 12 = 2 \times 3 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2$

تجزیه‌های فوق را در شکل زیر نشان می‌دهیم:



### فعالیت

عدد 72 را علاوه بر دو شکل فوق، به چند شکل دیگر تجزیه می‌توانید؛ طرز ارائه آن را نیز نشان دهید.

2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

می‌توان عملیه تجزیه را در یک جدول به شکل زیر خلاصه کرد:

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

دیدیم از هر روشی که برای تجزیه یک عدد به اجزای اولیه ضربی‌اش استفاده کنیم، در پایان همواره به یک نتیجه می‌رسیم.

**مثال:** اعداد 208, 416 و 2574 را به اجزای ضربی اولیه آن‌ها تجزیه کنید.

**حل:**

2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

2	416
2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

2	2574
3	1287
3	429
11	143
13	13
	1

$$208 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13$$

$$416 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13$$

$$2574 = 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 13$$

**می‌دانیم:** در تجزیه یک عدد تجزیه‌پذیر (عدد مرکب) به اجزای ضربی اولیه، عدد را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک می‌توانیم بنویسیم؛ اگر یکی از اجزای ضربی یا هر دوی آن‌ها تجزیه‌پذیر باشند، آن‌ها را نیز به صورت حاصل ضرب اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک می‌نویسیم. این کار را ادامه می‌دهیم تا این که همه اجزای ضربی اعداد اولیه باشند؛ اگر همه اجزای ضربی یک عدد مرکب، اعداد اولیه باشند، این گونه تجزیه را تجزیه به اعداد اولیه می‌نامند.

## تمرین

1- اعداد 36، 48 و 70 را به اجزای ضربی اولیه آن‌ها تجزیه کنید.

2- اعداد 12، 20، 45، 64 و 80 را به اجزای ضربی اولیه آن‌ها تجزیه کنید.

3- اعداد 70 و 80 را اول به اجزای ضربی مرکب و سپس به اجزای ضربی اولیه آن‌ها تجزیه کنید.

4- کدام یک از تجزیه‌های اعداد زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$28 = 2^2 \times 9$$

$$16 = 2^4$$

$$15 = 5^3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

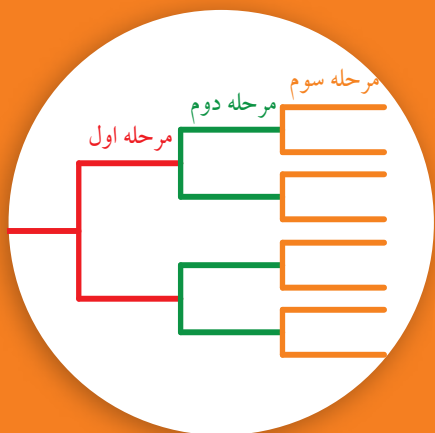
$$27 = 3 \times 9$$

$$16 = 2 \times 13$$

5- تمام اجزای ضربی اولیه اعداد 15، 9، 24 و 29 را بنویسید.

6- اعداد 144 و 121 را به اجزای ضربی اولیه آن تجزیه کنید.

## طاقة (Power)



می دانیم که هر حجره چگونه به دو حجره تقسیم می شود. در شکل مقابل، مراحل انقسام یک حجره مشاهده می شود.

### فعالیت

مرحله	صفر	اول	دوم	سوم	چهارم
تعداد حجره ها	1	2	$2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2$	

- مرحله چهارم را بکشید و جدول را کامل کنید.
- بین تعداد حجرات و مراحل تقسیم آن ها چه رابطه یی وجود دارد؟
- در مرحله دهم چند عدد حجره خواهیم داشت؟
- آیا می توانیم تعداد حجرات را در مرحله دهم به شکل خلاصه بنویسیم؟

حاصل جمع مقابل را به کمک عملیه ضرب خلاصه کنید:  $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$   
 $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$

آیا حاصل ضرب  $2 \times 2 \times 2$  را نیز می توان خلاصه کرد؟  
 برای آسانی کار می توان  $2 \times 2 \times 2$  را به شکل  $2^3$  نوشته و آن را این طور می خوانیم، 2 به توان 3، در عدد  $2^3$ ، 2 را قاعده (Base)، 3 را توان نما (Exponent) و  $2^3$  را به نام طاقت سوم 2 یاد می کنند. توان نما نشان می دهد که قاعده چند دفعه در خودش ضرب شده است.  $4^3$  نشان می دهد که 4 سه دفعه در خودش ضرب گردیده است؛ یعنی:  $4^3 = 4 \times 4 \times 4$

**مثال اول:** قیمت هر یک از طاقت های زیر را دریابید:  $4^2$ ،  $5^3$ ،  $2^3$ ،  $5^4$ ،  $10^2$ ،  $3^4$

**حل:**  $4^2 = 4 \times 4 = 16$  ،  $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$  ،  $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$  ،  $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$  ،  $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

به همین ترتیب  $\left(\frac{2}{3}\right)^4$  به معنای  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$  است که  $\frac{2}{3}$  قاعده و 4 توان نما می باشد.

## فعالیت

• قیمت هر یک از طاقتهای زیر را دریافت کنید:

$$3^2 = \square, 4^3 = \square, 10^3 = \square, 1^2 = \square, 2^5 = \square, 10^5 = \square$$

• حاصل ضربهای زیر را به شکل طاقتهای بنویسید:

$$4 \times 4 \times 4 = \quad 9 \times 9 \times 9 \times 9 = \quad 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 =$$

• آیا اعداد  $2^7$  و  $7^2$  با هم مساوی اند؟ چرا؟

**مثال دوم:** آیا اعداد  $\frac{2}{3}$  و  $(\frac{2}{3})^3$  برابر اند؟

$$\frac{2^3}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

**حل:**

پس  $\frac{2}{3}$  و  $(\frac{2}{3})^3$  برابر نیستند.

هرگاه یک عدد چندین مرتبه در خودش ضرب شود، در این صورت حاصل ضرب به طور ساده به شکل طاقتهای ارائه می‌گردد و یا کوتاه‌ترین طریقه نشان دادن حاصل ضرب تکرار یک عدد را طاقتهای (Power) می‌نامند.

## تمرین

1- حاصل ضرب  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$  مساوی است به:

- a)  $2^5$                       b)  $5^2$                       c) 25                      d) 36

2- حاصل ضرب  $10 \times 10 \times 10$  مساوی است به:

- a)  $10^3$                       b)  $3^{10}$                       c) 100                      d)  $10^{10}$

3- عدد  $3^3$  مساوی است به:

- a) 9                      b) 27                      c) 54                      d) 12

4- یک شاگرد عددی را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده که جواب آن  $2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5$  می‌باشد. این جواب را به شکل طاقتهای چگونه می‌توانیم بنویسیم؟

- a)  $2^2 \times 5^3$                       b)  $2^3 \times 5^2$                       c)  $2^2 \times 5^2$                       d)  $2^3 \times 5^3$

5- اعداد 36 و 24 را به اجزای ضربی اولیه آنها تجزیه نموده و به شکل طاقتهای بنویسید.

- 6- اجزای ضربی اولیه عدد 416 به شکل طاقتهای مساوی است به:  
a)  $2^5 \times 13$                       b)  $2^4 \times 13$

- 7- اجزای ضربی اولیه عدد 208 به شکل طاقتهای مساوی است به:  
a)  $2^4 \times 13$                       b)  $2^5 \times 13$

## قانون ضرب طاقت‌ها

$$24 \times 36$$

$24 \times 36$  را به عوامل ضربی اولیه تجزیه کرده و حاصل ضرب را به صورت طاقت بنویسید.  
 $16$  را به دو شکل به صورت طاقت بنویسید.  
آیا می‌توانید عدد دیگری را پیدا کنید که به دو شکل به صورت طاقت نوشته شود؟

**مثال اول:** حاصل ضرب  $3^2 \times 3^3$  و  $3^5$  را مقایسه کنید.  
**حل:** چون می‌دانیم که  $3^2 = 3 \times 3$  و  $3^3 = 3 \times 3 \times 3$  است، بنابراین:

$$3^2 \times 3^3 = \underbrace{3 \times 3}_{3^2} \times \underbrace{3 \times 3 \times 3}_{3^3} = 3^5$$
$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$$

در نتیجه دیده می‌شود که:

## فعالیت

• تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$7^3 \times 7^2 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^{\square} + \square$$
$$2^2 \times 2^4 = (2 \times 2) \times (\square \times \square \times \square \times \square) = 2^{\square}$$

• آیا می‌توانید برای ضرب اعداد توان‌دار با قاعده‌های مساوی، یک قاعده عمومی را پیشنهاد کنید؟

در فعالیت فوق دیدیم که در ضرب طاقت‌هایی که دارای قاعده‌های مساوی باشند، حاصل ضرب مساوی به: قاعده مشترک به توان حاصل جمع توان‌های داده شده می‌باشد.

**مثال دوم:** حاصل ضرب  $2^3 \times 2^5$  و  $3^2 \times 3^3 \times 3^4$  را به دست آورید.  
**حل:**

$$2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$
$$3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3^{2+3+4} = 3^9$$

در مورد حاصل ضرب  $2^3 \times 3^3$  چه گفته می‌توانید؟

$$2^3 \times 3^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3)(2 \times 3)(2 \times 3) = (2 \times 3)^3 = 6^3$$

در ضرب طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف داشته باشند، قاعده‌ها را در هم ضرب نموده و به توان یکی از توان‌های مساوی می‌نویسیم:

**مثال سوم:**

$$2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5 \quad , \quad 3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5 = 12^5$$

**مثال چهارم:**

$$(3^4)^2 = 3^4 \times 3^4 = 3^8 \quad \text{یا} \quad (3^4)^2 = (3)^{4 \times 2} = 3^8$$

در صورتی که یک عدد توان‌دار به توان برسد، با استفاده از قانون ضرب طاقت‌ها قاعده را به توان حاصل ضرب هر دو توان می‌نویسیم.

## تمرین

1- حاصل ضرب‌های زیر را به شکل عدد توان‌دار بنویسید:

$$7^2 \times 7^3 \times 7^5 \quad , \quad 2^5 \times 3^5 \quad , \quad 3^4 \times 3^2$$

2- حاصل ضرب  $2^3 \times 3^2$  مساوی است به:

a) 81      b) 72      c)  $6^5$

3- حاصل ضرب  $3 \times 3^2 \times 3^3$  مساوی است به:

a)  $3^5$       b)  $3^6$       c) هر دو غلط اند

4- حاصل ضرب  $2^3 \times 3^3 \times 4^3$  مساوی است به:

a)  $(24)^9$       b)  $(2 \times 3 \times 4)^3$       c)  $9^3$       d)  $(24)^{27}$

5-  $(4^2)^3$  مساوی است به:

a)  $4^6$       b) 48      c) 24      d)  $4^5$

$$\frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}$$

$m < n$

برای پیدا کردن حاصل ضرب طاقت‌ها توانستیم قاعدهٔ عمومی را به دست آوریم. آیا می‌توانید برای تقسیم طاقت‌ها نیز چنین کاری را کنید؟

در مورد حاصل تقسیم  $\frac{5^4}{5^2}$  چه گفته می‌توانید؟

$$\frac{5^4}{5^2} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times 5 \times 5}{\cancel{5} \times \cancel{5}} = 5 \times 5 = 5^2$$

حاصل تقسیم طاقت‌هایی که دارای عین قاعده باشند، مساوی است به یکی از قاعده‌ها به توان عددی که از تفریق توان‌های صورت و مخرج به دست می‌آید، به شرط آن که قاعده صفر نباشد.

**مثال اول:** حاصل تقسیم  $\frac{8^7}{8^5}$  را به دست آورید.

$$\frac{8^7}{8^5} = 8^{7-5} = 8^2 = 64$$

**حل:**

### فعالیت

خانه‌های خالی زیر را پر کنید:

$$\frac{8^4}{2^4} = \frac{\square \times \square \times \square \times \square}{\square \times \square \times \square \times \square} = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^4 = \left(\frac{\square}{\square}\right)^4$$

در مورد حاصل تقسیم  $\frac{8^4}{2^4}$  چه گفته می‌توانید؟ در تقسیم طاقت‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف داشته باشند، قاعدهٔ صورت را بالای قاعدهٔ مخرج تقسیم نموده و نتیجهٔ آن را به توان یکی از توان‌های مساوی می‌نویسیم.

مثال دوم: حاصل تقسیم  $\frac{6^5}{3^5}$  را به دست آورید.

حل:

$$\frac{6^5}{3^5} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} \times \frac{6}{3} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 = 32$$

### تمرین

1- حاصل تقسیم زیر را به شکل عدد توان دار بنویسید.

$$\frac{8^6}{4^6} \quad , \quad \frac{7^4}{7^2} \quad , \quad \frac{9^6}{9^4}$$

2- ساده کنید و به شکل عدد توان دار بنویسید.

$$\frac{7^6 \times 7^4}{7^5 \times 7^2} \quad , \quad \frac{5^4 \times 5^3}{5^2 \times 5^2} \quad , \quad \frac{4^5 \times 6^3}{4^3 \times 6^2}$$

3- حاصل تقسیم زیر را دریابید.

$$\frac{5^8}{5^3} \quad \frac{8^{11}}{8^3}$$

4-  $\frac{2^4 \times 3^2}{4^2 \times 9}$  مساوی است به:

- a) 1      b) 2      c) 3      d) 4

## روش علمی عددنویسی (Scientific notation method)



فاصله زمین از آفتاب طور اوسط مساوی است  
به: 149600000 Km

فاصله زهره از آفتاب طور اوسط مساوی است  
به: 108200000 Km

و فاصله زحل از آفتاب طور اوسط مساوی است  
به: 1427000 Km

آیا روش ساده تری را برای نوشتن این عددها  
می شناسید؟

### فعالیت

- جاهای خالی زیر را پر کنید:

$$82000 = 8.2 \times \square = 8.2 \times 10^{\square}$$

$$235 = 2.35 \times \square = 2.35 \times 10^{\square}$$

$$73540 = 7.3540 \times \square = 7.3540 \times 10^{\square}$$

- آیا کار با اعداد بزرگ آسان است؟

اگر بتوانیم اعداد بزرگ را مختصر کنیم، کارهای ما چگونه آسان تر می شود؟  
یک شکل مختصر عدد نویسی را معرفی می کنیم. در این طریقه یک عدد دو قسمت شده  
که در هم ضرب می شوند، قسمت اول عدد مساوی یا بزرگ تر از یک و کوچک تر از 10  
و قسمت دوم یک طاقت با قاعده 10 می باشد. این روش مختصرنویسی را روش علمی  
عددنویسی (Scientific notation method) می نامند.

**مثال اول:** عدد 820000 را به روش علمی آن بنویسید.

**حل:**

عدد 8.2 از 10 کوچک تر و از یک بزرگ تر است، بر اساس روش علمی عددنویسی عدد  
820000 مساوی است به:  $820000 = 8.2 \times 100000 = 8.2 \times 10^5$

**مثال دوم:** اگر وزن یک طیاره 32500000 گرم باشد، این عدد را توسط روش علمی

عددنویسی بنویسید.

$$32500000 \rightarrow 3.25 \times 10^7$$

7 خانه

**حل:**

چون  $32500000 = 3.25 \times 10^7 \text{ gr}$  پس وزن این پتیاره مساوی  $3.25 \times 10^4 \text{ gr}$  می باشد.

**مثال سوم:** عدد  $243 \times 10^3$  را به طریق علمی عددنویسی بنویسید.

**حل:**

چون 243 از 10 بزرگ تر است؛ پس:

$$243 \times 10^3 = (2.43 \times 10^2) \times 10^3 = 2.43 \times 10^5$$

**مثال چهارم:** فاصله مهتاب از آفتاب 384400 Km می باشد، این فاصله را به روش علمی

$$384400 = 3.844 \times 10^5 \text{ Km}$$

عددنویسی می نویسیم که عبارت است از:

**آموختیم که:** طریقه علمی عددنویسی طوری است که یک عدد مساوی یا بزرگ تر از یک و کوچک تر از 10 را در یک طاقت که قاعده آن 10 می باشد، ضرب نموده می نویسیم.

## تمرین

1- اعداد زیر را به شکل روش علمی عددنویسی بنویسید:

$$511 \text{ ، } 510 \text{ ، } 60230 \text{ ، } 8540 \text{ ، } 435.2 \times 10^3 \text{ ، } 88.8 \times 10^{11}$$

2- عدد 88800000 به شکل روش علمی عددنویسی مساوی است به:

$$\text{a) } 8.88 \times 10^6 \quad \text{b) } 8.88 \times 10^7 \quad \text{c) } 8.88 \times 10^8$$

3- عدد  $512.3 \times 10^5$  به شکل روش علمی عددنویسی مساوی است به:

$$\text{a) } 5.123 \times 10^2 \quad \text{b) } 5.123 \times 10^7 \quad \text{c) } 5.123 \times 10^5 \quad \text{d) } 5.123 \times 10^4$$

4- عدد 810000000000 به شکل روش علمی عددنویسی مساوی است به:

$$\text{a) } 8.1 \times 10^{11} \quad \text{b) } 8.1 \times 10^{10} \quad \text{c) } 8.1 \times 10^9 \quad \text{d) } 8.1 \times 10^8$$

5- فاصله عطارد از آفتاب 57900000 Km می باشد، این فاصله را به روش علمی

عددنویسی بنویسید.

## بزرگ‌ترین قاسم مشترک یا بزرگ‌ترین فکتور مشترک Greatest common divisor (G.C.D) or Highest common factor (H.C.F)



در یک صنف 36 شاگرد درس می‌خواندند. یک روز معلم ریاضی خواست شاگردانش را برای انجام کار گروهی در گروه‌های مساوی تقسیم کند؛ بگوئید معلم گروه‌های چند نفری می‌تواند تشکیل دهد؟

**قاسم (Divisor):** اگر یک عدد طبیعی بالای عدد طبیعی دیگری پوره تقسیم شود، عدد دوم را قاسم عدد اولی می‌گویند؛ طور مثال: 24 بر 8 پوره تقسیم می‌شود، یعنی  $24 \div 8 = 3$  بوده؛ پس عدد 8 یک قاسم 24 می‌باشد.

به همین ترتیب عدد 5 یک قاسم 30 و عدد 3 یک قاسم عدد 102 می‌باشد.

**مثال اول:** ست قاسم‌های عدد 12 عبارت است از:  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  = ست قاسم‌های 12

**مثال دوم:** ست قاسم‌های 16 و 40 را دریابید.

$\{1, 2, 4, 8, 16\}$

$\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

**حل:** ست قاسم‌های 16 عبارت است از:

و ست قاسم‌های 40 عبارت است از:

### فعالیت

- ست قاسم‌های 6 را دریابید.
- ست قاسم‌های 24 را دریابید
- کدام اعداد هم قاسم‌های 6 و هم قاسم‌های 24 استند؟
- ست قاسم‌های مشترک را با تقاطع ست‌ها نشان دهید.

**قاسم مشترک (Common divisor):** اگر دو یا چندین عدد، بالای یک عدد، پوره قابل تقسیم باشند، این عدد را قاسم مشترک اعداد متذکره می‌گویند.

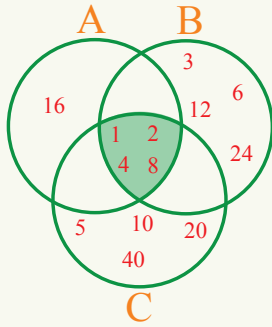
**مثال سوم:** ست قاسم‌های مشترک اعداد 16، 24 و 40 را دریابید.

$A = 16$  ست قاسم‌های  $\{1, 2, 4, 8, 16\}$

$B = 24$  ست قاسم‌های  $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

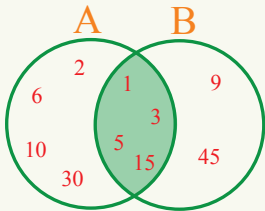
$C = 40$  ست قاسم‌های  $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

$$\begin{aligned} & \{1,2,4,8,16\} \cap \{1,2,3,4,6,8,12,24\} \cap \{1,2,4,5,8,10,20,40\} \\ & = \{1,2,4,8\} \end{aligned}$$



ست قاسم‌های مشترک 16، 24 و 40 عبارت از  $\{1,2,4,8\}$  بوده که تقاطع سه ست A، B و C می‌باشند که در شکل نیز نشان داده شده است. بدین معنی که هر سه عدد بر اعداد 8، 4، 2 و 1 پوره قابل تقسیم استند. دیده می‌شود که از جمله قاسم‌های مشترک، عدد 8 از همه قاسم‌های مشترک بزرگ‌تر بوده، بنابراین عدد 8 بزرگ‌ترین قاسم مشترک 16، 24 و 40 می‌باشد.

**مثال چهارم:** بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 45 و 30 را دریابید.  
**حل:** در شکل تقاطع دو ست A و B عبارت از قاسم‌های مشترک اعداد 30 و 45 می‌باشد.



$$A = \{1,2,3,5,6,10,15,30\} \text{ ست قاسم‌های } 30$$

$$B = \{1,3,5,9,15,45\} \text{ ست قاسم‌های } 45$$

$$\begin{aligned} & \{1,2,3,5,6,10,15,30\} \cap \{1,3,5,9,15,45\} \\ & = \{1,3,5,15\} \end{aligned}$$

چون عدد 15 از همه قاسم‌های مشترک 45 و 30 بزرگ‌تر است، بنابراین 15 بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 45 و 30 می‌باشد.

**آموختیم که:** بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چند عدد باید:

- 1- قاسم مشترک این اعداد باشد. 2- از همه قاسم‌های مشترک بزرگ‌تر باشد.
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چند عدد عبارت از بزرگ‌ترین عددیست که اعداد داده شده بر آن پوره قابل تقسیم باشند.

## تمرین

- 1- آیا 5 یک قاسم 35 است؟ چرا؟
- 2- آیا 4 یک قاسم 38 است؟ چرا؟
- 3- قاسم‌های مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک این اعداد را دریابید.  
a) 24,32      b) 25,40      c) 50,52      d) 7,16
- 4- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد اولیه چند است؟

## دریافت بزرگ‌ترین قاسم مشترک توسط تجزیه



طول یک اتاق 910 سانتی‌متر، عرض آن 780 سانتی‌متر و ارتفاع آن 390 سانتی‌متر است. طویل‌ترین طول فیتۀ متری را دریابید تا ابعاد این اتاق توسط آن پوره اندازه شود.

### فعالیت

- قاسم‌های 36 و 24 را بنویسید. بزرگ‌ترین قاسم مشترک 16 و 36 را به دست آورید.
- اعداد 36 و 24 را به صورت ضرب اجزای ضربی اولیه بنویسید.
- کدام اجزای ضربی اولیه بین 36 و 24 مشترک است؟
- چه رابطه‌یی بین بزرگ‌ترین قاسم مشترک و اجزای ضربی اولیه مشترک می‌توانید پیدا کنید؟

از فعالیت فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای پیدا کردن بزرگ‌ترین قاسم مشترک توسط تجزیه مراحل زیر را باید انجام داد:

1- اعداد داده شده را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده و آن‌ها را به شکل طاقت بنویسید.

2- اجزای ضربی مشترک را که کوچک‌ترین توان را داشته باشند در هم ضرب کنید. حاصل ضرب اجزای انتخاب شده عبارت از بزرگ‌ترین قاسم مشترک می‌باشد.  
مثال: بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 208 و 390 را دریابید.

حل:

2	390
3	195
5	65
13	13
	1

$$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13$$

2	208
2	104
2	52
2	26
13	13
	1

$$208 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13 = 2^4 \times 13$$

بنابراین بزرگ‌ترین قاسم مشترک 390 و 208 عبارت از  $26 = 13 \times 2$  می‌باشد.  
و یا در جدول زیر بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد فوق را می‌توانیم چنین دریافت کنیم:

2	208	390
13	104	195
	8	15

بزرگ‌ترین قاسم مشترک عبارت از  $26 = 13 \times 2$  است.

## فعالیت

بزرگ‌ترین عددی را دریافت نمایید که اعداد 160، 208 و 324 بالای آن پوره قابل تقسیم باشند.

**آموختیم که:** برای تعیین بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چند عدد توسط تجزیه، ابتدا هر یک از این اعداد را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده و به شکل طاقت می‌نویسیم؛ سپس اجزای ضربی مشترک اعداد را با کوچک‌ترین توان با هم ضرب می‌کنیم، که حاصل ضرب عبارت از بزرگ‌ترین قاسم مشترک این اعداد می‌باشد.

## تمرین

- بزرگ‌ترین قاسم مشترک  $2^5 \times 3^2$  و  $2^3 \times 3 \times 7$  عبارت است از:
  - $2^5 \times 3^2 \times 7$
  - $2^3 \times 3$
  - $2^5 \times 3^2$
  - $2 \times 3$
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 45 و 56 مساوی است به:
  - 4
  - 6
  - هیچ‌کدام
  - هیچ‌کدام
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد زیر را دریابید.
  - 48, 78
  - 13, 15
  - 16, 17, 48
  - 18, 25, 35
- توسط عمل تجزیه، اول اجزای ضربی اولیه و سپس بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد داده شده زیر را دریابید.
  - 40, 16
  - 18, 42
  - 27, 84
  - 36, 60
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 12 و 24 مساوی است به:
  - 1
  - 2
  - 3
  - 12

## کوچک‌ترین مضرب مشترک (L.C.M) Least common multiple



محیط حلقه تایر کوچک تراکتور 360 سانتی متر و محیط حلقه تایر بزرگ آن 600 سانتی متر است. تراکتور حد اقل چقدر فاصله را باید طی کند تا نقاط مشخص شده روی تایرها همزمان مجدداً با هم به زمین برسند؟

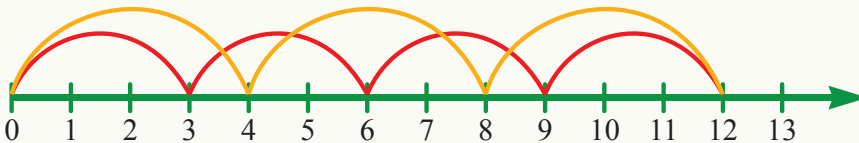
### فعالیت

عدد 4 را در نظر بگیرید. این عدد را به ترتیب در 1, 2, 3, 4, 5, 6 ضرب کنید. خصوصیت مشترک تمام این اعداد چیست؟ آیا اعداد دیگری را می‌توانید پیدا کنید که این خصوصیت را داشته باشند؟

در فعالیت فوق دیدیم که اعداد به دست آمده بر عدد 4 پوره تقسیم می‌شوند. این اعداد را به نام مضرب‌های عدد 4 یاد می‌کنند.  $\{4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$  = ست مضرب‌های عدد 4

### فعالیت

• در جدول زیر مضرب‌های اعداد 3 و 4 را دریابید و خانه‌های جدول را پر کنید.



×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
3	3	6	9										...
4	4	8											...

- در مضرب‌های 3 و 4 کدام اعداد مشترک اند؟
- در مضرب‌های مشترک کوچک‌ترین مضرب مشترک 3 و 4 کدام عدد است؟

آیا تعداد مضرب‌های یک عدد طبیعی پایان دارند؟

**مثال:** کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 6، 8 و 12 را دریابید.

**حل:**  $A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\}$  = ست مضرب‌های عدد 6

$B = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, \dots\}$  = ست مضرب‌های عدد 8

$C = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$  = ست مضرب‌های عدد 12

$$(A \cap B) \cap C = \{24, 48, \dots\}$$

ست مضرب‌های مشترک 6، 8 و 12 عبارت از  $\{24, 48, \dots\}$  می‌باشد. کوچک‌ترین عنصر این ست 24 است؛ بنابراین کوچک‌ترین مضرب مشترک 6، 8 و 12 عبارت از 24 می‌باشد. می‌توانیم کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 6، 8 و 12 را در یک جدول به طور خلاصه به شکل زیر دریابیم:

2	6	8	12
2	3	4	6
3	3	2	3
	1	2	1

کوچک‌ترین مضرب مشترک این اعداد عبارت از  $24 = 2 \times 2 \times 3 \times 2$  می‌باشد.

**آموختیم که:** در مضرب‌های مشترک دو یا چند عدد، کوچک‌ترین عدد، کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد داده شده می‌باشد.

## تمرین

- 1- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 18، 20 و 36 را دریابید.
- 2- کوچک‌ترین عدد چهار رقمی را دریافت نمایید که بالای 10، 17 و 85 پوره تقسیم گردد.
- 3- کوچک‌ترین مضرب مشترک 6 و 9 مساوی است به: a) 18 b) 54
- 4- کدام عدد مضرب 9 است؟ a) 3 b) 27
- 5- اگر  $187 = 11 \times 17$  باشد، کدام یک از بیانات زیر درست است؟  
a) 187 مضرب 17 است. b) 187 قاسم 17 است.
- 6- کدام یک از این اعداد مضرب مشترک 6 و 9 است؟ a) 69 b) 72
- 7- کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 9، 15 و 4 را دریابید.

یافتن کوچک‌ترین مضرب مشترک توسط تجزیه به اعداد اولیه

$$\frac{7}{18} + \frac{3}{20}$$

در  $\frac{7}{18} + \frac{3}{20}$  کدام عدد را می‌توان به عنوان  
مخرج مشترک تعیین کرد تا ساده‌تر به جواب  
رسید؟

## فعالیت

- اعداد 18 و 20 را به صورت ضرب اجزای ضربی اولیه بنویسید.
- ست مضرب‌های 18 و 20 را بنویسید.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک 18 و 20 را پیدا نموده و آن را به صورت اجزای ضربی اولیه بنویسید.

از اجرای فعالیت فوق دانستیم که برای پیدا کردن کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چند عدد از طریق تجزیه اجزای ضربی اولیه مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

1- اعداد داده شده را به اجزای ضربی اولیه، تجزیه نموده و به شکل طاقت می‌نویسیم.

2- آن عده اجزای ضربی مشترک را که بلندترین توان را دارا باشند با اجزای غیر مشترک ضرب می‌نماییم. این حاصل ضرب عبارت از کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد داده شده می‌باشد.

**مثال:** کوچک‌ترین مضرب مشترک 12 و 15 را توسط تجزیه به اعداد اولیه دریابید.

2	12
2	6
3	3
	1

3	15
5	5
	1

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

$$15 = 3 \times 5$$

**حل:**

کوچک‌ترین مضرب مشترک 12 و 15 عبارت از:  $2^2 \times 3 \times 5 = 60$  می‌باشد.

می‌توانیم کوچکترین مضرب مشترک اعداد 12 و 15 را در یک جدول نیز دریابیم.

3	12	15
	4	5

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$

## فعالیت

کوچکترین مضرب مشترک اعداد 108، 135 و 162 را توسط جدول دریابید.

**آموختیم که:** برای تعیین کوچکترین مضرب مشترک دو یا چند عدد توسط تجزیه، ابتدا هر یک از اعداد را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نموده و به شکل طاقت می‌نویسیم؛ سپس همه اجزای ضربی اولیه مشترک و غیر مشترک دو یا چند عدد را به بزرگترین توان ضرب می‌کنیم، که حاصل ضرب عبارت از کوچکترین مضرب مشترک این اعداد می‌باشد.

## تمرین

- 1- کوچکترین مضرب مشترک اعداد 14 و 21 را توسط تجزیه دریابید.
- 2- کوچکترین مضرب مشترک اعداد 9، 12، 15 و 36 را توسط تجزیه دریابید.
- 3- کوچکترین عددی را دریابید که بر 64، 72، 96 و 192 قابل تقسیم باشد.
- 4- کوچکترین مضرب مشترک 90، 56 و 35 عبارت است از:
  - a)  $2 \times 3^2 \times 5$
  - b)  $2^3 \times 5 \times 3^2 \times 7$
- 5- کوچکترین مضرب مشترک اعداد  $2^6$ ،  $2^2 \times 3$ ،  $2^2 \times 5$ ،  $2^2 \times 3^2$ ،  $3^2 \times 5$  و  $2^4 \times 5$  مساوی است به:
  - a) 2800
  - b) 2880
  - c) 1880
- 6- کوچکترین مضرب مشترک اعداد 30، 18، 15 و 54 مساوی است به:
  - a) 370
  - b) 270
  - c) 170
- 7- کوچکترین عددی را دریابید که بر اعداد 25، 15 و 30 پوره قابل تقسیم باشد.
- 8- کوچکترین عددی را دریابید که بر اعداد 12، 18، 40 و 50 پوره قابل تقسیم باشد.

## موارد استعمال کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک در حل مسائل روزمره زنده‌گی



صفت الله بعد از هر 4 روز و عزت الله بعد از هر 6 روز غرض خریداری اجناس مورد ضرورت به مغازه شهر می‌روند. اگر آن‌ها به تاریخ 31 ماه سرطان در مغازه شهر با هم ببینند، به کدام تاریخ ماه اسد بار دوم در مغازه شهر یکدیگر را خواهند دید؟

### فعالیت

- شکل ساده  $\frac{36}{48}$  را بنویسید. (اختصار نمایید)
- اعداد 36 و 48 را به اجزای ضربی اولیه تجزیه کنید.
- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 36 و 48 را پیدا کنید.
- عامل‌های ضربی اعداد 36 و 48 را طوری بنویسید که بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد یکی از عامل‌های ضربی اعداد مذکور باشد.
- آیا می‌توانید برای ساده کردن کسرها توسط بزرگ‌ترین قاسم مشترک، روشی را پیشنهاد نمایید؟

**مثال اول:** کسر  $\frac{30}{45}$  را با استفاده از دریافت بزرگ‌ترین قاسم مشترک اختصار نمایید.

**حل:** بزرگ‌ترین قاسم مشترک صورت (Numerator) و مخرج (Denominator)

را دریافت می‌کنیم:

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$$

$$45 \text{ و } 30 \text{ مشترک} = 3 \times 5 = 15$$

صورت و مخرج را بر عدد 15 تقسیم نموده، داریم:

$$\frac{30}{45} = \frac{30 \div 15}{45 \div 15} = \frac{2}{3}$$

**مثال دوم:** اگر زنگ اول هر 10 دقیقه بعد، زنگ دوم هر 15 دقیقه بعد، زنگ سوم هر 25

دقیقه بعد و زنگ چهارم هر 30 دقیقه بعد به صدا درآید، در صورتی که هر چهار زنگ به

ساعت ده بجه، روز هم زمان شروع به زنگ زدن نمایند، معلوم نمایید که بعد از چه مدتی

آن‌ها دوباره هم‌زمان به زنگ زدن شروع می‌کند؟

حل:

$$10 = 5 \times 2$$

$$15 = 5 \times 3$$

$$25 = 5 \times 5$$

$$30 = 5 \times 3 \times 2$$

پس: کوچکترین مضرب مشترک اعداد 10, 15, 25 و 30 عبارت است از:  $2 \times 3 \times 5 \times 5 = 150$  و یا

2	10	15	25	30
3	5	15	25	15
5	5	5	25	5
	1	1	5	1

$$2 \times 3 \times 5 \times 5 = 150$$

در نتیجه 150 دقیقه (2 ساعت و 30 دقیقه) بعد هر چهار زنگ بار دوم همزمان به صدا در می آیند.

همچنین جواب سؤال ورودی را که دریافت کوچکترین مضرب مشترک اعداد 4 و 6 است به دست می آوریم.

یعنی (صفت الله و عزت الله) 12

روز بعد به تاریخ دوازدهم ماه

اسد یکدیگر را بار دوم در مغازه

شهر ملاقات خواهند کرد.

2	4	6
	2	3

$$2 \times 2 \times 3 = 12$$

## تمرین

1- کسرهایی زیر را با استفاده از بزرگترین قاسم مشترک صورت و مخرج اختصار نمایید.

$$\frac{623}{801}, \frac{243}{1458}, \frac{253}{275}, \frac{1084}{1355}, \frac{144}{360}, \frac{36}{80}, \frac{225}{300}$$

2- شاروالی در کنار سرک در هر 4 متر یک درخت را غرس نموده و اداره برق در هر 22 متر یک پایه برق را نصب کرده است؛ اگر در شروع سرک پایه برق در کنار درخت قرار گرفته باشد، بعد از چند متر دوباره یک درخت در کنار پایه برق قرار می گیرد؟

3- نوریه هر سه روز بعد و ملالی هر پنج روز بعد به کتابخانه می روند؛ اگر هر دوی آنها به تاریخ 10 ثور به کتابخانه رفته باشند در کدام تاریخ ماه ثور آنها بار دوم در کتابخانه یک جا خواهند شد؟

## رابطه بین کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد

$G =$  بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد  $a$  و  $b$

$L =$  بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد  $a$  و  $b$

$$L = \frac{a \times b}{G}$$

اگر بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد را داشته باشیم، می‌توانیم کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را بدون تجزیه، با نوشتن ست مضرب‌های شان به دست آوریم.

### فعالیت

- بزرگ‌ترین قاسم مشترک 25 و 15 را دریابید و آن را  $G$  بنامید.
- کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد را دریابید و آن را  $L$  بنامید.
- حاصل ضرب دو عدد 25 و 15 را به دست آورده و آن را با  $L \times G$  مقایسه کنید؛ آیا در بین این دو حاصل ضرب رابطه‌ی وجود دارد؟

اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد  $a$  و  $b$  را به  $L$  و بزرگ‌ترین قاسم مشترک این دو عدد را به  $G$  نشان دهیم، در این صورت: رابطه بین بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک عبارت است از:  $L \times G = a \times b$

$$L = \frac{a \times b}{G} \quad G = \frac{a \times b}{L} \quad a = \frac{L \times G}{b} \quad b = \frac{L \times G}{a}$$

### مثال اول

ارتباط بین کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک دو عدد را در جدول زیر نیز مشاهده کرده می‌توانیم:

عدد اول	عدد دوم	حاصل ضرب اعداد	بزرگترین قاسم مشترک	کوچکترین مضرب مشترک	حاصل ضرب کوچکترین مضرب مشترک و بزرگترین قاسم مشترک
3	7	21	1	21	21
4	6	24	2	12	24
5	10	50	5	10	50
15	25	375	5	75	375
18	27	486	9	54	486

**مثال دوم:** بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 225 و 300 عبارت از 75 می‌باشد، کوچک‌ترین مضرب مشترک 225 و 300 را دریابید.

**حل:**

$$a = 225$$

$$b = 300$$

$$G = 75$$

$$L = ?$$

$$L = \frac{a \times b}{G} = \frac{225 \times 300}{75} = \frac{67500}{75} = 900$$

**مثال سوم:** کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد 900 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 75 است؛ اگر یک عدد 300 باشد، عدد دیگر را دریابید.

**حل:**

$$b = 300$$

$$L = 900$$

$$G = 75$$

$$a = ?$$

$$a = \frac{L \times G}{b} = \frac{900 \times 75}{300} = 225$$

## تمرین

- 1- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد، 29 و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها 174 می‌باشد. اگر یک عدد 87 باشد، عددی دیگری را دریابید.
- 2- اگر حاصل ضرب دو عدد، 45000 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 150 باشد، کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها را دریابید.
3. اگر کوچک‌ترین مضرب مشترک 45 و 35 عدد 315 باشد، بزرگ‌ترین قاسم مشترک 45 و 35 را دریابید.
- 4- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، 900 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 75 است؛ اگر یک عدد 225 باشد عدد دیگری را دریابید.
- 5- بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد 10 و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها 60 است؛ اگر یک عدد 30 باشد، عدد دیگری را دریابید.
- 6- حاصل ضرب بزرگ‌ترین قاسم مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد 486 است، حاصل ضرب این دو عدد مساوی است به:

a) 982

b) 486

c) 243

## دریافت همزمان کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد

آیا می‌توانید همزمان بزرگ‌ترین قاسم مشترک و  
کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد 81 و 72, 45  
را در یک جدول دریافت نمایید؟

# 81, 72, 45

بعد از تجزیه این اعداد داریم که:

$$72 = 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3^2 \times 2^3$$

$$45 = 5 \times 3 \times 3 = 5 \times 3^2$$

$$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

در نتیجه کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد داده شده عبارت است از:  $2^3 \times 3^4 \times 5 = 3240$   
و بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد داده شده  $3^2 = 9$  می‌باشد و یا به طریق زیر در یک  
جدول نیز می‌توان دریافت کرد.

بزرگ‌ترین قاسم مشترک این اعداد عبارت است از  $3 \times 3 = 9$  و کوچکترین مضرب مشترک این  
اعداد عبارت است از:  $(3 \times 3) \times (9 \times 5 \times 8) = 3240$

	3	81	45	72
×	3	27	15	24
		9	5	8

**مثال:** کوچک‌ترین مضرب مشترک و بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد 225 و 100 را  
دریابید.

	5	225	100
×	5	45	20
		9	4

**حل:**

در نتیجه بزرگ‌ترین قاسم مشترک این دو عدد مساوی به  $5 \times 5 = 25$ ، و کوچک‌ترین  
مضرب مشترک آنها مساوی است به:  $5 \times 5 \times 9 \times 4 = 900$

## مقایسه کوچک ترین مضرب مشترک و بزرگ ترین قاسم مشترک

کوچک ترین مضرب مشترک	بزرگ ترین قاسم مشترک
همیشه بزرگ تر یا مساوی به یکی از اعداد داده شده می باشد.	همیشه کوچک تر و یا مساوی به یکی از اعداد داده شده می باشد.
کوچک ترین مضرب مشترک دو یا چندین عدد اولیه و یا دو عددی که قاسم مشترک نداشته باشند عبارت از حاصل ضرب اعداد می باشد.	بزرگ ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد اولیه و یا دو عددی که قاسم مشترک نداشته باشند همیشه یک است.
کوچک ترین مضرب مشترک دو یا چندین عدد بالایی اعداد داده شده پوره قابل تقسیم می باشد.	بزرگ ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد، اعداد داده شده را بالای خود پوره تقسیم می نماید.

### فعالیت

کوچک ترین مضرب مشترک و بزرگ ترین قاسم مشترک اعداد 27 و 9 را دریابید.

**آموختیم که:** غرض دریافت همزمان بزرگ ترین قاسم مشترک و کوچک ترین مضرب مشترک، اعداد داده شده را بر اعداد اولیه تقسیم می نماییم، حاصل ضرب اعداد اولیه ستون طرف چپ عبارت از بزرگ ترین قاسم مشترک اعداد داده شده می باشد و اگر این حاصل ضرب را با اعداد سطر آخری ضرب نماییم؛ حاصل ضرب، کوچک ترین مضرب مشترک اعداد داده شده می باشد.

### تمرین

بزرگ ترین قاسم مشترک و کوچک ترین مضرب مشترک اعداد زیر را در یک جدول دریابید:

1- بزرگ ترین قاسم مشترک و کوچک ترین مضرب مشترک اعداد 12 ، 20 و 36 را دریابید.

2- کوچکترین مضرب مشترک و بزرگ ترین قاسم مشترک اعداد 30 و 140 را دریابید.

3- کوچک ترین مضرب مشترک و بزرگ ترین قاسم مشترک اعداد 20 ، 16 و 44 را دریابید.

4- بزرگ ترین قاسم مشترک و کوچک ترین مضرب مشترک اعداد 81 و 27 را دریابید.

## مربع و جذر مربع تام یک عدد طبیعی



اگر مساحت یک زمین مربعی 144 متر مربع باشد، طول یک ضلع این زمین را دریابید.

می دانیم که اگر یک عدد در خودش ضرب شود حاصل ضرب عبارت از مربع این عدد است.

### فعالیت

جدول مقابل را تکمیل کنید.

عدد	2	6	11	15	20
مربع عدد	4				

در نتیجه؛ اگر هر یک از اعداد 2، 6، 11، 15 و 20 دو مرتبه در خود شان ضرب شوند، به ترتیب اعداد 4، 36، 121، 225 و 400 حاصل می شوند. مشاهده می شود که هر عدد دارای دو جزء ضربی است که با هم مساوی می باشند.  
 $36 = 6 \times 6 = 6^2$  چون 36 توان دوم 6، است می گوئیم که 6 جذر دوم 36 است، و آن را به این شکل نشان می دهیم  $\sqrt{36} = 6$  که عدد 36 مجذور 6 می باشد.

به یاد داشته باشید که: به جای  $\sqrt[3]{36}$  می توان  $\sqrt{36}$  را نوشت.  
 یکی از دو جزء ضربی مساوی یک عدد، عبارت از جذر دوم و یا جذر مربع عدد می باشد.

### فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:

7	9	5	10			25	16	81	49	64	4
مجذور	مجذور	مجذور	مجذور	مجذور	مجذور	جذر	جذر	جذر	جذر	جذر	جذر
				64	36						

**یادداشت:** جذر دوم عدد یک، خود یک است.

**آموختیم که:** یکی از دو جزء ضربی مساوی یک عدد، جذر دوم عدد است؛ اما مجذور هر عدد توان دوم آن عدد می‌باشد.

### تمرین

- 1- جذر دوم اعداد زیر را دریابید:  
 $\sqrt{64} = ?$  ,  $\sqrt{256} = ?$  ,  $\sqrt{144} = ?$  ,  $\sqrt{121} = ?$
- 2- هرگاه مساحت یک مربع 49 سانتی متر مربع باشد، طول هر ضلع این مربع چند سانتی متر است؟
- 3- کدام یک از اعداد زیر مجذور کامل است؟  
a)  $2^4 \times 7^2$                       b)  $3^4 \times 7^3$
- 4- جذر مربع عدد 225 مساوی است به:  
a) 16                                  b) 15
- 5- مجذور اعداد زیر را دریابید:  
a) 9                                  b) 13                                  c) 15                                  d) 21

## دریافت جذر مربع تام یک عدد طبیعی

به روش تجزیه، جذر مربع  $2^4 \times 5^2$  چند می‌شود؟

$$\sqrt{2^4 \times 5^2} = ?$$

### فعالیت

- هر یک از اعداد 36، 144 و 64 را تجزیه کنید.
- جذر مربع هر یک از اعداد فوق را به دست آورید و به شکل ضرب اجزای ضربی اولیه بنویسید.
- در تجزیه از هر دو جزء ضربی مساوی، یکی را انتخاب کرده و آن‌ها را به صورت ضرب قرار دهید.

**مثال:** جذر مربع اعداد 400 و 3969 را توسط تجزیه دریابید.

**حل:**

3	3969
3	1323
3	441
3	147
7	49
7	7
	1

2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$\sqrt{400} = \sqrt{2^4 \times 5^2} = 2^2 \times 5 = 4 \times 5 = 20$$

پس:

$$\sqrt{3969} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7} = \sqrt{3^4 \times 7^2} = 3^2 \times 7 = 3 \times 3 \times 7 = 63$$

$$\sqrt{3969} = \sqrt{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7} = \sqrt{3^4 \times 7^2} = 3^2 \times 7 = 9 \times 7 = 63 \quad \text{یا}$$

## فعالیت

- جذر مربع اعداد 441 ، 81 ، 625 ، 225 و 1225 را توسط تجزیه دریابید.
- کدام یک از اعداد زیر مجذور کامل است؟

a) 144                      b) 180

**آموختیم که:** در نتیجه تجزیه از هر دو جزء ضربی مساوی، یکی را انتخاب و آن‌ها را باهم ضرب می‌کنیم، حاصل ضرب، جذر دوم یا جذر مربع عدد می‌باشد؛ پس از تجزیه اگر توان‌های اجزای ضربی یک عدد جفت باشد، عدد مجذور کامل است. به بیان دیگر، برای پیدا کردن جذر مربع یک عدد کافی است توان هر یک از اجزای اولیه ضربی را نصف نموده؛ سپس آن‌ها را در هم ضرب کنیم.

## تمرین

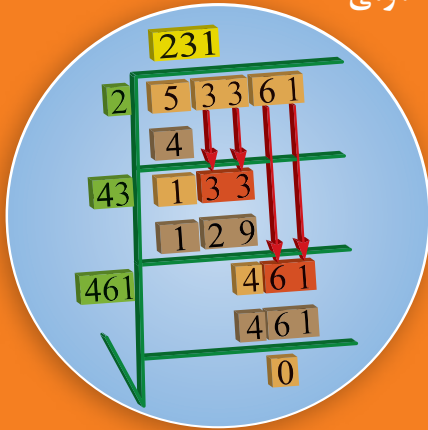
1- جذر مربع اعداد زیر را به روش تجزیه پیدا کنید.

1024 ، 2025 ، 3136

2- چون  $\sqrt{81} = 9$  است، جذر عدد  $\sqrt{810000}$  مساوی به چند است؟

a) 90                                      b) 900                                      c) 9

## یافتن جذر مربع یک عدد توسط طریقه عمومی



دریافت جذر مربع اعداد بزرگ تر توسط تجزیه وقت زیادی را در بر می گیرد؛ اما جذر مربع این اعداد را می توانیم توسط روش عمومی آسان تر به دست آوریم.

**مثال اول:** جذر مربع عدد 53361 را به طریق عمومی به صورت زیر به دست می آوریم.

**قدم 1:** عدد داده شده را زیر علامت جذر مانند مقابل قرار می دهیم.

**قدم 2:** از عدد زیر جذر دو، دو رقم از راست به طرف چپ جدا نموده که بالآخره عدد آخری یک رقمی یا دو رقمی باقی می ماند، که در این مثال عدد آخری، عدد 5 است.

**قدم 3:** حال عددی را دریافت می نماییم که با ضرب آن در نفس خودش مساوی به 5 و یا کمتر از آن باشد. در این مثال همچو عدد مطلوب عبارت از 2 می باشد، بنابراین عدد 2 را در دو جای، یک بار بالای خط افقی جذر و یک بار کنار عدد 5 طرف چپ خط عمودی می نویسیم.

**قدم 4:** عدد 2 را در 2 ضرب نموده، حاصل را زیر عدد 5 نوشته از 5 تفریق می نماییم که در این صورت باقی مانده 1 می باشد.

**قدم 5:** حال دو رقم دیگر، یعنی 33 را پهلوی 1 نوشته عدد 133 حاصل می گردد.

عدد 2 را که در بالای خط افقی قرار دارد، دو چند نموده در مقابل عدد 133 به طرف چپ خط عمودی که در موقعیت رقم دهاً قرار می گیرد می نویسیم.

**قدم 6:** برای پیدا نمودن رقم یک ها این عدد، از عدد 133 یک ها را موقتاً نادیده گرفته و باقی مانده (عدد 13) را بالای 4 تقسیم نموده، 3 حاصل می گردد. عدد حاصله 3 را پهلوی 4 در رقم یک ها و همچنان به طرف راست 2 بالای خط افقی (طرف راست عدد 2) نوشته، طوری

$$\begin{array}{r}
 231 \\
 2 \overline{) 53361} \\
 \underline{4} \phantom{00} \\
 133 \phantom{0} \\
 \underline{12} \phantom{00} \\
 129 \phantom{0} \\
 \underline{12} \phantom{00} \\
 961 \\
 \underline{961} \\
 0
 \end{array}$$

عمل می‌نماییم که با ضرب 3 در عدد به دست آمده دو رقمی 43 نتیجه حاصله مساوی یا کمتر از عدد 133 گردد.

در این حالت مطلوب از حاصل ضرب 3 در 43 بوده و حاصل ضرب 129 را از 133 تفریق می‌نماییم که عدد 4 باقی می‌ماند.

**قدم 7:** حال دو رقم دیگر، یعنی 61 را پایین نموده به طرف راست عدد 4 می‌نویسیم که 461 می‌شود؛ عدد 23 را که بالای خط افقی قرار دارد دو چند نموده که 46 می‌شود و مانند قدم بالا به طرف چپ خط عمودی می‌نویسیم. با نادیده گرفتن عدد 1 می‌بینیم که 46 تقسیم

46 مساوی به 1 است، آن را بالای خط افقی و به طرف راست رقم 3 نوشته و مانند بالا عمل می‌نماییم؛ یعنی با ضرب 1 در 461 عدد 461 به دست می‌آید که حاصل تفریق شان مساوی به صفر می‌باشد؛ بدین ترتیب، جذر دوم عدد 53361 که 231 می‌باشد به دست می‌آید؛ یعنی  $\sqrt{53361} = 231$  می‌باشد.

**مثال دوم:** جذر مربع اعداد 3364 ، 1024 و 4761 را توسط روش عمومی دریابید.

$$\begin{array}{r}
 58 \\
 5 \overline{) 3364} \\
 \underline{25} \phantom{00} \\
 108 \phantom{0} \\
 \underline{108} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

$$\sqrt{3364} = 58$$

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 3 \overline{) 1024} \\
 \underline{9} \phantom{00} \\
 62 \phantom{0} \\
 \underline{62} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

$$\sqrt{1024} = 32$$

$$\begin{array}{r}
 69 \\
 6 \overline{) 4761} \\
 \underline{36} \phantom{00} \\
 129 \phantom{0} \\
 \underline{129} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}$$

$$\sqrt{4761} = 69$$

**حل:**

در نتیجه:

## فعالیت

جذر مربع اعداد طبیعی 784، 3600 و 1444 را به طریقه عمومی دریابید.

**مثال سوم:** هرگاه مساحت یک زمین مربعی 441 متر مربع باشد، طول یک ضلع این زمین را دریابید.

**حل:** با استفاده از هندسه می‌دانیم که مساحت مربع = ضلع × ضلع می‌باشد. یک ضلع این زمین مربع شکل 21 متر می‌باشد.

$$\begin{array}{r}
 21 \\
 2 \overline{) 441} \\
 \underline{4} \phantom{00} \\
 41 \phantom{0} \\
 \underline{41} \phantom{0} \\
 0
 \end{array}
 \Rightarrow \sqrt{441} = 21$$

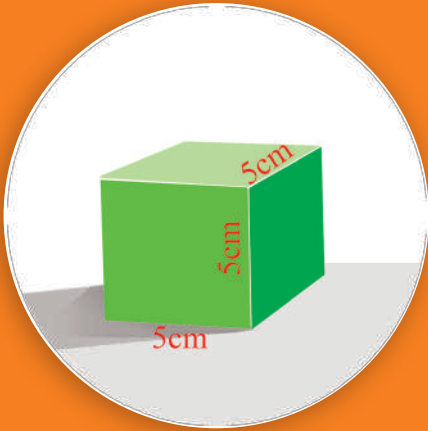
## تمرین

1- جذرهای دوم اعداد زیر را اول به طریقه تجزیه؛ سپس به روش عمومی دریابید، و بگویید

که کدام روش را ترجیح می‌دهید؟

225 ، 324 ، 2025 ، 729 ، 5184 ، 121

## جذر سوم (مکعب) یک عدد طبیعی



حجم یک مکعب  $125\text{cm}^3$  است؛ ابعاد آن چند است؟

چنانچه جذر مربع یک عدد طبیعی، یکی از دو جزء ضربی مساوی عدد می باشد؛ بدین اساس جذر مکعب یا جذر سوم یک عدد طبیعی را این طور تعریف می کنیم:

**تعریف:** یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد را جذر سوم عدد می گویند.

علامت  $\sqrt[3]{\quad}$  جذر سوم یک عدد را نشان می دهد.

**مثال اول:** جذرهای سوم این اعداد را دریابید:  
حل:

$$\sqrt[3]{27}, \quad \sqrt[3]{8}, \quad \sqrt[3]{64}$$

$$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

$$64 = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 \Rightarrow \sqrt[3]{64} = 4$$

### دریافت جذر سوم تام اعداد طبیعی توسط تجزیه:

عدد را به اجزای مساوی اولیه ضربی تجزیه نموده و از هر سه جزء مساوی یک جزء را انتخاب و با هم ضرب می کنیم؛ در نتیجه حاصل ضرب عبارت از جذر سوم عدد می باشد.

**مثال دوم:** جذرهای سوم اعداد طبیعی 125، 8 و 27000 را توسط تجزیه دریابید.

حل:

2	8
2	4
2	2
	1

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

5	125
5	25
5	5
	1

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

2	27000
2	13500
2	6750
3	3375
3	1125
3	375
5	125
5	25
5	5
	1

$$\sqrt[3]{27000} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

## فعالیت

جذر سوم اعداد 1331 و 8000 را توسط تجزیه دریابید.

یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد را جذر سوم عدد می گویند.

## تمرین

1- جذرهای مکعب تام اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه دریابید:

$$\sqrt[3]{729} \quad , \quad \sqrt[3]{216} \quad , \quad \sqrt[3]{125000}$$

2- جذرهای مکعب تام اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه دریابید:

$$\sqrt[3]{5832} \quad , \quad \sqrt[3]{1331} \quad , \quad \sqrt[3]{2744}$$

3- جذر سوم (جذر مکعب) عدد 729000 مساوی است به:

a) 100                      b) 150                      c) 90

4- جذر سوم عدد  $2^6 \times 3^3 \times 4^3$  مساوی است به:

a) 48                      b) 24                      c) 12

5- جذر سوم عدد  $10^2 \times 10^2 \times 10^2$  مساوی است به:

a) 10                      b) 100                      c) 1000                      d)  $10^3$

6- جذر سوم عدد 343 مساوی است به:

a) 8                      b) 7

7- جذر سوم عدد 1728 مساوی است به:

a) 12                      b) 11

8- جذر سوم عدد 512 مساوی است به:

a) 7                      b) 8

## خلاصه فصل دوم

- خاصیت‌های اتحادی و تبدیلی در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد طبیعی صدق می‌کنند، صفر در عملیه جمع اعداد طبیعی و یک در عملیه ضرب اعداد طبیعی عنصر عینیت می‌باشد.
- اعدادی که رقم یک‌ها آن‌ها صفر باشد، بر 2,5 و 10 پوره قابل تقسیم اند.
- اعدادی که رقم یک‌ها آن صفر یا جفت باشد، بر 2 پوره قابل تقسیم اند.
- اعدادی که رقم یک‌ها آن صفر یا 5 باشد، بر 5 پوره قابل تقسیم اند.
- اعدادی که مجموع ارقام آن بر 3 پوره قابل تقسیم باشد بر 3 پوره تقسیم می‌شوند.
- اعدادی که بر 2 و 3 پوره قابل تقسیم استند، بر 6 نیز پوره قابل تقسیم می‌باشند.
- اعدادی که بر 2 و 6 پوره قابل تقسیم باشند، بر 12 نیز پوره تقسیم می‌شوند.
- اعدادی که تنها بر یک و خود شان قابل تقسیم باشند، اعداد اولیه اند.
- عددی که علاوه بر خود و یک بر اعداد دیگری نیز پوره قابل تقسیم باشد، عدد مرکب (تجزیه پذیر) است.
- هر عدد اولیه تنها دو قاسم دارد که عبارت از عدد یک و خودش می‌باشد.
- 2 تنها عدد جفت است که اولیه می‌باشد.
- یک عدد مرکب کم از کم 3 جزء ضربی دارد.
- یافتن اجزای ضربی اولیه یک عدد مرکب به نام تجزیه به اعداد اولیه یاد می‌شود و این تجزیه، یگانه است.
- تجزیه به اجزای ضربی اولیه موارد استعمال زیادی دارد و بیش از همه در دریافت کوچک‌ترین مضرب مشترک، بزرگ‌ترین قاسم مشترک و جذرهای دوم و سوم اعداد از آن کار گرفته می‌شود.
- کوتاه‌ترین روش نشان دادن حاصل ضرب تکرار یک عدد را طاق یا عدد توان دار می‌نامند.
- در  $5^3$  عدد 5 قاعده، 3 توان‌نما و  $5^3$  عبارت از طاق می‌باشد.
- در ضرب طاق‌هایی که دارای قاعده‌های مساوی و توان‌های مختلف باشند، حاصل ضرب آن‌ها مساوی به قاعده مشترک به توان حاصل جمع توان‌های داده شده می‌باشد.
- حاصل تقسیم طاق‌هایی که دارای عین قاعده و توان‌های مختلف باشند، مساوی می‌باشد به یکی از قاعده‌ها به توان عددی که از تفریق توان‌های صورت و مخرج به دست می‌آید به شرط آن که قاعده صفر نباشد.
- اگر یک عدد توان دار به توان برسد، قاعده را به توان حاصل ضرب‌های دو توان می‌نویسیم.
- در ضرب طاق‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف داشته باشند، قاعده‌ها با هم ضرب گردیده و به یکی از توان‌های مساوی نوشته می‌شوند.
- در تقسیم طاق‌هایی که توان‌های مساوی و قاعده‌های مختلف دارند، قاعده صورت را

- بالای قاعدهٔ مخرج تقسیم و نتیجه آن را به توان یکی از توان‌های مساوی می‌نویسیم.
- اعداد بزرگ طبیعی را می‌توان توسط روش علمی عددنویسی ارائه نمود.
  - بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد طبیعی عبارت از بزرگ‌ترین اجزای ضربی مشترک آن‌ها می‌باشد.
  - بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو یا چندین عدد طبیعی را توسط ست قاسم‌ها و تجزیه می‌توان دریافت کرد.
  - بزرگ‌ترین قاسم مشترک دو عدد طبیعی، کوچک‌تر و یا مساوی به یکی از این دو عدد می‌باشد.
  - کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چند عدد طبیعی، عبارت از کوچک‌ترین عددی است که در عین وقت بالای دو یا چندین عدد طبیعی قابل تقسیم بوده و یگانه است.
  - کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد طبیعی را توسط ست مضرب‌ها و تجزیه دریافت کرده می‌توانیم.
  - بین دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$  و کوچک‌ترین مضرب مشترک (L.C.M) و بزرگ‌ترین قاسم مشترک (G.C.D) رابطهٔ زیر موجود است:

$$G \times L = a \times b \quad \text{یا} \quad G.C.D = \frac{a \times b}{L.C.M} \quad \quad L.C.M = \frac{a \times b}{G.C.D}$$

- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو یا چندین عدد اولیه و یا دو عددی که قاسم مشترک آن‌ها فقط یک است، عبارت از حاصل ضرب اعداد می‌باشد.
- کوچک‌ترین مضرب یک عدد طبیعی همیشه بزرگ‌تر و یا مساوی به عدد می‌باشد.
- مضرب یک عدد طبیعی بالای خود عدد پوره تقسیم می‌شود.
- مضرب‌های یک عدد طبیعی قابل شمارش نمی‌باشند.
- یکی از دو جزء مساوی یک عدد طبیعی عبارت از جذر دوم (جذر مربع) عدد می‌باشد.
- جذر مربع اعداد طبیعی را توسط تجزیه و روش عمومی جذر مربع به دست آورده می‌توانیم.
- یکی از سه جزء ضربی مساوی یک عدد طبیعی، عبارت از جذر سوم یا جذر مکعب عدد می‌باشد.

1- اعداد زیر را به اجزای ضربی اولیه تجزیه نمایید:

168      858      1122      1024      1656      8000      3206  
30030      38      54      116      66

2- حاصل ضرب‌های زیر را به شکل یک طاقت (عدد توان‌دار) بنویسید:

$4^2 \times 4^3 \times 4^4$        $5 \times 5^2 \times 5^3 \times 5^4$        $2^4 \times 3^4 \times 4^4$

3- حاصل تقسیم‌های زیر را به شکل یک طاقت (عدد توان‌دار) بنویسید:

$\frac{8^{11}}{2^{11}}$        $\frac{(36)^8}{9^8}$        $\frac{(121)^9}{(11)^9}$        $\frac{9^{11}}{9^3}$

4- اعداد زیر را به روش علمی عددنویسی ارائه نمایید:

$112.2 \times 10^3$       25.48      1001      350      4000

5- بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد زیر را توسط تجزیه به اجزای ضربی اولیه دریابید:

36 , 162      580 , 1160      405 , 495

6- بزرگ‌ترین قاسم مشترک اعداد طبیعی زیر را توسط تجزیه دریابید:

24,96,48      175,315      324,225

7- توسط تجزیه به اجزای ضربی اولیه، کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد طبیعی زیر را دریابید:

12,32,40,45,72,75      175,200,225,250,300      132,165,198,220

8- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، 2920 و بزرگ‌ترین قاسم مشترک آن‌ها 4 است؛ اگر یک عدد 40 باشد عدد دیگری را دریابید.

9- کوچک‌ترین عدد طبیعی را دریابید که اگر بالای 12، 16 و 18 تقسیم شود در هر صورت 8 باقی بماند.

10- کوچک‌ترین عدد طبیعی را دریابید که اگر بالای 15، 21، 28 و 49 تقسیم شود در هر صورت 4 باقی بماند.

11- جذر مربع اعداد  $\sqrt{2809}$  و  $\sqrt{5329}$  را دریابید.

12- در یک باغ در هر قطار به تعداد قطارها درخت غرس شده است؛ اگر تعداد درخت‌ها در باغ 1369 عدد باشد، تعداد درخت‌ها را در هر قطار و نیز تعداد قطارها را معلوم کنید.

13- مساحت یک زمین مربع شکل 9216 متر مربع است؛ طول هر ضلع زمین را دریابید.

14- اگر مساحت زمین مربعی 1444 متر مربع بوده باشد، طول هر ضلع زمین را دریابید.

15- جذر مربع اعداد  $\sqrt{1002001}$ ،  $\sqrt{10201}$ ،  $\sqrt{42025}$  را توسط طریقه عمومی دریابید.





فصل سوم  
اعداد تام

طول ریشه برخی درختان حتی به اندازه طول قد خود درخت است.



$$5 - 7 = ?$$



در بحث‌های قبلی با اعداد طبیعی که برای شمارش اشیاء و همچنان اعداد مکمل که متشکل از اعداد طبیعی و صفر است، آشنایی حاصل نموده اید؛ اما سؤال فوق نشان می‌دهد که اعداد طبیعی و مکمل برای حل مسائل کافی نیستند، از همین بابت بشر در طول تاریخ با مشکلات فراوان مواجه شده است. بنابراین همین نیازمندی‌ها اعداد تام به میان آمده است. شما این اعداد را روی ترمومتر در شکل بالا می‌بینید و طوری که می‌دانید: ترمومتر وسیله‌ای است که برای اندازه‌گیری درجه حرارت به کار می‌رود.

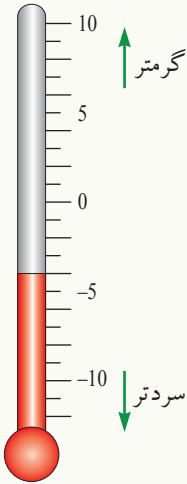
در ترمومتر اعداد بالاتر از صفر، اعداد مثبت (بزرگ‌تر از صفر) و اعداد پایین‌تر از صفر، اعداد منفی (کوچک‌تر از صفر) و عدد صفر قرار دارند.

اعداد بزرگ‌تر از صفر را با علامت مثبت (+) و اعداد کوچک‌تر از صفر را با علامت منفی (-) نشان می‌دهند. عددی که علامت ندارد، مثبت است. آیا گاهی فکر کرده اید که عددهای مثبت و عددهای منفی در روی ترمومتر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

**مثال:** اگر اداره هواشناسی در شروع فصل زمستان از طریق رادیو خبر دهد که: کابل 5 درجه سانتی‌گرید بالای صفر، بامیان 8 درجه زیر صفر، جلال‌آباد 10 درجه بالای صفر، هرات صفر درجه، قندهار 9 درجه بالای صفر، غزنی 5 درجه زیر صفر، مزار شریف 2 درجه بالای صفر و سالنگ شمالی 9 درجه زیر صفر باشد. برای نشان دادن این اعداد، از عددهای علامت‌دار (اعداد تام) استفاده می‌کنند. طور مثال برای نمایش درجه حرارت بامیان -8 و کابل +5 به کار برده می‌شود که به طور نمونه در جدول زیر نشان داده شده است. با در نظر داشت طرز ارائه فوق جدول زیر را تکمیل نمایید.

کابل	جلال‌آباد	بامیان	هرات	قندهار	مزار شریف	غزنی	سالنگ شمالی
+5°C		-8°C					

## فعالیت



با در نظر داشت تکمیل جدول صفحه قبل، موقعیت اعداد داده شده را روی ترمومتر نشان دهید.

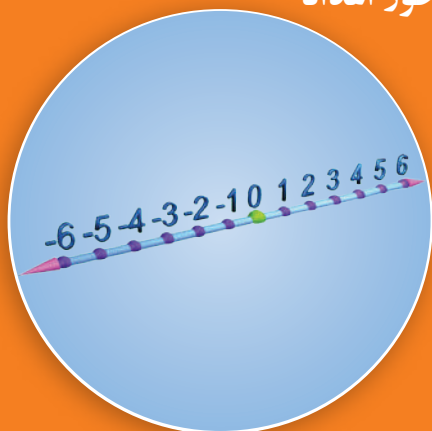
طبق معمول 4 درجه زیر صفر را به صورت (( -4 )) و 4 درجه بالای صفر را به صورت (( +4 )) می نویسند.  
- عدد علامت دار (( -4 )) را **منفی چهار**  
و عدد علامت دار (( +4 )) را **مثبت چهار** می خوانیم.

## تمرین

- 1- اگر درجه حرارت در کابل  $+6$  درجه سانتی گرید و در سالنگ  $-6$  درجه سانتی گرید باشد، با نگاه کردن به ترمومتر بگویید که این دو شهر چند درجه حرارت از همدیگر فرق دارند؟
- 2- یک خط عمودی رسم نموده، مانند ترمومتر آن را طوری درجه بندی کنید که در آن اعداد مثبت، صفر و اعداد منفی وجود داشته باشند.
- 3- درجه حرارت چند شهر افغانستان در یک روز زمستانی چنین اعلان شده است:  
کابل 5 درجه بالای صفر، هرات صفر درجه، قندهار 16 درجه بالای صفر، بامیان 5 درجه زیر صفر، غزنی 4 درجه زیر صفر و سالنگ جنوبی 8 درجه زیر صفر باشد. اکنون شهرهای متذکره را از سردترین به گرم ترین شهر با درجه حرارت شان از چپ به راست، در جدول زیر ترتیب نمایید.

شهرها						
درجه حرارت						

## اعداد تام و نمایش آن‌ها روی محور اعداد



... ,  $\square$  ,  $\square$  ,  $\square$  , 0, +1, +2, +3, +4, ...

همان طور که دیده می‌شود اعداد فوق از طرف چپ به راست یک یک واحد زیاد و از راست به چپ یک، یک واحد کم می‌گردند. آیا خانه‌های خالی فوق را که زیر علامت سؤالیه قرار دارند، می‌توانید با عدد مناسب پر کنید؟

تا به حال مفهوم اعداد علامت‌دار (اعداد مثبت و اعداد منفی) را آموخته‌اید. اکنون بر اساس همین اعداد علامت‌دار می‌توانیم اعداد تام را به قرار زیر معرفی نماییم:

### اعداد تام ( Integers numbers )

... , -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , +1 , +2 , +3 , +4 , +5 , ...

اعداد بالا را به نام اعداد تام یاد می‌نمایند.

ست یا مجموعه اعداد تام را قرار زیر نشان می‌دهند.

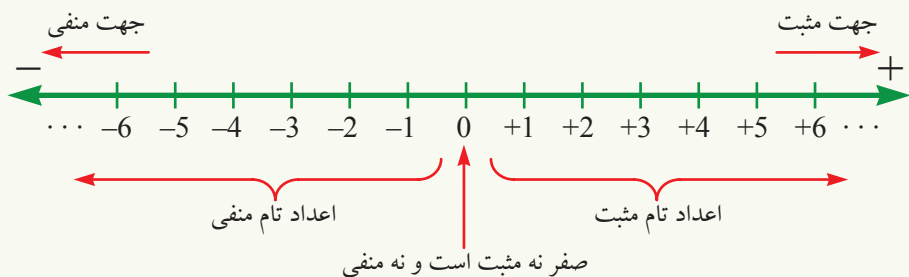
$I = \{ \dots , -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , +1 , +2 , +3 , +4 , +5 , \dots \}$

### نمایش اعداد تام روی محور اعداد:

برای آسانی کار، ست اعداد تام را روی یک محور نشان می‌دهیم، طوری که ابتدا یک خط را رسم نموده، سپس یک نقطه کیفی را روی خط به حیث مبدا در نظر گرفته، با عدد **صفر (0)** نشانی می‌کنیم. اکنون امتداد دو(جهت) خط متذکره را در اختیار داریم، یعنی: از مبدا به جهت راست و از مبدا به جهت چپ.

اعدادی که به طرف راست مبدا (صفر) روی خط قرار دارند با علامت (+) و اعدادی که به طرف چپ مبدا روی خط قرار دارند، با علامت (-) مشخص می‌کنیم.

بنابراین طرف راست این خط (طرف راست مبدا)، اعداد **مثبت** و طرف چپ این خط (طرف چپ مبدا)، اعداد **منفی** را نشان می‌دهیم. مبدا این خط صفر است نه مثبت و نه منفی می‌باشد. این خط را **محور اعداد** می‌گویند.



## فعالیت

محور اعداد را به صورت عمودی رسم کنید، نقطه‌یی را روی آن مبدأ فرض نموده جهت بالا را با علامت (+) و جهت پایین را با علامت (-) مشخص نمایید و اعداد تام را از -6 تا +6 روی آن نشان دهید.

- آموختیم که:** محور اعداد عبارت از خط جهت داری است که در روی آن می‌توانیم اعداد تام مثبت، صفر و اعداد تام منفی را نشان دهیم. محور اعداد دارای دو جهت است که:
- سمت راست محور را جهت مثبت
  - سمت چپ محور را جهت منفی انتخاب کرده‌اند.

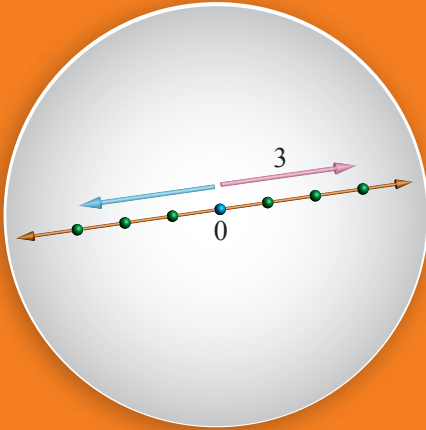
## تمرین

1- در شکل زیر برای هر نشانی، یک عدد علامت دار را بنویسید.



- 2- یک محور را رسم نموده و اعداد تام را از -5 تا +5 روی آن نشان دهید.
- 3- اعداد تام +3، -3، +5، 0، -1 و +8 را روی محور اعداد نشان دهید.

## قیمت مطلقاً یک عدد



آیا می‌توانید نقطه‌یی را که از مبدأ به اندازه 3 واحد فاصله دارد، روی شکل زیر نشان دهید؟



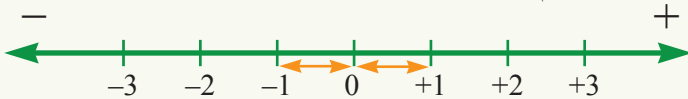
**سؤال:** اگر هوای بامیان  $-5$  درجه سانتی‌گرید و درجه حرارت سالنگ شمال  $-8$  درجه سانتی‌گرید باشد، کدام یک بیشتر سرد است؟ اگر هوای کابل  $+8$  درجه سانتی‌گرید و هوای قندهار  $+16$  درجه سانتی‌گرید باشد، کدام شهر بیشتر گرم است؟ در دو عدد تام روی محور اعداد، همان عدد بزرگ‌تر است که به طرف راست قرار داشته باشد؛ **طور مثال:** عدد 3 طرف راست عدد 2 قرار دارد، لذا عدد 3 بزرگ‌تر از عدد 2 است، یا به عبارت دیگر عدد 2 کوچک‌تر از عدد 3 است و این طور می‌نویسیم:

$$2 < 3 \quad \text{یا} \quad 3 > 2$$

به همین ترتیب ( $-1$ ) به طرف راست ( $-3$ ) قرار دارد، لذا عدد  $-1$  بزرگ‌تر از عدد  $-3$  است و یا به عبارت دیگر، عدد  $-3$  کوچکتر از عدد  $-1$  می‌باشد آن را این طور می‌نویسیم:

$$-3 < -1 \quad \text{یا} \quad -1 > -3$$

اعداد تام مثبت، اعداد تام منفی و صفر را قبلاً روی یک محور مانند شکل زیر نشان داده‌ایم:



اگر به محور بالا نظر اندازیم، دیده می‌شود که عدد  $+1$  و عدد  $-1$  از مبدأ (صفر) به فاصله‌های مساوی قرار دارند، یعنی هر دو عدد از مبدأ (صفر) به اندازه یک واحد دورتر واقع گردیده‌اند، این دو عدد را **متضاد (معکوس جمعی)** می‌نامند. به همین ترتیب  $+2$  و  $-2$  یا  $+3$  و  $-3$  و غیره با یکدیگر متضاداند.

پس هر عدد تام و متضاد آن در روی محور اعداد به فاصله‌های مساوی از صفر قرار داشته و دارای علامت‌های مختلف می‌باشند. این فاصله از مبدأ را **قیمت مطلقه** نامیده‌اند.

مثلاً:  $+3$  و  $-3$  از صفر به اندازه  $3$  واحد دورتر واقع اند؛ پس  $3$  قیمت مطلقه  $+3$  و  $-3$  است. قیمت مطلقه یک عدد با قرار دادن در بین دو خط عمودی ( $| \quad |$ ) نمایش داده می شود، یعنی:

$$|0|=0 \quad , \quad |+3|=3 \quad , \quad |-3|=3$$

## فعالیت

- متضاد اعداد مقابل را بنویسید.  $-6, -12, -20, +13, -15, 8$

- قیمت مطلقه اعداد مقابل را دریابید؟  $-8, 3, 5, -11, -1, -14, +17, 19$

## آموختیم که:

• هر عددی که صفر نباشد (مثبت یا منفی) قیمت مطلقه آن عدد مثبت است؛ اما قیمت مطلقه صفر مساوی به صفر است، یعنی:  $|0|=0$  می باشد.

• قیمت مطلقه یک عدد و قیمت مطلقه متضاد آن باهم مساوی اند؛ یعنی:

$$|-7|=|+7|=7$$

## تمرین

1- اعداد تام زیر را از چپ به راست ترتیب طوری ترتیب کنید که کوچک ترین عدد به طرف چپ باشد.

$$-5 \quad +6 \quad -8 \quad -3 \quad +12$$

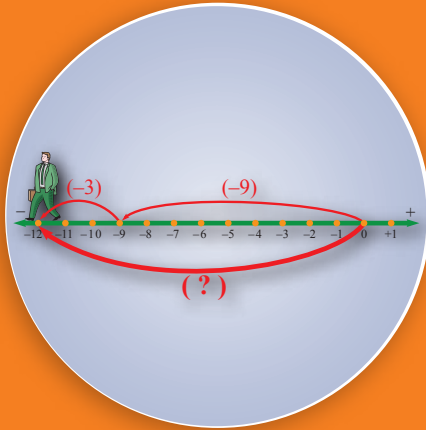
2- از دو عدد  $-6$  و  $-9$  کدام یک بزرگ تر است؟ و از دو عدد  $-7$  و صفر کدام یک کوچک تر است؟

3- قیمت مطلقه اعداد زیر را دریابید.

$$\begin{array}{ccccc} +5 & -5 & -3 & 3 & -7 \\ +16 & -10 & 10 & +12 & -12 \\ +132 & -132 & +200 & a & -200 \end{array}$$

4- یک محور رسم کرده، عددهای  $-5$ ،  $+2$  و  $-3$  را روی آن مشخص نموده و متضاد هر یک از آن ها را نیز روی این محور نشان دهید.

## جمع اعداد تام هم علامت



فرض کنید شخصی به روی محور اعداد به اندازه 9 واحد به طرف چپ و بعد از آن نیز به اندازه 3 واحد دیگر به طرف چپ رفته است، بگویید این شخص چند واحد را طی کرده است؟

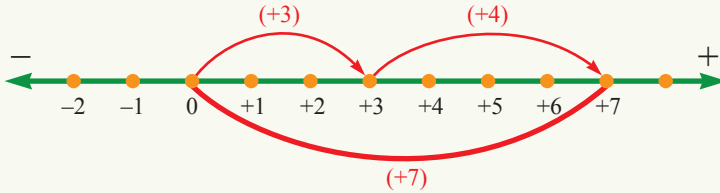
عملیه جمع را در اعداد طبیعی مورد مطالعه قرار داده اید؛ به طور مثال:  $3 + 4 = 7$  در حقیقت هر عدد طبیعی، یک عدد مثبت است، بنابراین این عملیه جمع بالا را می توانیم قرار زیر بنویسیم:

$$(+3) + (+4) = (+7)$$

یکی از روش های جمع کردن اعداد تام، استفاده از محور اعداد است.

### جمع اعداد مثبت

برای نمایش  $(+3) + (+4)$  در روی محور زیر دقت کنید.



$$(+3) + (+4) = (+7)$$

$$3 + 4 = 7$$

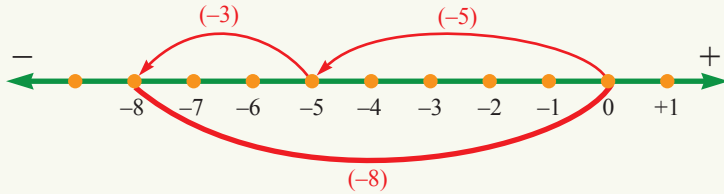
در محور بالا دیده می شود که:  
یا

### فعالیت

عدد 5+ را با عدد 2+ جمع نموده و در روی محور اعداد نشان دهید.

## جمع اعداد منفی

هرگاه در روی محور اعداد از مبدأ به اندازه 5 واحد به طرف چپ حرکت نماییم  $(-5)$  و سپس به اندازه 3 واحد دیگر به طرف چپ حرکت کنیم  $(-3)$ ؛ در حقیقت به طرف چپ، به نقطه  $(-8)$  می‌رسیم. شکل زیر را مشاهده کنید.



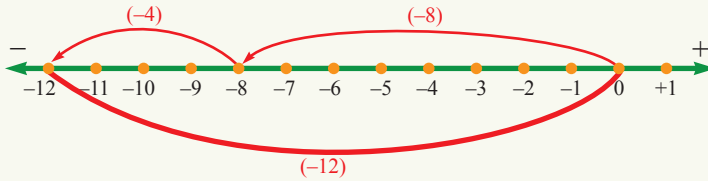
$$(-5) + (-3) = (-8)$$

بنابراین:

### مثال

یک نفر به اندازه 8 واحد به طرف چپ حرکت نموده و سپس به اندازه 4 واحد دیگر باز هم به طرف چپ حرکت نموده است، نفر مذکور به کدام نقطه رسیده است؟

حل:



$$(-8) + (-4) = -12$$

### آموختیم که:

حاصل جمع دو عدد هم علامت، برابر با مجموع قیمت مطلقه آن دو عدد و علامت مشترک علامت حاصل جمع آن‌ها می‌باشد.

## تمرین

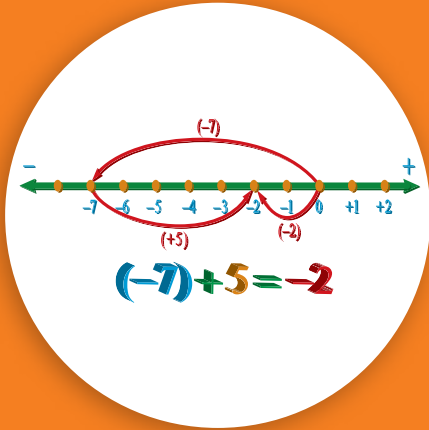
1- اعداد زیر را جمع کنید:

$$(-12) + (-3) = \quad (-7) + (-6) = \quad 37 + 47 =$$

2- زینب انگشت خود را در روی محور اعداد به اندازه 3 واحد از مبدأ محور (صفر) به طرف راست حرکت می‌دهد و سپس به اندازه 4 واحد دیگر به طرف راست رفته و بالای یک نقطه انگشت می‌گذارد. انگشت زینب بالای کدام عدد قرار دارد؟

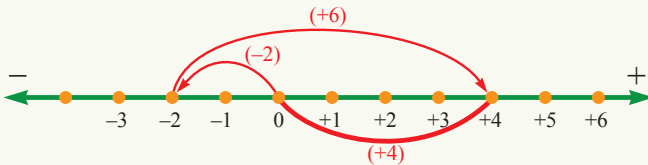
3- یک محور به صورت عمودی رسم نموده و یک مبدأ در روی آن تعیین نمایید؛ بعد حرکت یک مورچه را به اندازه 4 واحد از مبدأ به طرف پایین و سپس به اندازه 6 واحد دیگر به طرف پایین محور تصور کرده و محل نهایی مورچه را روی محور نشان دهید.

## جمع اعداد تام مختلف علامت



احمد 7 افغانی از دکاندار قرض می گیرد، (قرض را به علامت منفی نشان می دهیم). بعد از چند روز او 5 افغانی به دکاندار می پردازد. اکنون احمد چند افغانی قرضدار است؟

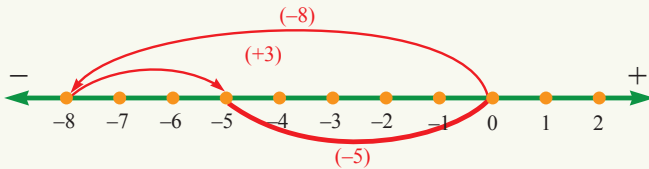
هرگاه در روی محور اعداد تام از مبدأ، شروع به حرکت نموده و به اندازه 2 واحد به طرف چپ و سپس از همان نقطه به اندازه 6 واحد به طرف راست حرکت نماییم، در نهایت به نقطه 4+ می رسیم. شکل زیر را مشاهده نمایید.



از روی شکل بالا دیده می شود که:  $(-2) + (+6) = (+4)$  یا  $-2 + 6 = 4$

**مثال اول:** عدد  $(-8)$  و عدد  $(+3)$  را باهم جمع می کنیم.

**حل:**

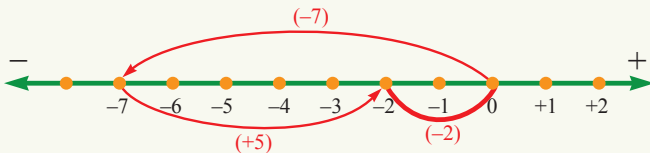


$$(-8) + (+3) = -8 + 3 = -5$$

**مثال دوم:** سؤالی که در شروع درس آمده است را با استفاده از محور اعداد حل

می کنیم.

**حل:**

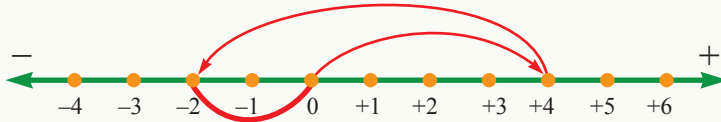


$$(-7) + (+5) = -2$$

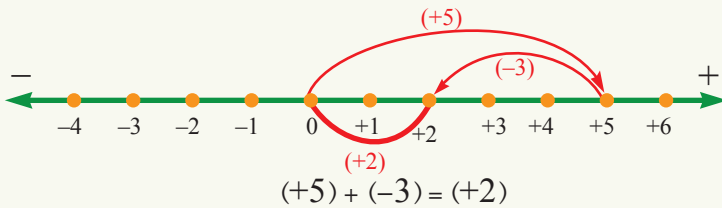
**سؤال:** علامت  $(-)$  در عدد  $-2$  چه چیز را نشان می دهد؟

## فعالیت

با استفاده از شکل زیر، یک سؤال بسازید و آن را حل نمایید:



**مثال سوم:** در یک روز زمستانی، درجهٔ حرارت کابل تا 5 درجه سانتی گرید بالای صفر می‌رسد. اگر در شب هوای کابل به اندازه 3- درجه تغییر نماید، هوای کابل در شب چند درجه است؟



**حل:**

پس هوای کابل در شب برابر با 2 درجه بالای صفر یعنی +2 درجه است.

**توجه:** هوای کابل در روز +5 درجه بالای صفر بوده و در هنگام شب که هوا سردتر می‌گردد، به اندازه 3- درجه تغییر نموده و نظریه روز به اندازه 3 درجه سردتر گردیده است.

**آموختیم که:** برای جمع کردن دو عدد تام با علامت‌های مختلف:

از عددی که قیمت مطلق بزرگ دارد، عددی را که دارای قیمت مطلق کوچک است، تفریق می‌کنیم و برای حاصل تفریق، علامت همان عددی را می‌گذاریم که قیمت مطلق آن بزرگ‌تر است.

## تمرین

1- اعداد تام داده شده را با هم جمع کنید.

$$(-6) + (+5) = \quad , \quad (+3) + (-5) = \quad , \quad (-3) + (+7) + (-4) + (-9) =$$

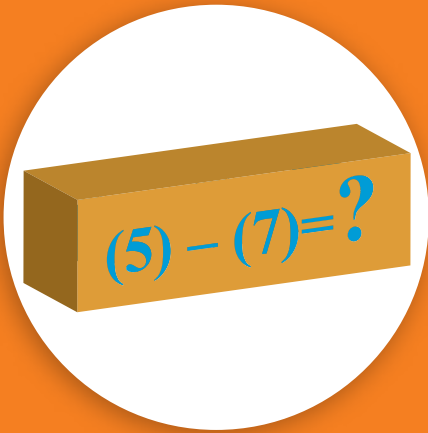
2- عدد تام (-4) را با عدد تام (-3) جمع نموده و در روی محور نشان دهید.

3- اگر درجه حرارت هرات 8 درجه سانتی گرید زیر صفر و بامیان از هرات 3 درجه سردتر باشد، درجه حرارت بامیان چند درجه است؟ در روی محور نشان دهید.

4- سه عدد تام (-6) ، (+8) و (-10) را با هم جمع کنید.

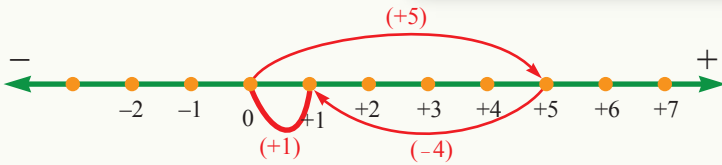
## عملیة تفریق عددهای تام

چگونه می توانیم عدد 7 را از عدد 5 تفریق نماییم؟



در درس های قبلی دیدیم که محور اعداد به ما کمک کرد تا جمع اعداد تام را بهتر درک نماییم. در اینجا با استفاده از محور می توانیم تفریق دو عدد تام را بررسی کنیم.

### فعالیت



- با توجه به شکل توضیح دهید که چگونه حاصل  $5 - 4$  را پیدا می کنیم؟
- با همین روش  $4 - 5$  را روی محور نشان دهید و حاصل آن را پیدا کنید.
- روی یک محور  $4 + (-5)$  را نمایش دهید و حاصل آن را پیدا کنید.
- $4 - 5$  و  $4 + (-5)$  را با هم مقایسه کنید و از آن چه نتیجه به دست می آید؟

نتیجه فعالیت بالا به ما نشان می دهد برای این که عدد 5 را از عدد 4 تفریق نماییم، باید عدد  $5 - 4$  را با عدد 4 جمع کنیم یا به عبارت دیگر، می توانیم عمل تفریق را به عمل جمع تبدیل نماییم؛ یعنی:

$$4 - 5 = (+4) + (-5) = -1$$

دیده می شود که در عملیة تفریق، علامت مفروق تغییر می کند؛ یعنی در حقیقت در عملیة تفریق، متضاد (معکوس جمعی) (Additive inverse) مفروق را با مفروق منہ جمع می کنیم.

**مثال اول:** عدد 5- را از عدد 7 تفریق نمایید.

**حل:** متضاد مفروق؛ یعنی متضاد عدد 5- را که عدد 5+ است، با مفروق منه (7) جمع می‌کنیم.

$$7 - (-5) = 7 + (+5) = 7 + 5 = 12$$

**مثال دوم:** عدد 9 را از عدد 3- تفریق نمایید.

در این جا عدد 9 مفروق است، لذا متضاد آن را که 9- است، با عدد مفروق منه یعنی 3-

جمع می‌نماییم:

$$(-3) - (+9) = (-3) + (-9) = -12$$

**مثال سوم:** عدد 4- و عدد 2- را باهم جمع نموده و عدد 9- را از حاصل جمع آن‌ها تفریق نمایید.

**حل:** اولاً اعداد 4- و 2- را باهم جمع نموده و سپس علامت مفروق یعنی 9- را به 9+ تغییر می‌دهیم و در اخیر، مفروق منه و مفروق را باهم جمع می‌کنیم، یعنی:

$$(-4) + (-2) = -6, \quad (-6) - (-9) = -6 + 9 = +3 = 3$$

### آموختیم که:

برای تفریق نمودن دو عدد تام، علامت مفروق را تغییر داده و سپس عملیه جمع را انجام می‌دهیم. یا به عبارت دیگر: متضاد مفروق را با مفروق منه جمع می‌کنیم.

### تمرین

1- عملیه‌های زیر را انجام دهید.

$$0 - 5 \quad (-4) - (-8) \quad (-9) - (-3) \quad (9) - (-3) \quad (-20) - (-12)$$

$$5 - 0 \quad -20 - 12 \quad 8 - 12 \quad -13 - (-3) \quad (-25) - (-12)$$

2- می‌خواهیم از عدد تام 6 که مفروق منه است، عدد تام 4 را تفریق نماییم، این عملیه را به روی محور اعداد نشان دهید؟

3- حاصل جمع اعداد تام 6- و 8+ را به دست آورده و عدد 14- را از آن تفریق نمایید.

اگر دو عدد تام مختلف‌العلامت در هم ضرب گردند، علامت حاصل ضرب چیست؟

$$3 \times (-4) = -12$$

$$(-3) \times 4 = -12$$

### فعالیت

اگر در حاصل ضرب از یک عامل ضربی آن یک یک واحد کم گردد، در حاصل ضرب

$$4 \times 4 = 16 \quad 3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 4 = 12 \quad 2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 4 = 8 \quad 1 \times 2 = 2$$

$$1 \times 4 = 4 \quad 0 \times 2 = 0$$

$$0 \times 4 = 0 \quad -1 \times 2 = -2$$

$$-1 \times 4 = -4 \quad -2 \times 2 = -4$$

$$-2 \times 4 = -8 \quad -3 \times 2 = -6$$

$$-3 \times 4 = -12 \quad -4 \times 2 = -8$$

⋮ ⋮

چه تغییری به وجود خواهد آمد؟

به ضرب‌های مقابل توجه کنید:

از حاصل ضرب‌های بالا، تغییر به وجود آمده را پیدا کنید.

- علامت حاصل ضرب دو عدد مثبت چیست؟

- علامت حاصل ضرب عدد منفی در عدد مثبت چیست؟

به طریق زیر نیز می‌توانیم عین نتیجه را به دست آوریم:

هرگاه یک عدد تام مثبت به طور مثال  $+2$  را سه دفعه با هم جمع نماییم در این صورت دیده

$$(+2) + (+2) + (+2) = +6$$

می‌شود که:

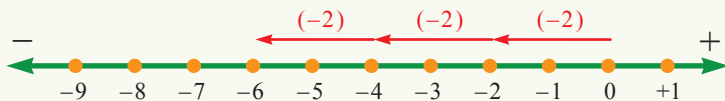
در اینجا در حقیقت عدد  $+2$  سه چند شده است، و در اعداد طبیعی داشتیم که:

$$3 \times 2 = 6$$

عملیه بالا را روی محور اعداد چنین نشان می‌دهیم:



به همین ترتیب در شکل زیر دیده می‌شود که عدد 2- سه دفعه وجود دارد:



$$(-2) + (-2) + (-2) = 3 \times (-2) = -6$$

**مثال:** عدد 4- را در 3 ضرب نمایید.

$$3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$$

**حل:**

**سؤال:** خانه‌های خالی زیر را پر کنید:

$$(-6) \times 2 = ( ) \quad ( ) \times 5 = -25 \quad (-3) \times ( ) = -3$$

## فعالیت

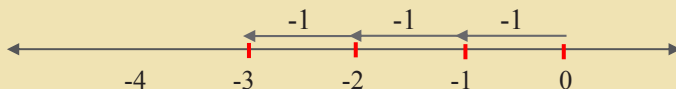
حاصل ضرب اعداد از 7 تا به 7- را با عدد 2 مانند فعالیت اول این درس بنویسید.

### آموختیم که:

- هرگاه دو عدد مثبت در هم ضرب گردند، حاصل ضرب آن‌ها دارای علامت مثبت است.
- هرگاه یک عدد منفی در یک عدد مثبت یا عدد مثبت در یک عدد منفی ضرب گردد، حاصل ضرب آن‌ها دارای علامت منفی است.

## تمرین

1- در روی محور زیر چه می‌بینید؟ به صورت ضرب بنویسید.



2- اعداد تام 5 تا 5- را به ترتیب در 2 ضرب نموده و حاصل ضرب‌ها را دو به دو مقایسه کنید.

3- اگر حاصل ضرب دو عدد تام برابر با 8+ باشد و اگر یکی از اعداد مساوی به 4+ باشد، دیگرش چند است؟

4- اگر حاصل ضرب دو عدد تام برابر با 8- باشد و اگر یکی از اعداد مساوی به 4- باشد، دیگرش چند است؟

5- ضرب‌های زیر را انجام دهید:

$$\begin{array}{lll} 4 \times 7 = & (-4) \times 5 = & (-5) \times 3 = \\ (-2) \times (+3) = & (-3) \times (+1) = & (-1) \times (+1) = \\ (-1) \times 0 = & (-7) \times (+10) = & (-9) \times (100) = \end{array}$$

6- کدام عدد با 7+ ضرب گردد، تا حاصل ضرب آن‌ها 56- شود؟

## ضرب عدد تام منفی در عدد تام منفی

$3 \times (-2) = -6$	$3 \times (-5) = -15$
$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-5) = -10$
$1 \times (-2) = -2$	$1 \times (-5) = -5$
$0 \times (-2) = 0$	$0 \times (-5) = 0$
$-1 \times (-2) = 2$	$-1 \times (-5) = 5$
$-2 \times (-2) = 4$	$-2 \times (-5) = 10$
$-3 \times (-2) = 6$	$-3 \times (-5) = 15$

?

هرگاه یک عدد تام منفی طور مثال (عدد تام 2- یا عدد تام 5-) را به دیگر اعداد تام (مثبت، صفر و منفی) به ترتیب متوالی ضرب نماییم، از مقایسه حاصل ضرب 2- و 5- چه نتیجه به دست خواهیم آورد؟ بر علاوه علامت حاصل ضرب دو عدد منفی چی خواهد بود؟

### فعالیت

با کم شدن اولین عامل ضربی، چه تغییری در حاصل ضرب مشاهده می کنید؟ با توجه به این تغییر حاصل ضرب های زیر را تکمیل کنید:

⋮	⋮
$5 \times (-2) = -10$	$5 \times (-5) = -25$
$4 \times (-2) = -8$	$4 \times (-5) = -20$
$3 \times (-2) = -6$	$3 \times (-5) = -15$
$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-5) = -10$
$1 \times (-2) = -2$	$1 \times (-5) = -5$
$0 \times (-2) = 0$	$0 \times (-5) = 0$
$-1 \times (-2) = +2$	$-1 \times (-5) = +5$
$-2 \times (-2) = +4$	$-2 \times (-5) = +10$
$-3 \times (-2) = +6$	$-3 \times (-5) = +15$
$-4 \times (-2) =$	$-4 \times (-5) =$
$-5 \times (-2) =$	$-5 \times (-5) =$
⋮	⋮

در فعالیت شروع این درس مشاهده شد که: هرگاه یک عدد منفی به یک عدد منفی دیگر ضرب گردد؛ مانند:  $(-4) \times (-5)$  نتیجه آن یک عدد مثبت می شود.

**مثال اول:** عدد 6- را به عدد 2- ضرب نمایید.

**حل:** همان طوری که در فعالیت شروع درس مشاهده کردیم، از ضرب این دو عدد، نتیجه زیر به دست می آید.

$$(-6) \times (-2) = +12$$

**مثال دوم:** حاصل ضرب  $(-10) \times (+3) \times (-2)$  را به دست آورید.

**حل:** اول دو عدد را از طرف چپ با هم ضرب و سپس حاصل آن‌ها را با عدد سوم ضرب می کنیم:

$$(-2) \times (+3) = -6$$

اکنون حاصل به دست آمده را در عدد بعدی  $(-10)$  ضرب می کنیم، بنابراین داریم:

$$(-6) \times (-10) = +60$$

### آموختیم که:

1- حاصل ضرب یک عدد مثبت در یک عدد منفی، یک عدد منفی است.

2- حاصل ضرب دو عدد منفی، یک عدد مثبت است.

3- به صورت عموم حاصل ضرب دو عدد هم علامت، یک عدد مثبت و حاصل ضرب دو عدد مختلف علامت یک عدد منفی است.

### تمرین

1- ضرب های زیر را انجام دهید.

$$(-6) \times (-1) = \quad (+3) \times (-3) = \quad (-1) \times (-1) =$$

$$(-12) \times (-3) = \quad (-2) \times (+5) = \quad (-4) \times (-8) =$$

2- از عدد 2+ تا به عدد 6- را به ترتیب در عدد 3- ضرب نموده و حاصل ضرب را دو به دو با هم مقایسه نمایید.

3- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$$(-4) \times ( ) = +8 \quad (-2) \times (-5) = ( ) \quad (-3) \times ( ) = +21$$

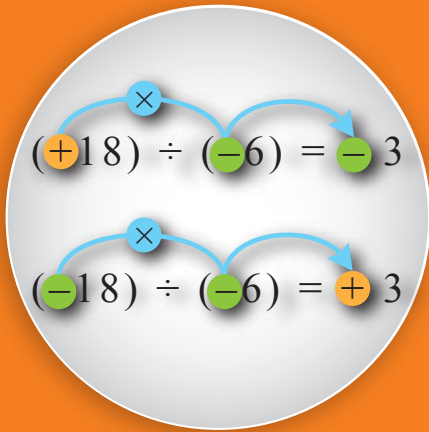
$$( ) \times (-9) = +27 \quad (-3) \times ( ) = -6 \quad (-1) \times (-11) = ( )$$

4- حاصل ضرب های زیر را به دست آورید.

$$(-2) \times (+3) \times (-4) = \quad (-3) \times (+2) \times (-5) =$$

$$(+7) \times (-4) \times (-2) = \quad (-6) \times (-4) \times (-2) =$$

$$(-1) \times (-1) \times (-1) = \quad (-10) \times (-2) \times (+1) =$$



$$(+18) \div (-6) = ?$$

$$(-18) \div (-6) = ?$$

$$? \times (+6) = -18$$

همان طوری که از مبحث اعداد طبیعی می دانیم، عملیه تقسیم با عملیه ضرب رابطه دارد؛ یعنی: هر گاه یک حاصل ضرب بر جزء اول ضربی تقسیم گردد، جزء دوم ضربی به دست می آید؛ به همین ترتیب، اگر حاصل ضرب بر جزء دوم ضربی تقسیم گردد، جزء اول ضربی به دست می آید. جدول زیر را مشاهده کنید:

عملیه ضرب	عملیه تقسیم
$(+6) \times (+3) = +18$	$(+18) \div (+6) = +3$
$(-6) \times (-3) = +18$	$(+18) \div (-6) = -3$
$(+6) \times (-3) = -18$	$(-18) \div (+6) = -3$
$(-6) \times (+3) = -18$	$(-18) \div (-6) = +3$

### فعالیت

از عملیه های ضرب زیر، یک جدول مانند جدول بالا طوری ترتیب کنید که رابطه بین ضرب و تقسیم اعداد تام را نشان دهد:

- 1)  $6 \times 2 = 12$
- 2)  $(-6) \times 2 = -12$
- 3)  $6 \times (-2) = -12$
- 4)  $(-6) \times (-2) = 12$

• توضیح دهید چگونه دو عدد تام را بر همدیگر تقسیم می کنیم؟

**نتیجه:** با توجه به ضرب و تقسیم‌های انجام شده دیدیم که:  
 علامت خارج قسمت یک عدد منفی بر یک عدد مثبت، منفی است.  
 علامت خارج قسمت یک عدد منفی بر یک عدد منفی، مثبت است.  
 علامت خارج قسمت یک عدد مثبت بر یک عدد منفی، منفی است.

**مثال:** اول علامت‌های صورت و مخرج را تعیین کنید؛ سپس خارج قسمت‌ها را به دست آرید:

**حل:**

$$\frac{(-4) \times (-3)}{(-2) \times (-1)} = \quad , \quad \frac{(+6) \times (-5)}{(+2) \times (-15)} = \quad , \quad \frac{(+5) \times (-8)}{(-10) \times (+1)} =$$

در عملیه تقسیم عددهای تام نیز مانند عملیه ضرب، ابتدا علامت حاصل تقسیم را تعیین نموده؛ سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

$$\frac{(-4) \times (-3)}{(-2) \times (-1)} = \frac{(+12)}{(+2)} = +6, \quad \frac{(+6) \times (-5)}{(+2) \times (-15)} = \frac{(-30)}{(-30)} = +1, \quad \frac{(+5) \times (-8)}{(-10) \times (+1)} = \frac{(-40)}{(-10)} = +4$$

**به یاد داشته باشید که:**

در عملیه تقسیم ابتداء علامت حاصل تقسیم را تعیین و سپس قیمت مطلقه مقسوم را بر قیمت مطلقه مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم.

## تمرین

1- ابتدا تساوی سمت چپ را تکمیل کنید و سپس حاصل تقسیم سمت راست را بنویسید:

$$\begin{array}{ll} (-5) \times ( \quad ) = +20 & (20) \div (-5) = \\ (+7) \times ( \quad ) = -56 & (-56) \div (+7) = \\ ( \quad ) \times (+8) = -40 & (-40) \div (+8) = \\ ( \quad ) \times (-5) = -35 & (-35) \div (-5) = \end{array}$$

2- برای تقسیم کردن افاده  $(-18) - (+6)$  بر حاصل افاده  $(-4) + (-8)$  چگونه باید عمل کرد؟

3- عملیه‌های زیر را تکمیل و جدول مربوطه عملیه ضرب و تقسیم را تشکیل دهید.

$$\begin{array}{ll} (-8) \times (+4) = ( \quad ) & (-42) \div (+6) = ( \quad ) \\ (+50) \times ( \quad ) = -200 & ( \quad ) \times (-2) = -72 \\ ( \quad ) \div (-4) = +20 & (-100) \div ( \quad ) = +100 \\ (-12) \times (+3) = ( \quad ) & (+60) \div ( \quad ) = (-20) \end{array}$$

$$-3[2-(4-3)-\{-1+1-(-1-1)\}]$$

$$-3[2-4+3-\{-1+1+1+1\}]$$

$$-3[2-4+3+1-1-1-1]$$

$$-3[-1]=3$$

اگر عملیه های چهارگانه (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم) در یک سؤال داده شده باشند، چه باید کرد؟  
آیا سؤال زیر را با استفاده از عملیه های اساسی چهارگانه که تا به حال آموخته اید، حل کرده می توانید؟

$$(5) - \{(-4) \times (-7)\} - \{(-6) \div (+2)\} = ?$$

### به یاد داشته باشید که:

علامت ( ) را قوس کوچک، علامت { } را قوس متوسط و علامت [ ] را قوس کلان می نامند.

برای رفع قوس ها، اول قوس کوچک، بعد قوس متوسط و سپس قوس کلان را رفع می نمایم.

برای محاسبه یا ساده ساختن افاده حسابی مراحل زیر را به کار می بریم:

اول: اگر در افاده های حسابی طاقت و جذر وجود داشته باشد، نخست آن را ساده می سازیم.  
دوم: در صورتی که در افاده های حسابی، قوس ها وجود داشته باشد، اول قوس را رفع می نمایم.

سوم: عملیه های ضرب و تقسیم را از طرف چپ به راست انجام می دهیم.

چهارم: عملیه های جمع و تفریق را از چپ به راست انجام می دهیم.

مثال: افاده زیر را که یک افاده حسابی است، محاسبه نمایید:

$$(-6 \times 4) \times 2^3 - 5 + \sqrt{49} \div 7 - 10$$

حل

اول:  $(-6 \times 4) \times 8 - 5 + 7 \div 7 - 10$

دوم:  $-24 \times 8 - 5 + 7 \div 7 - 10$

سوم:  $-192 - 5 + 7 \div 7 - 10$

چهارم:  $-192 - 5 + 1 - 10$

پنجم:  $-197 + 1 - 10$

ششم:  $-196 - 10$

هفتم:  $-206$

فعالیت

عملیه‌های زیر را انجام دهید.

- 1)  $-7 + 18 =$                        $18 + (-7) =$
- 2)  $-3 + (-7 + 2) =$                  $\{(-3) + (-7)\} + 2 =$
- 3)  $2 \times (-3) =$                          $\{(-4) \times 5\} \times 7 =$
- 4)  $(-4) \times (5 \times 7) =$                  $\{(-4 \times 7)\} + \{(-4) \times 9\} =$
- 5)  $(-4) \times (7 + 9) =$

6) آیا خاصیت تبدیلی در عملیه‌های ضرب و جمع، مانند اعداد طبیعی، در اعداد تام نیز صدق می‌کند؟

7) آیا خاصیت اتحادی عملیه‌های ضرب و جمع، مانند اعداد طبیعی، در اعداد تام نیز وجود دارد؟

8) آیا عملیه تفریق اعداد تام دارای خاصیت تبدیلی است یا خیر؟ با مثال نشان دهید.

آموختیم که:

در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد تام مانند اعداد طبیعی، خاصیت‌های تبدیلی و اتحادی صدق می‌کنند.

تمرین

افاده‌های زیر را ساده بسازید.

- 1)  $\{(-6 \times 4) \times 2\} - \{5 \times (-5 + 3)\} + 20$
- 2)  $[9 \div \{-(-3) \times (5 - 8)\}] + 10$
- 3)  $10 \times 24 \div \{-(-4) \times (5 - 7)\} - 6$
- 4)  $[\{5 \times (-4)\} - \{(-5) \times (-1)\}] - 10$
- 5)  $2 \times \{(-3) + (-2)\} + 8 - 2$

- اعداد  $5, +4, +3, +2, +1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, \dots$  را به نام اعداد تام یاد می‌کنند.
  - ست اعداد تام را قرار زیر نشان می‌دهند.
- $$\mathbf{I} = \{ \dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, \dots \}$$
- محور اعداد عبارت از خط جهت داری است که در روی آن می‌توانیم اعداد مثبت، اعداد منفی و صفر را نشان دهیم.
  - هر عدد تام و **متضاد** آن در روی محور اعداد، به فاصله‌های مساوی از صفر قرار دارند و دارای علامت‌های مختلف می‌باشند و فاصله آن‌ها را از مبدا **قیمت مطلقه** می‌نامند.
  - در اعداد مثبت به نوشتن علامت ضرورت نیست.
  - برای تفریق نمودن دو عدد تام، اول علامت مفروق را تغییر داده و سپس عملیه جمع را انجام می‌دهیم. یا به عبارت دیگر: متضاد مفروق را با مفروق منه جمع می‌کنیم.
  - حاصل ضرب دو عدد هم‌علامت مثبت می‌باشد.
  - حاصل ضرب دو عدد مختلف‌العلامت منفی می‌باشد.
  - در عملیه تقسیم ابتدا علامت حاصل تقسیم را تعیین و سپس قیمت مطلقه مقسوم را به قیمت مطلقه مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم.
  - علامت ( ) را به نام **قوس کوچک**، علامت { } را به نام **قوس متوسط** و علامت [ ] را به نام **قوس بزرگ** یاد می‌کنند.

برای رفع قوس‌ها، اول قوس کوچک، بعد قوس متوسط و سپس قوس کلان رفع می‌گردد. هرگاه علامت منفی خارج قوس قرار داشته باشد، علامت‌های داخل قوس تغییر می‌یابند و اگر علامت خارج قوس مثبت باشد، علامت‌های داخل قوس تغییر نمی‌کنند.

● خاصیت‌های اتحادی و تبدیلی عملیه‌های جمع و ضرب، مانند اعداد طبیعی، در اعداد تام نیز صدق می‌کنند.

## تمرین فصل سوم

- 1- اعداد تام  $-3$ ،  $+7$ ،  $-4$ ،  $6$  و  $+10$  و متضاد آنها را روی محور اعداد نشان دهید.  
 2- قیمت‌های مطلقهٔ اعداد  $-8$ ،  $+8$ ،  $-10$ ،  $0$  و  $-12$  را بنویسید.  
 3- تساوی‌های زیر را تکمیل نمایید:

a)  $(-6) + 4 =$  ، b)  $5 - (-3) =$

c)  $8 + 0 =$  ، d)  $(-8) + 0 =$

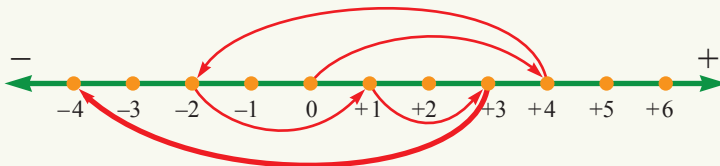
4- حاصل جمع سه عدد تام  $(-4)$ ،  $(+2)$  و  $(-1)$  را روی یک محور نشان دهید.

5- خانه‌های خالی زیر را پُر کنید:  
 a)  $(+20) + (13) = +13 + ( \quad )$

b)  $(-8 + 3 + 0) - (-5 + 0) = (-5) + ( \quad )$

c)  $+4 - (-2) + (3-7) = (-20) + ( \quad )$

6- حرکت روی محور اعداد توسط تیر قرار شکل زیر نشان داده شده است؛ این اعداد را جمع نموده و نتیجه را حاصل نمایید.



- 7- درجهٔ حرارت کابل  $30$  درجهٔ سانتی‌گرید بالای صفر است و هوای شهر بغلان  $7$  درجه از کابل سردتر است. درجه حرارت بغلان را به دست آورید.  
 8- هوای قلات  $5$  درجهٔ سانتی‌گرید زیر صفر است و هوای هرات  $7$  درجهٔ سانتی‌گرید از قلات گرم‌تر می‌باشد، هوای هرات چند درجهٔ سانتی‌گرید است؟  
 9- از افادهٔ  $10 + (-7) - (-4) - (-6 + 10)$  را تفریق کنید.  
 10- حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید:

a)  $(-8 + 2 - 4) \times (-5 + 2 - 1) =$

b)  $-(-4 + 6 - 3) \times (-5 + 0) =$

c)  $(6 - 10) \times (-7 + 3 \times 2) =$

11- اگر یک عدد منفی تقسیم یک عدد منفی دیگر گردد، حاصل تقسیم دارای کدام یک از علامت‌های زیر است؟  
 الف) مثبت    ب) منفی    ج) هم مثبت و هم منفی    د) هیچکدام

12- حاصل تقسیم‌های زیر را به دست آورید:

a)  $-(-10) \div (-2) =$

b)  $(-16 + 4) \div (-2) \times (3) =$

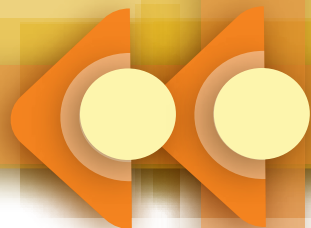
c)  $-(+10 + 8) \div (-6 \div 2) =$

13- افادهٔ زیر را ساده سازید:

$$(-6) \div (-2) - [(10) \div \{(-2) + (+2^2 \times 3)\}] - 2 =$$

14- افادهٔ زیر را ساده سازید:

$$(-2) \times 2^3 + (-5 + 3) + 20 - 18 \div \{-(-3) \times (5 - 8)\} =$$



# فصل چهارم اعداد نسبی



این پرنده  $\frac{53}{500} kg$  وزن دارد.  
وزن این پرنده با یک عدد نسبتی نشان داده شده است.

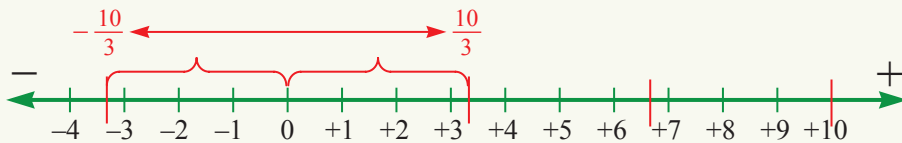


آیا فکر کرده اید چگونه می توان دو سیب را به صورت مساوی بین سه نفر تقسیم کرد؟

### فعالیت

- 1- یک تار را به طول 10cm در نظر بگیرید.
- 2- تار را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.
- 3- به کمک خط کش درجه دار هر سه قسمت را اندازه بگیرید.

در فعالیت بالا مشخص می شود که طول هر قسمت از 3 سانتی متر بزرگ تر و از 4 سانتی متر کوچک تر است بنابراین نمی توان آن را به صورت یک عدد تام نشان داد، لذا به ست اعداد دیگری نیاز است تا به کمک آن بتوان عدد بالا را نشان داد. در این فعالیت، چون که 10 بر 3 حصه مساوی تقسیم شده است، می توانیم آن را به شکل  $\frac{10}{3}$  نشان دهیم که این نوع اعداد را به نام اعداد نسبتی یاد می کنند. حالا می خواهیم به کمک محور اعداد، عدد نسبتی  $\frac{10}{3}$  را نشان دهیم.

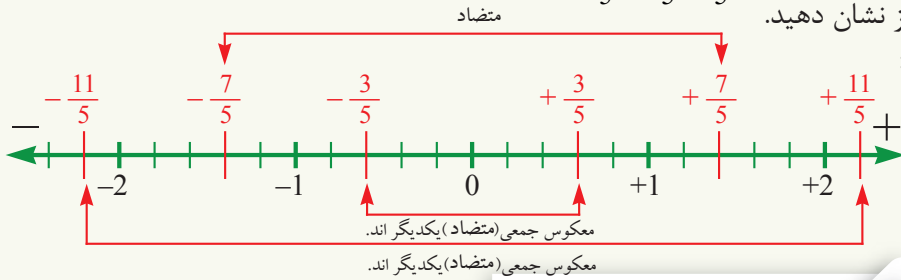


همان طوری که هر عدد تام، دارای عدد متضاد (معکوس جمعی) است، عدد نسبتی نیز دارای عدد متضاد می باشد.

طور مثال متضاد  $\frac{10}{3}$  عدد  $-\frac{10}{3}$  است که در شکل بالا نشان داده شده است.

**مثال:** اعداد نسبتی  $\frac{3}{5}$ ،  $\frac{7}{5}$  و  $-\frac{11}{5}$  را روی محور اعداد مشخص نموده و متضاد آن‌ها را نیز نشان دهید.

**حل:**



## فعالیت

- 1- ابتدا سه واحد را روی محور اعداد جدا کنید.
- 2- این سه واحد را به چهار قسمت مساوی تقسیم نمایید.
- 3- هر قسمت نشان دهنده کدام عدد نسبتی است؟
- 4- یک واحد را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید و  $\frac{3}{4}$  را روی آن نشان دهید.
- 5- متضاد این عدد کدام است؟ روی محور نشان دهید.

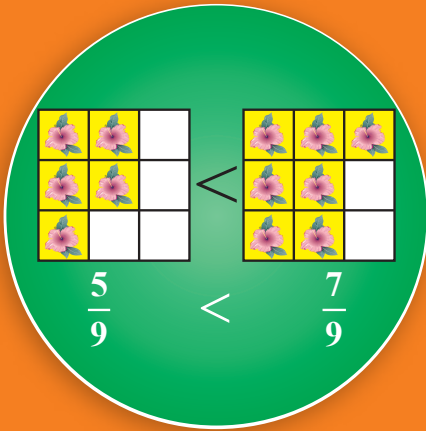
اگر کسر  $\frac{3}{4}$  را روی محور نشان دهیم و نتیجه فعالیت بالا را با آن مقایسه نمایم، دیده می‌شود که عدد نسبتی  $\frac{3}{4}$  با کسر  $\frac{3}{4}$  یکی می‌باشد، بنابراین:

یک عدد نسبتی عبارت از عددی است که به شکل  $\frac{n}{d}$  نشان داده می‌شود، عددهای  $n$  و  $d$  اعداد تام بوده و  $d \neq 0$  می‌باشد.

## تمرین

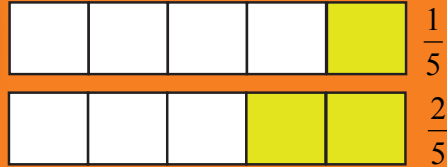
- 1- در یک محور اعداد هر واحد را به 3 حصه مساوی تقسیم نموده و اعداد نسبتی  $\frac{2}{3}$ ،  $\frac{5}{3}$  و  $-\frac{7}{3}$  را روی محور نشان داده و اعداد متضاد آن‌ها را پیدا کنید.
- 2- هر واحد را روی محور به 4 حصه مساوی تقسیم کنید و هر حصه را  $a$  بنامید؛ سپس عدد نسبتی  $-\frac{5}{4}$  و متضاد آن را روی محور نشان داده و در ضمن بگویید که عدد  $\frac{3}{4}$  چند  $a$  از عدد  $-\frac{5}{4}$  دور است.
- 3- یک محور را طوری تقسیم‌بندی کنید که اعداد نسبتی  $\frac{3}{5}$ ،  $-\frac{4}{5}$ ،  $\frac{7}{5}$  و  $-\frac{6}{5}$  به شکل واضح روی محور نشان داده شده باشد.

## مقایسه اعداد نسبتی



در کدام تصویر، ساحت بیشتری با گل پوشیده

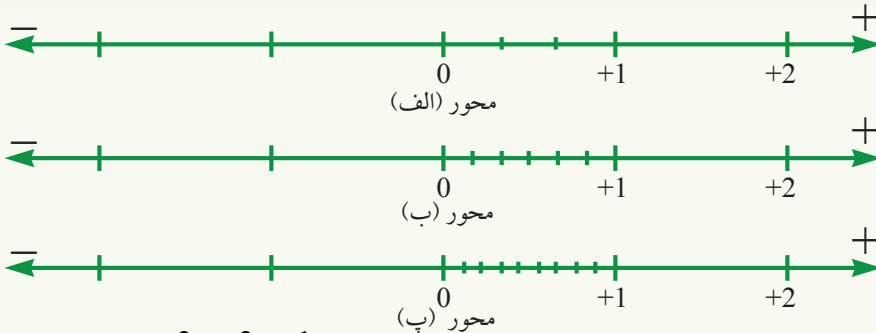
شده است؟



آیا می‌توانید بگویید که در اعداد نسبتی فوق کدام عدد بزرگتر می‌باشد؟

## فعالیت

- 1- عدد نسبتی  $\frac{1}{3}$  را روی محور (الف) نشان دهید.
- 2- عدد  $\frac{2}{6}$  را روی محور (ب) نشان دهید.
- 3- عدد  $\frac{3}{9}$  را روی محور (پ) نشان دهید.
- 4- از مقایسه 3 عدد بالا روی محورهای زیر چه نتیجه‌یی به دست می‌آید؟



طوری که ملاحظه می‌شود در فعالیت فوق، اعداد نسبتی  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{2}{6}$  و  $\frac{3}{9}$  دارای عین قیمت می‌باشند و یا هر سه کسر عام با هم معادل اند.

## فعالیت

- 1- روی محور اعداد، عدد نسبتی  $\frac{3}{4}$  را نشان دهید.

2- عدد نسبتی  $\frac{5}{4}$  را روی همین محور نیز نشان دهید.

3- عدد نسبتی  $\frac{5}{4}$  بزرگتر است یا  $\frac{3}{4}$ ؟

4- در مقایسه اعداد فوق، بگویید کدام عدد روی محور در سمت راست عدد دیگر واقع است؟

از فعالیت فوق این نتیجه به دست می‌آید که در محور اعداد، عدد نسبتی‌یی که به طرف راست عدد واقع باشد، از عددی که به طرف چپ واقع است بزرگتر می‌باشد، چنانچه در اعداد تام نیز مشاهده کرده‌اید.

**مثال اول:** اعداد نسبتی  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{3}{4}$  را با هم مقایسه کنید و بگویید که کدام عدد بزرگتر است؟

**حل:** چون صورت‌ها با هم مساوی اند ( $3=3$ ) کسری که مخرج آن بزرگتر است کوچکتر می‌باشد در نتیجه  $\frac{3}{4} > \frac{3}{5}$  می‌باشد.

حالا دو عدد نسبتی که مخرج‌ها و صورت‌هایشان با هم مساوی نیستند؛ مانند:  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{4}{7}$  را در نظر می‌گیریم.

برای مقایسه این چنین اعداد، ابتدا آن‌ها را هم مخرج می‌کنیم، یعنی:

$$\frac{3}{5} \times \frac{7}{7} = \frac{21}{35} \quad , \quad \frac{4}{7} \times \frac{5}{5} = \frac{20}{35}$$

دیده می‌شود که:  $\frac{21}{35} > \frac{20}{35}$  است، بنابراین:  $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$  می‌باشد.

**مثال دوم:** از دو عدد نسبتی  $\frac{7}{12}$  و  $\frac{4}{9}$ ، کدام یک بزرگتر است؟

**حل:**

$$\frac{4}{9} \times \left(\frac{12}{12}\right) = \frac{48}{108} \quad , \quad \frac{7}{12} \times \left(\frac{9}{9}\right) = \frac{63}{108}$$

بنابر این می‌توانیم بنویسیم که:  $\frac{63}{108} > \frac{48}{108}$  و از اینجا می‌توانیم نتیجه بگیریم که:  $\frac{7}{12} > \frac{4}{9}$

در مقایسه اعداد نسبتی‌یی که مخرج‌هایشان با هم مساوی باشند عددی که صورت آن بزرگتر است بزرگتر می‌باشد و اگر صورت‌های شان با هم مساوی باشند، عددی که مخرج آن بزرگتر است. کوچکتر می‌باشد و اما اگر، نه صورت‌ها و نه مخرج‌های شان با هم مساوی باشند در این صورت اعداد نسبتی را هم مخرج می‌سازیم. یا به عبارت دیگر کوچکترین مضرب مشترک را در می‌یابیم و بعد با هم مقایسه می‌کنیم.

## تمرین

اعداد نسبتی زیر را با هم مقایسه کنید.

a)  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{4}{7}$     b)  $\frac{5}{7}$ ,  $\frac{-6}{11}$     c)  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{-1}{2}$     d)  $\frac{-8}{5}$ ,  $\frac{-11}{7}$     e)  $\frac{5}{9}$ ,  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{1}{3}$



برای ساختن یک چادر،  $5\frac{1}{3}$  متر تکه لازم است، و برای ساختن یک دستمال گردن به  $2\frac{2}{5}$  متر دیگر از همان تکه ضرورت می‌باشد. اگر تمام تکه مورد نیاز از تکه‌یی که طول آن  $15\frac{1}{2}$  متر است، قطع گردد، چقدر تکه دیگر باقی می‌ماند؟

### فعالیت

- 1- ابتدا  $-\frac{1}{2}$  را روی محور اعداد نشان دهید و آن را نقطه  $A$  بنامید.
- 2- از نقطه  $A$  به اندازه  $\frac{13}{10}$  به سمت راست حرکت کنید و آن را  $B$  بنامید.
- 3- نقطه  $B$  معادل کدام عدد نسبی است؟
- 4- با استفاده از مخرج مشترک، حاصل جمع  $-\frac{1}{2} + \frac{13}{10}$  را پیدا کنید.
- 5- حاصل جمع  $\frac{2}{6} + \frac{3}{6}$  و حاصل تفریق  $\frac{5}{6} - \frac{4}{6}$  را دریابید.

**مثال اول:** اعداد نسبی زیر را از طریق یافتن مخرج مشترک و یا کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها، جمع کنید:

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{12} = \frac{60+126}{216} = \frac{186}{216} = \frac{93}{108} = \frac{31}{36}$$

حل:

حالا اگر در این مثال کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها را پیدا کنیم، می‌توانیم عملیه جمع را به قرار زیر انجام دهیم:

$$18 = 2 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^2$$

$$12 = 3 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^2$$

دیده می‌شود که کوچک‌ترین مضرب مشترک 18 و 12 عبارت از  $3^2 \times 2^2 = 36$  است، لذا داریم که:

$$\frac{5}{18} + \frac{7}{12} = \frac{10+21}{36} = \frac{31}{36}$$

## فعالیت

- 1- ابتدا عدد نسبتی  $\frac{5}{6}$  را روی محور نشان دهید و آن را A بنامید.
- 2- از نقطه A به اندازه  $\frac{1}{4}$  به طرف چپ محور بروید، به کدام نقطه می‌رسید؟
- 3- حاصل  $\frac{5}{6} - \frac{1}{4}$  را با استفاده از دریافت کوچک‌ترین مضرب مشترک به دست آورید.

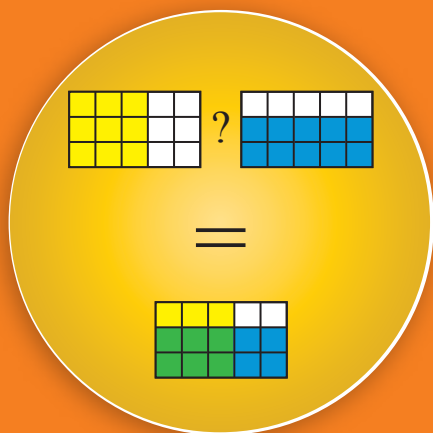
**مثال دوم:** از عدد نسبتی  $\frac{5}{4}$  عدد نسبتی  $\frac{2}{3}$  را تفریق کنید.  
**حل:**

$$\frac{5}{4} - \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{15-8}{12} = \frac{7}{12}$$

چه در جمع و چه در تفریق اعداد نسبتی، کافی است ابتدا مخرج مشترک را دریابیم و سپس صورت‌ها را جمع یا تفریق کنیم.

## تمرین

- 1- حاصل جمع اعداد نسبتی زیر را به دست آورید.  
a)  $\frac{4}{5} + \frac{-6}{5} =$  , b)  $\frac{7}{3} + \frac{3}{4} =$  , c)  $\frac{-5}{8} + \frac{-7}{12} =$  , d)  $\frac{-9}{16} + \frac{3}{8} =$
- 2- عدد نسبتی  $\frac{5}{2}$  را روی محور اعداد نشان داده و از آن، عدد نسبتی  $\frac{3}{2}$  را تفریق نمایید.
- 3- یک شاگرد در روز اول،  $\frac{1}{5}$  حصه یک کتاب را و در روز دوم  $\frac{2}{5}$  حصه همان کتاب را مطالعه کرد. چند حصه کتاب مذکور باقی مانده است؟



شکل مقابل نشان‌دهنده چه رابطه‌ی بین مستطیل‌ها است؟

### فعالیت

- 1- یک نخ را به طول یک واحد در نظر گرفته، آن را نصف کنید.
- 2- این نصف‌ها را به سه حصه مساوی تقسیم کنید.
- 3- طول هر حصه به دست آمده، کدام قسمت واحد است؟
- 4- چه رابطه‌ی بین  $\frac{1}{2}$ ،  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{6}$  می‌توانید مشاهده کنید؟

برای ضرب دو عدد نسبتی، صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می‌کنیم.

**مثال اول:**  $\frac{2}{7}$  را ضرب در  $(-\frac{3}{4})$  کنید.

$$\left(\frac{2}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{7} \times \frac{(-3)}{4} = \frac{(-6)}{28} = \frac{-3}{14} = -\frac{3}{14} = \frac{3}{-14}$$

**حل:**

**مثال دوم:** عدد نسبتی  $(-\frac{8}{15})$  را در عدد نسبتی  $(-\frac{3}{4})$  ضرب کنید:

$$\left(-\frac{8}{15}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{-8}{15} \times \frac{-3}{4}\right) = \frac{(-8) \times (-3)}{15 \times 4} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

**حل:**

حالا تقسیم دو عدد نسبتی را در مثال‌های زیر بررسی می‌کنیم:

مثال سوم:  $\frac{7}{10}$  را بر  $\frac{3}{5}$  تقسیم کنید.

حل: 
$$\frac{7}{10} \div \frac{3}{5} = \frac{7}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{35}{30} = \frac{7}{6}$$

مثال چهارم: عدد نسبتی  $(-3\frac{1}{2})$  را بر عدد نسبتی  $(-\frac{2}{3})$  تقسیم کنید.

حل: 
$$(-3\frac{1}{2}) \div (-\frac{2}{3}) = (-\frac{7}{2}) \div (-\frac{2}{3}) = (-\frac{7}{2}) \times (-\frac{3}{2}) = \frac{21}{4}$$

در عملیۀ ضرب اعداد نسبتی، صورت را در صورت و مخرج را در مخرج ضرب می‌کنیم و در عملیۀ تقسیم، عدد دوم نسبتی (مقسوم علیه) معکوس و سپس مانند عملیۀ ضرب عمل می‌شود.

## تمرین

1- اعداد زیر را در هم ضرب نموده و جواب آن‌ها را به ساده‌ترین شکل بنویسید.

a)  $\frac{41}{5} \times \frac{13}{2}$  , b)  $(-\frac{12}{3} \times -\frac{5}{6})$  , c)  $\frac{15}{16} \times (-\frac{12}{5})$   
 d)  $(\frac{7}{-11}) \times (-\frac{13}{9})$  , e)  $(-\frac{16}{15}) \times \frac{3}{4}$  , f)  $(-\frac{8}{3}) \times \frac{4}{5} \times (-\frac{3}{4})$

2-  $\frac{2}{3}$  حصۀ عدد 111 چند می‌شود؟

3- هر انسان کم از کم باید هر روز در برابر هر کیلو گرام وزن خود  $\frac{1}{2}$  دسی لیتر آب بنوشد. یک شخص با وزن 70 کیلو گرام روزانه به چه مقدار آب ضرورت دارد؟



احمد و محمود می‌خواهند یک اتاق را رنگ کنند. احمد  $\frac{2}{5}$  حصه کار و محمود  $\frac{1}{3}$  حصه کار را انجام می‌دهد، احمد می‌گوید: برای آنکه بینیم چقدر کار انجام شده است، باید:  $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$  را جمع کنیم؛ اما محمود می‌گوید، باید حاصل جمع  $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$  را به دست آوریم، به نظر شما حاصل جمع آن‌ها با هم فرق می‌کند؟

### فعالیت

- 1- نخ‌ی را به طول 1m در نظر بگیرید؛ بعد آن را نصف کنید و سپس هر نصف را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید، اکنون طول هر قسمت را حساب کنید.
- 2- اگر نخ دیگری به طول 1m را ابتدا سه قسمت مساوی کرده و بعد هر قسمت را نصف کنید، طول هر نصف مساوی به چند خواهد بود؟
- 3- طول این دو قطعه نخ با هم چه رابطه‌ی دارند؟

در فعالیت بالا نتیجه حاصل می‌شود که خاصیت تبدیلی در ضرب اعداد نسبی نیز صدق می‌کند.

**مثال اول:** با استفاده از اعداد  $\frac{7}{5}$  و  $(-\frac{3}{4})$  خاصیت تبدیلی جمع و ضرب را در اعداد نسبی نشان دهید.

$$(-\frac{3}{4}) + \frac{7}{5} = \frac{-15+28}{20} = \frac{13}{20}, \quad \frac{7}{5} + (-\frac{3}{4}) = \frac{28-15}{20} = \frac{13}{20}$$

$$\boxed{(-\frac{3}{4}) + \frac{7}{5} = \frac{7}{5} + (-\frac{3}{4})}$$

از این رو:

$$(-\frac{3}{4}) \times (\frac{7}{5}) = \frac{-21}{20}, \quad (\frac{7}{5}) \times (-\frac{3}{4}) = \frac{-21}{20} \quad \text{به همین ترتیب داریم که:}$$

$$\boxed{(-\frac{3}{4}) \times \frac{7}{5} = \frac{7}{5} \times (-\frac{3}{4})}$$

از این رو:

**مثال دوم:** عدد نسبتی  $\frac{3}{2}$  را از عدد نسبتی  $\frac{5}{2}$  تفریق نموده و در آن خاصیت تبدیلی را بررسی کنید.

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

لذا:  $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \neq \frac{3}{2} - \frac{5}{2}$  است و خاصیت تبدیلی در عملیه تفریق صدق نمی‌کند.

**حل**

**مثال سوم:** عدد  $\frac{4}{3}$  را بر  $\frac{2}{3}$  تقسیم نموده و خاصیت تبدیلی را در آن بررسی کنید.

$$\frac{4}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{3} \neq \frac{4}{3} \div \frac{2}{3}$$

دیده می‌شود که:

خاصیت تبدیلی در عملیه تقسیم اعداد نسبتی صدق نمی‌کند. خاصیت تبدیلی تنها در عملیه‌های جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می‌کند.

## تمرین

در جاهای خالی عدد مناسب را بنویسید.

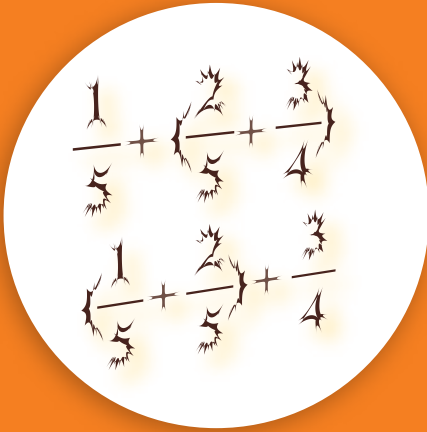
a)  $-\frac{1}{5} \times \frac{17}{2} = ( \quad ) \times (-\frac{1}{5})$

b)  $(-\frac{8}{3}) + ( \quad ) = \frac{1}{2} + (-\frac{8}{3})$

c)  $\frac{8}{2} \times (-5) = (-5) \times ( \quad )$

d)  $-\frac{2}{3} \times (\frac{5}{-6}) = (-\frac{5}{6}) \times (\frac{\quad}{-3})$

e)  $\frac{9}{2} \times (5+6) = (11) \times (\frac{9}{\quad})$



اگر عدد  $\frac{1}{5}$  با حاصل جمع اعداد  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{4}$

جمع شود و یا اگر حاصل جمع دو عدد  $\frac{1}{5}$

و  $\frac{2}{5}$  با عدد  $\frac{3}{4}$  جمع شود آیا این دو حاصل

جمع با هم فرق دارند؟

### فعالیت

الف) ابتدا دو عدد نسبتی  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{4}{5}$  را با هم جمع کنید.

ب) حاصل جمع (الف) را با عدد نسبتی  $\frac{6}{7}$  جمع کنید.

پ) عدد  $\frac{4}{5}$  و عدد  $\frac{6}{7}$  را با هم جمع کنید.

ت) حاصل جمع (پ) را با عدد نسبتی  $\frac{2}{3}$  جمع کنید.

ث) حالا حاصل جمع به دست آمده (ب) و (ت) را با هم مقایسه کنید.

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) + \frac{6}{7} = \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} + \frac{6}{7}\right)$$

در فعالیت بالا ملاحظه می شود که:

این خاصیت را خاصیت اتحادی عملی جمع می نامند.

**مثال اول:** آیا  $\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{5}\right) + \frac{3}{5} = \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)$  است؟

**حل:** با کمی دقت می بینیم که اگر  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{2}{5}$  را با هم جمع کنیم، کار ما ساده تر می شود؛ پس

$$\frac{3}{2} + \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{2} + 1 = 1\frac{1}{2} + 1 = 2\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{5} = \frac{15+4}{10} = \frac{19}{10}$$

$$\frac{19}{10} + \frac{3}{5} = \frac{19+6}{10} = \frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}$$

**مثال دوم:** درستی  $\frac{2}{3} \times (\frac{4}{5} \times \frac{6}{7}) = (\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) \times \frac{6}{7}$  را نشان دهید.

$$\frac{2}{3} \times (\frac{4}{5} \times \frac{6}{7}) = \frac{2}{3} \times (\frac{24}{35}) = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}, \quad (\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) \times \frac{6}{7} = (\frac{8}{15}) \times \frac{6}{7} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$$

لذا داریم که:  $\frac{2}{3} \times (\frac{4}{5} \times \frac{6}{7}) = (\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}) \times \frac{6}{7} = \frac{16}{35}$

بنابر این، خاصیت اتحادی در عملیه ضرب اعداد نسبتی صدق می کند.

**مثال سوم:** خاصیت اتحادی تفریق را با  $\frac{4}{3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{5})$  بررسی کنید.

**حل:**

$$\frac{4}{3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{4}{3} - (\frac{5-2}{10}) = \frac{4}{3} - (\frac{3}{10}) = \frac{40-9}{30} = \frac{31}{30}$$

$$(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{5} = (\frac{8-3}{6}) - \frac{1}{5} = (\frac{5}{6}) - \frac{1}{5} = \frac{25-6}{30} = \frac{19}{30}$$

$$\boxed{\frac{4}{3} - (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) \neq (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{5}}$$
 از این رو:

نامساوی ( $\neq$ ) بالا نشان می دهد که: خاصیت اتحادی در عملیه تفریق صدق نمی کند.

**مثال چهارم:** خاصیت اتحادی را برای تقسیم سه عدد نسبتی بررسی کنید.

**حل:**

$$\frac{4}{3} \div (\frac{1}{2} \div \frac{1}{5}) = \frac{4}{3} \div (\frac{1}{2} \times \frac{5}{1}) = \frac{4}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{15}$$

$$(\frac{4}{3} \div \frac{1}{2}) \div \frac{1}{5} = (\frac{4}{3} \times \frac{2}{1}) \div \frac{1}{5} = (\frac{8}{3}) \div \frac{1}{5} = \frac{8}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{40}{3}$$

$$\boxed{\frac{4}{3} \div (\frac{1}{2} \div \frac{1}{5}) \neq (\frac{4}{3} \div \frac{1}{2}) \div \frac{1}{5}}$$
 لذا:

خاصیت اتحادی تنها در عملیه های جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می کند؛ اما در

عملیه های تفریق و تقسیم صدق نمی کند.

## تمرین

خاصیت اتحادی را در عملیه های زیر بررسی کنید.

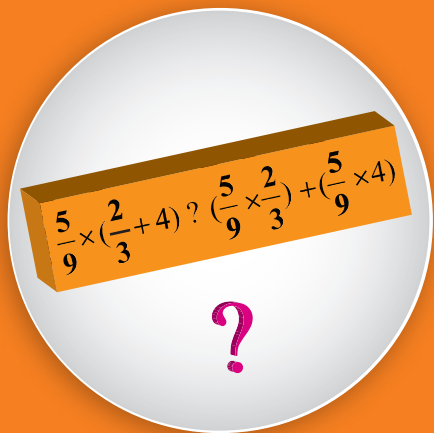
a)  $(\frac{4}{3} + \frac{2}{5}) + \frac{5}{7} =$

c)  $\frac{6}{5} - (\frac{2}{3} + \frac{4}{9}) =$

b)  $\frac{5}{7} \times (\frac{4}{9} \times \frac{3}{5}) =$

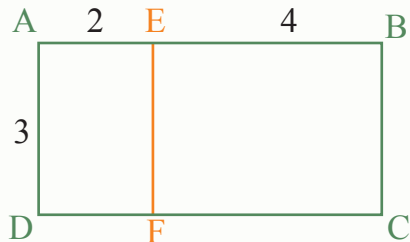
d)  $\frac{4}{3} \div (\frac{5}{3} \div \frac{2}{5}) =$

## خاصیت توزیعی



خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع را در اعداد تام دیده اید، آیا این خاصیت در اعداد نسبی نیز صدق می کند؟

## فعالیت



مساحت ABCD = مساحت AEFD + مساحت EBCF

$$3(2+4) = (3 \times 2) + (3 \times 4)$$

شکل مقابل را در نظر بگیرید.

- مساحت مستطیل AEFD چقدر است؟
- مساحت مستطیل EBCF چقدر است؟
- مساحت مستطیل ABCD چقدر است؟
- آیا می توانیم بگوییم که:

هر گاه یک عدد در مجموع دو عدد دیگر ضرب شود، می توان آن عدد را جداگانه در هر یک از اعداد ضرب و حاصل ضربها را با هم جمع کرد. این خاصیت را خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع می نامند.

## مثال اول:

خاصیت توزیعی را در عملیه ضرب بالای جمع بررسی کنید.

**حل:** اولاً عملیه ضرب را به صورت معمولی حل می کنیم؛ یعنی:

$$\frac{15}{8} \times \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{15}{8} \times \left(\frac{20+6}{15}\right) = \frac{15}{8} \times \left(\frac{26}{15}\right) = \frac{390}{120} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

حالا عملیه بالا را به صورت توزیعی بررسی می کنیم؛ یعنی:

$$\frac{15}{8} \times \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{15}{8} \times \frac{4}{3} + \frac{15}{8} \times \frac{2}{5} = \frac{60}{24} + \frac{30}{40} = \frac{5}{2} + \frac{3}{4} = \frac{10+3}{4} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

از مقایسه دو طریق حل فوق نتیجه می‌گیریم که:

$$\frac{15}{8} \times \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{15}{8} \times \frac{4}{3}\right) + \left(\frac{15}{8} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$$

**مثال دوم:** حاصل  $\frac{2}{3} \div \left(\frac{-4}{5} + \frac{7}{2}\right)$  را نخست بدون تطبیق خاصیت توزیعی و سپس با تطبیق

خاصیت توزیعی به دست آورید و نتیجه را با هم مقایسه کنید. آیا خاصیت توزیعی تقسیم بالای عملیه جمع صدق می‌کند؟

**حل:**

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{-4}{5} + \frac{7}{2}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{-8+35}{10}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{27}{10}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{10}{27}\right) = \frac{20}{81}$$

حالا خاصیت توزیعی را تطبیق می‌نماییم:

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{-4}{5} + \frac{7}{2}\right) = \frac{2}{3} \div \left(\frac{-4}{5}\right) + \frac{2}{3} \div \frac{7}{2} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{-4}\right) + \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{10}{-12} + \frac{4}{21} = \frac{-70+16}{84} = \frac{-54}{84} = \frac{-9}{14}$$

$$\boxed{\frac{2}{3} \div \left(\frac{-4}{5} + \frac{7}{2}\right) \neq \left(\frac{2}{3} \div \frac{-4}{5}\right) + \left(\frac{2}{3} \div \frac{7}{2}\right)}$$

از این رو:

از اینجا نتیجه می‌شود که:  $\frac{20}{81} \neq \frac{-9}{14}$

خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع در اعداد نسبتی صدق می‌کند؛ اما در عملیه تقسیم بالای جمع صدق نمی‌کند.

## تمرین

1- خاصیت توزیعی را در عملیه‌های زیر بررسی کنید:

a)  $\frac{4}{7} \times \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right)$  , b)  $\frac{-5}{6} \times \left(\frac{-5}{3} - \frac{-2}{5}\right)$  , c)  $\frac{1}{5} \times \left(\frac{2}{-3} + \frac{1}{-2}\right)$

2- خاصیت توزیعی را در سؤال زیر بررسی کنید:

$$\left(\frac{6}{5} + \frac{4}{3}\right) \times \frac{3}{2}$$

3- خاصیت توزیعی را در عملیه‌های زیر بررسی کنید:

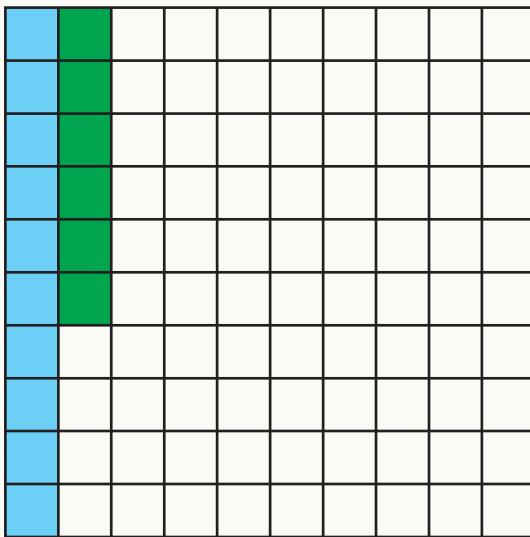
a)  $\frac{6}{7} \div \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$  , b)  $\frac{-6}{1} \div \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$  , c)  $\frac{8}{-5} \div \left(\frac{3}{2} + \frac{-3}{4}\right)$

## تبدیل عدد نسبتی به عدد اعشاری



احمد و برادرش می‌خواهند کاری را در چهار روز انجام دهند. در انتهای روز اول احمد از برادرش می‌پرسد: «تا حالا چند فیصد کار را انجام داده ایم؟»

### فعالیت



- چند مربع در شکل مقابل رنگ شده است؟
- چه کسری از مربع‌ها، رنگ آبی دارند؟ این مقدار را با عدد اعشاری نشان دهید.
- چه کسری از مربع‌ها، رنگ سبز دارند؟ این مقدار را با یک عدد اعشاری نشان دهید.
- چه کسری از مربع‌ها رنگ شده اند؟ این مقدار را با یک عدد اعشاری نشان دهید.

**مثال اول:** عدد نسبتی  $\frac{257363}{100}$  را به صورت عدد اعشاری نمایش دهید.

**حل:**

$$\begin{aligned} \frac{257363}{100} &= 2573 \frac{63}{100} = 2573 + \frac{63}{100} \\ &= 2573 + \frac{60}{100} + \frac{3}{100} \\ &= 2573 + \frac{6}{10} + \frac{3}{100} = 2573.63 \end{aligned}$$

در این حالت، 2573 را جزء صحیح عدد و 0.63 را جزء اعشاری عدد مذکور می‌نامند.

## فعالیت

اعداد 2.3125 و 0.412 را به صورت اعداد نسبتی بنویسید.

$$2.3125 = 2 + \frac{(\quad)}{10} + \frac{(\quad)}{100} + \frac{(\quad)}{1000} + \frac{(\quad)}{10000} = \frac{(\quad)}{10000}$$

$$0.412 = 0 + \frac{(\quad)}{10} + \frac{(\quad)}{100} + \frac{(\quad)}{1000} = \frac{(\quad)}{1000}$$

**مثال دوم:** عدد 2.32 را به صورت عدد نسبتی بنویسید.

$$2.32 = 2 + 0.3 + 0.02 = \frac{200}{100} + \frac{30}{100} + \frac{2}{100} = \frac{232}{100}$$

**حل:**

می‌توانیم اعداد نسبتی را به شکل اعداد اعشاری و اعداد اعشاری را به شکل اعداد نسبتی تبدیل کنیم.

## تمرین

1- اعداد اعشاری 0.212، 0.420 و 5.215 را به شکل اعداد نسبتی نشان دهید.

2- اعداد نسبتی  $\frac{4250}{1000}$ ،  $\frac{235}{100}$  و  $\frac{2410}{10000}$  را به شکل اعداد اعشاری بنویسید.

3- اعداد اعشاری 0.5، -1.5 و 1.25 را روی محور اعداد نشان دهید.

4- در جدول زیر، جزء صحیح و جزء اعشاری هر عدد را در محل‌های مشخص شده وارد کنید.

عدد اعشاری	جزء صحیح	جزء اعشاری
12.1		
13.25		
1.7394		
0.16		

- عدد نسبی عددی است که معمولاً به شکل  $\frac{n}{d}$  نشان داده می‌شود، در صورتی که  $n$  و  $d$  اعداد تام باشند و  $d \neq 0$ .
- اعداد نسبی به نام اعداد گویا، اعداد ناطق «Rational Numbers» یاد می‌شوند.
- همان‌طوری که هر عدد تام بدون صفر دارای عدد متضاد است، هر عدد نسبی نیز دارای عدد متضاد می‌باشد.
- ساده ساختن اعداد نسبی، مانند ساده ساختن کسرعام بوده و در صورتی که صورت و مخرج به یک عدد قابل تقسیم باشند، آن را تقسیم می‌کنیم تا به اعدادی برسیم که دیگر قابل تقسیم نباشند.
- از دو عدد نسبی همان عدد بزرگ‌تر است که در روی محور اعداد نظر به عدد دیگری، طرف راست قرار دارد، آنچه در مورد اعداد تام نیز مشاهده کرده‌اید.
- در مقایسه دو عدد نسبی که صورت‌ها و مخرج‌های شان با هم مساوی نیستند، نخست باید این دو عدد را هم‌مخرج نموده و سپس با هم مقایسه کنیم.
- جمع دو عدد نسبی مانند جمع اعداد کسرعام است، طوری که اول کوچک‌ترین مخرج مشترک را پیدا نموده و سپس صورت‌ها را مانند اعداد تام با هم جمع می‌کنیم.
- عملیه تفریق در اعداد نسبی مانند عملیه جمع است، با این تفاوت که در عملیه تفریق فقط علامت مفروق تغییر می‌کند و سپس عملیه جمع بالای آن تطبیق می‌گردد.
- در جمع و تفریق اعداد نسبی می‌توانیم از محور اعداد نیز استفاده کنیم، چنانچه در مورد اعداد تام نیز از آن استفاده کرده‌ایم.
- در عملیه ضرب اعداد نسبی، صورت‌ها و مخرج‌ها در همدیگر ضرب می‌شوند؛ اما در عملیه تقسیم، اول مقسوم علیه معکوس می‌گردد و سپس عملیه ضرب را انجام می‌دهیم.

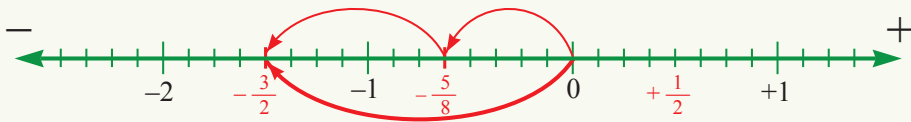
- خاصیت تبدیلی در عملیه جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می‌کند، در حالی که این خاصیت در عملیه تفریق و تقسیم اعداد نسبتی صدق نمی‌کند.
- خاصیت اتحادی در عملیه جمع و ضرب اعداد نسبتی صدق می‌کند، در حالی که این خاصیت در عملیه تفریق و تقسیم اعداد نسبتی صدق نمی‌کند.
- خاصیت توزیعی فقط در عملیه ضرب بالای جمع و تفریق صدق می‌کند و بس.
- تبدیل اعداد نسبتی به اعداد اعشاری، مانند تبدیل کسر عام به اعشاری است و به همین ترتیب تبدیل اعداد اعشاری به اعداد نسبتی، مانند تبدیل اعداد اعشاری به کسر عام.

## تمرین فصل چهارم

1- اعداد نسبتی زیر را روی محور اعداد نشان دهید:

a)  $-\frac{4}{3}$  ، b)  $-\frac{7}{3}$  ، c)  $-\frac{1}{3}$  ، d)  $\frac{2}{3}$  ، e)  $\frac{7}{3}$

2- در محور اعداد زیر، اعداد نسبتی را که با هم جمع شده اند توسط اعداد بنویسید.



3- از عدد نسبتی  $\frac{5}{2}$  عدد نسبتی  $\frac{1}{2}$  را تفریق کنید و در روی محور اعداد نشان دهید.

4- اعداد نسبتی زیر را جمع و سپس خاصیت تبدیلی را در آن بررسی کنید.

$\frac{5}{2} + \frac{1}{3}$  ،  $\frac{3}{5} - \frac{1}{7}$  ،  $-\frac{6}{5} + (\frac{4}{3})$

5- خاصیت اتحادی را در ضرب‌های زیر بررسی کنید.

$\frac{8}{5} \times (\frac{4}{3} \times \frac{6}{10})$  ،  $\frac{1}{2} \times (\frac{3}{5} \times \frac{5}{3})$  ،  $-\frac{5}{6} \times (\frac{3}{2} \times \frac{3}{5})$

6- جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

a)  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \times ( ) = 1$  ،

b)  $(\frac{3}{2} + \frac{-2}{9}) \times ( ) = 1$

c)  $( ) \times \frac{1}{3} = 1$  ،

d)  $(\frac{3}{-2} + \frac{4}{5}) \times \frac{1}{2} = (\frac{1}{2} \times \frac{4}{5}) + ( )$

7- خاصیت توزیعی را در سؤالات زیر بررسی کنید.

$$\frac{6}{5} \times \left( \frac{-3}{4} + \frac{2}{5} \right) , \quad \frac{-5}{8} \times \left( \frac{3}{-2} + \frac{-4}{3} \right) , \quad \frac{5}{-9} \times \left( \frac{-3}{4} - \frac{2}{3} \right)$$

8- خاصیت اتحادی در ست اعداد نسبی، در کدام عملیه‌های زیر صدق نمی‌کند؟

(a) جمع (b) ضرب (c) تفریق (d) تقسیم (e) هیچکدام

9- عدد نسبی  $\frac{-6}{5}$  را به عدد اعشاری تبدیل نموده و در روی محور اعداد نشان دهید؛ همچنین متضاد آن را به شکل اعشاری بنویسید.

10- اعداد اعشاری زیر را به شکل اعداد نسبی بنویسید.

$$0.340 , \quad 2.342 , \quad 5.2345 , \quad 1.23412$$

11- دو عدد اعشاری 3.234 و 4.543 را به شکل اعداد نسبی نشان دهید.

12- خاصیت تبدیلی در کدام عملیه‌های اعداد نسبی زیر صدق نمی‌کند؟  
(a) ضرب (b) جمع (c) تفریق (d) تقسیم

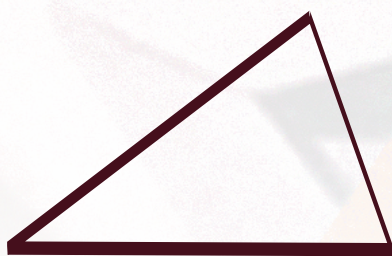
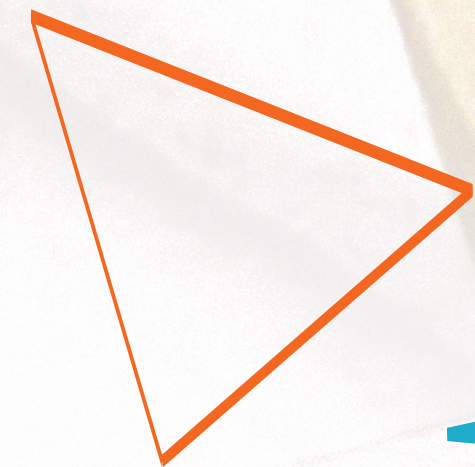
13- خاصیت توزیعی در کدام عملیه اعداد نسبی صدق می‌کند؟  
(a) ضرب بالای جمع (b) ضرب بالای تفریق (c) هر دو درست اند.

14- اعداد اعشاری 1.25 و 2.5 را با اعداد نسبی نشان داده و همچنین متضاد آن‌ها را به شکل اعداد نسبی در روی محور اعداد نشان دهید.



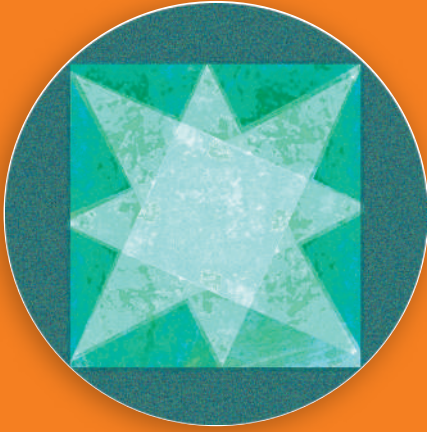
# فصل پنجم

مثلت‌ها و چندضلعی‌ها



مثلث‌ها در اطراف ما هستند.

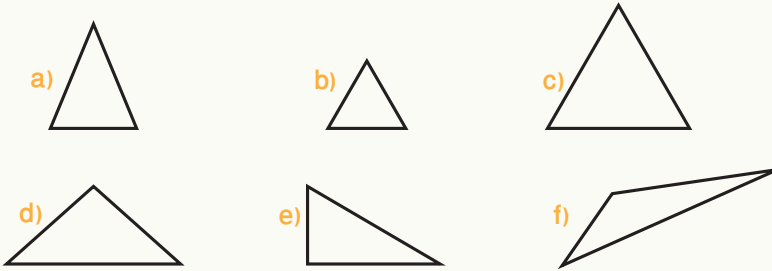
## اقسام مثلث از حیث اضلاع



در شکل مقابل کدام اشکال هندسی را مشاهده می‌کنید؟

### فعالیت

- در شکل‌های زیر طول هر ضلع را اندازه‌گیری کرده و اندازه آن را بنویسید.
- اگر بخواهیم این مثلث‌ها را دسته‌بندی کنیم، کدام مثلث‌ها در یک دسته قرار می‌گیرد؟

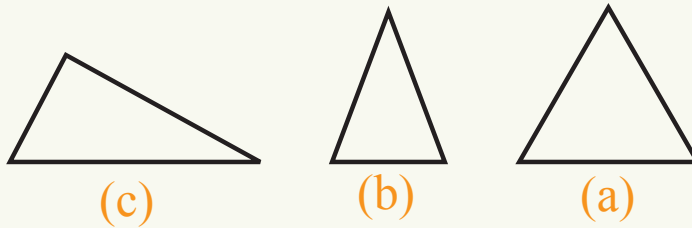


- برای قراردادن مثلث‌ها در هر دسته‌بندی چه خصوصیتی را در نظر گرفته‌اید؟
- زاویه‌های مثلث‌هایی را که اضلاع آن‌ها با هم برابرند، اندازه بگیرید. چه نتیجه‌یی به دست می‌آورید؟
- زاویه‌های مثلث‌هایی را که دو ضلع مساوی دارند، اندازه بگیرید، چه نتیجه‌یی به دست می‌آورید؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که مثلث‌ها را می‌توانیم از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم‌بندی کنیم:

- مثلی که سه ضلع آن با هم مساوی باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود. در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه زاویه آن نیز با هم برابر اند.

- مثلثی که دو ضلع آن با هم مساوی باشند، مثلث متساوی الساقین نامیده می شود، هر یک از ضلع های مساوی در مثلث متساوی الساقین را ساق مثلث و ضلع سوم را قاعده مثلث می نامند. در مثلث متساوی الساقین دو زاویه کنار ساق ها با هم مساوی اند.
  - مثلثی که طول هر سه ضلع آن با هم مساوی نیستند، مثلث مختلف الاضلاع نامیده می شود.
- مثال:** هر یک از مثلث های شکل زیر را نظر به اضلاع شان نام گذاری کنید.

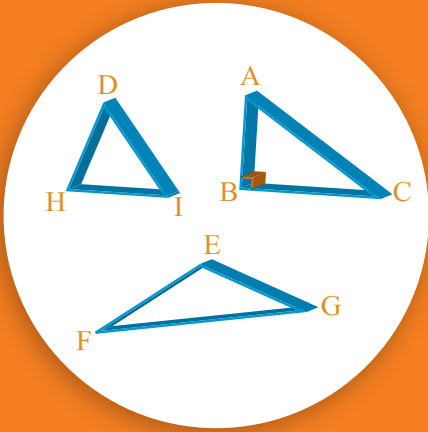


**حل:** ابتدا طول هر ضلع مثلث را اندازه کرده و سپس نام گذاری می کنیم. مثلث a که سه ضلع برابر دارد متساوی الاضلاع، مثلث b که دو ضلع برابر دارد متساوی الساقین، و مثلث c که طول هر سه ضلع آن مختلف می باشد مختلف الاضلاع است.

### تمرین

- 1- یک مثلث متساوی الاضلاع را رسم کنید که هر ضلع آن 4cm باشد.
- 2- یک مثلث متساوی الساقین رسم کنید که دو ضلع مساوی آن هر یک 3cm بوده و ضلع سوم آن کیفی باشد.
- 3- یک مثلث متساوی الساقین را رسم نمایید که یک زاویه آن  $90^\circ$  باشد.
- 4- طول اضلاع یک مثلث به ترتیب 5cm، 4cm و 8cm است. این مثلث به کدام نام یاد می شود؟

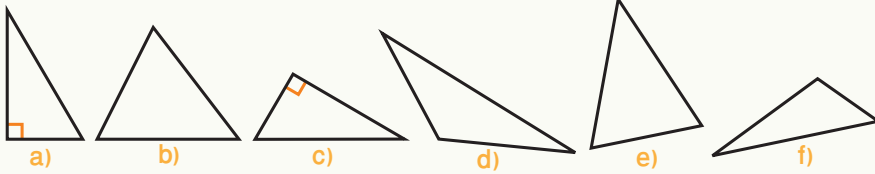
## اقسام مثلث نظر به زاویه



اگر بخواهید که مثلث‌ها را نظر به زاویه نام‌گذاری کنید، زوایای مثلث را با کدام زاویه مقایسه می‌کنید؟

## فعالیت

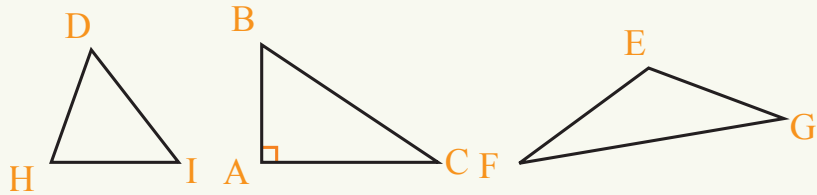
مثلث‌های زیر را در نظر بگیرید.



- ابتدا زاویه‌های هر مثلث را اندازه بگیرید و درجه آن را مشخص کنید.
- زاویه‌های هر یک از مثلث‌ها را با زاویه قائمه مقایسه کنید.
- در کدام مثلث‌ها، تمام زاویه‌های آن کوچک‌تر از زاویه قائمه هستند؟
- کدام یک از مثلث‌ها زاویه قائمه دارد؟
- کدام یک از مثلث‌ها زاویه بزرگ‌تر از زاویه قائمه دارد؟
- در جدول زیر نام مثلث‌ها را بنویسید.

مثلث‌هایی که زاویه کوچک‌تر از زاویه قائمه باشند	مثلث‌هایی که یک زاویه آن بزرگ‌تر از زاویه قائمه باشد	مثلث‌هایی که زاویه‌های آن کوچک‌تر از زاویه قائمه باشند

- مثلث‌ها را از حیث زاویه به سه دسته تقسیم کرده‌اند:
- مثلثی که در آن یک زاویه قائمه وجود دارد، مثلث قائم‌الزاویه نامیده می‌شود.
  - مثلثی که در آن یک زاویه بزرگ‌تر از  $90^\circ$  وجود دارد، مثلث منفرج‌الزاویه نامیده می‌شود.
  - مثلثی که تمام زاویه‌های آن کوچک‌تر از  $90^\circ$  است، مثلث حادالزاویه نامیده می‌شود.
- مثال:** کدام یک از مثلث‌های زیر حادالزاویه، قائم‌الزاویه و منفرج‌الزاویه است؟



- حل:** ابتدا زاویه‌های مثلث‌ها را اندازه می‌گیریم:
- مثلث BAC که یک زاویه آن  $90^\circ$  می‌باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.
  - مثلث EGF که یک زاویه آن بزرگ‌تر از  $90^\circ$  است، مثلث منفرج‌الزاویه می‌باشد.
  - مثلث DHI که تمام زاویه‌های آن کوچک‌تر از  $90^\circ$  است، مثلث حادالزاویه می‌باشد.
- در تقسیم مثلث‌ها از حیث زاویه، زاویه قائمه را معیار قرار می‌دهند.

## تمرین

- 1- مثلثی را رسم کنید که یک ضلع آن  $3\text{cm}$  بوده و دو زاویه مجاور آن هر یک  $60^\circ$  باشد، نوعیت این مثلث را مشخص کنید.
- 2- مثلثی که دو ضلع آن با هم مساوی و زاویه بین آن‌ها  $90^\circ$  است، چه نوع مثلثی می‌باشد، از حیث اضلاع و زوایا، نوعیت آن را تعیین کنید.
- 3- مثلثی رسم کنید که یک زاویه آن  $120^\circ$  و ضلع مجاور این زاویه  $4\text{cm}$  باشد. چند تا از این مثلث‌ها رسم کرده می‌توانید؟
- 4- یک مثلث منفرج‌الزاویه رسم کنید که زاویه منفرجه آن  $100^\circ$  و طول دو ضلع مجاور این زاویه  $4\text{cm}$  و  $6\text{cm}$  باشد.

## میانہ، ارتفاع و ناصف الزاویہ مثلث

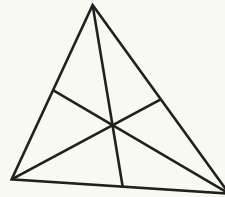
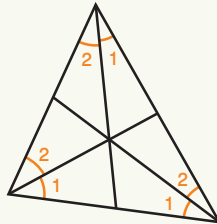
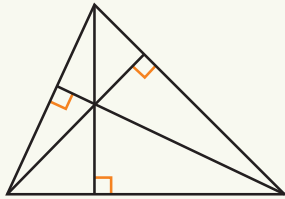


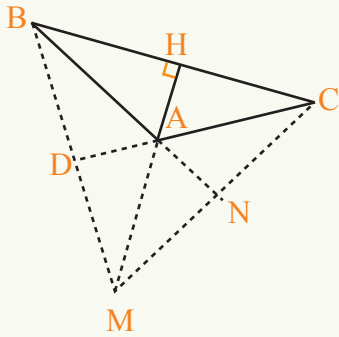
تا به حال سعی کرده‌اید، یک پینسل را عمود گذاشته و یک شی مثلثی شکل را روی آن قرار دهید؟

### فعالیت

- یک مثلث کیفی  $\triangle ABC$  رسم کنید.
- سه ارتفاع این مثلث را ترسیم کنید.
- آیا نقطه‌یی را پیدا کرده می‌توانید که هر سه ارتفاع مثلث در آن نقطه همدیگر را قطع کنند؟
- سه میانه این مثلث را رسم کنید، آیا هر سه میانه در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟
- سه ناصف‌الزاویه این مثلث را رسم کنید. آیا سه ناصف‌الزاویه، یک دیگر را در یک نقطه نیز قطع می‌کنند؟

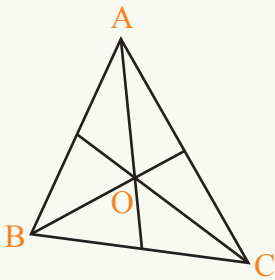
فعالیت بالا نشان می‌دهد که در یک مثلث، سه ارتفاع، سه میانه و سه ناصف‌الزاویه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.





**مثال اول:** یک مثلث منفرج الزاویه  $\triangle ABC$  را رسم کنید. نقطه‌یی را پیدا کنید که در آن سه ارتفاع همدیگر را قطع می‌کنند.

**حل:** چون در یک مثلث منفرج الزاویه، بعضی ارتفاع‌ها در خارج مثلث واقع‌اند، نقطه تقاطع آن‌ها نیز خارج از مثلث قرار دارد.



**مثال دوم:** یک مثلث حادالزاویه کیفی  $\triangle ABC$  را رسم کرده و نقطه تقاطع میانه‌های آن را پیدا کنید.

**حل:** یک مثلث حاد الزاویه کیفی را رسم کرده؛ سپس میانه‌های آن را رسم می‌کنیم، دیده می‌شود که میانه‌ها در یک نقطه داخل مثلث همدیگر را قطع می‌کنند؛ این همان نقطه‌یی است که شی مثلث‌شکل در آن نقطه بالای نوک پنسل به حالت تعادل قرار می‌گیرد، از این رو گفته می‌توانیم که نقطه تقاطع میانه‌های مثلث، مرکز ثقل مثلث می‌باشد.

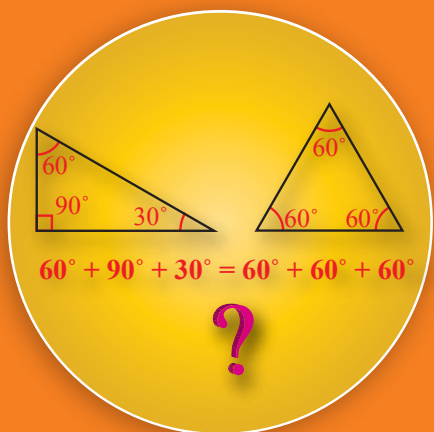
میانه‌ها، ارتفاع‌ها و ناصف‌الزاویه‌های یک مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

## تمرین

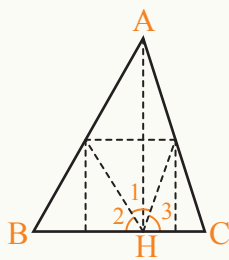
- 1- یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و نقطه تقاطع میانه‌ها را در آن نشان دهید.
- 2- ارتفاع‌های مثلثی را رسم کنید که اضلاع آن 5cm، 3cm و 6cm استند.
- 3- یک مثلث متساوی‌الساقین که طول هر ساق آن 4cm و قاعده آن 6cm است رسم کنید و نقطه تقاطع ناصف‌الزواای آن را پیدا کنید.
- 4- یک مثلث متساوی‌الاضلاع ترسیم کرده و میانه‌ها، ارتفاع‌ها و ناصف‌الزاویه‌های آن را نشان دهید. چه نتیجه‌یی در آن مشاهده می‌کنید؟

## مجموع زاویه‌های داخلی مثلث

آیا مجموع زاویه‌های داخلی تمام مثلث‌ها با هم مساوی اند؟



### فعالیت



- یک مثلث کیفی  $\triangle ABC$  را روی کاغذ رسم نموده و آن را قیچی نمایید.
- از رأس  $A$ ، ارتفاع وارد بر قاعده را رسم کنید و محل تقاطع ارتفاع با قاعده را  $H$  بنامید.
- مثلث را طوری قات کنید که  $A$  روی  $H$  قرار گیرد. (خط‌های نقطه چین در شکل، محل قات کردن را نشان می‌دهند).
- این بار مثلث را طوری قات کنید که رأس  $B$  و رأس  $C$  نیز روی  $H$  قرار گیرند.
- از روی قات کردن، جواب سؤال‌های زیر را پیدا کنید.

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = ? \quad , \quad \hat{A} = ? \quad , \quad \hat{B} = ? \quad , \quad \hat{C} = ?$$

- از این رو داریم که:  $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$
- زیرا زاویه‌یی که در یک طرف خط مستقیم تشکیل می‌شود  $180^\circ$  است.
- زاویه‌های مثلث را با نقاله اندازه بگیرید و نتیجه‌های بالا را بررسی کنید.

از فعالیت بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

مجموع زوایای داخلی یک مثلث مساوی به  $180^\circ$  است و هر یک از زاویه‌های داخل مثلث را یک زاویه داخلی یا به صورت مختصر زاویه مثلث می‌نامند.

**مثال اول:** در مثلث متساوی‌الساقین  $\triangle ABC$ ، اندازه یکی از زاویه‌های مساوی آن برابر به  $70^\circ$  است، اندازه زاویه سومی مثلث را پیدا کنید.

**حل:** چون مثلث، متساوی الساقین است، بنا بر این دو زاویه مجاور دو ساق با هم برابرند.

$$\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ \quad \text{پس:}$$

چون مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث  $180^\circ$  است، می‌توان نوشت که:

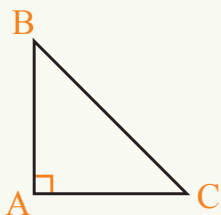
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \quad , \quad 70^\circ + 70^\circ + \hat{A} = 180^\circ \quad , \quad 140^\circ + \hat{A} = 180^\circ$$

از این جا معلوم می‌شود که  $\hat{A} = 40^\circ$  است.

**مثال دوم:** زاویه‌های حاده یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی الساقین چند درجه است؟

**حل:** چون مثلث قائم‌الزاویه است، یک زاویه آن  $90^\circ$  و دو زاویه دیگر آن حاده می‌باشند،

مانند شکل زیر:



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$90^\circ + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$$

چون مثلث متساوی الساقین است:

$$\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$$

پس هر زاویه حاده آن  $45^\circ$  می‌باشد.

## فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید که هر ضلع قائم آن 5cm باشد. دو زاویه دیگر این مثلث چند درجه است؟ ابتدا بدون نقاله و سپس توسط نقاله اندازه زاویه‌ها را دریابید.

مجموع زاویه‌های داخلی در تمام مثلث‌ها  $180^\circ$  است و به نوعیت مثلث ارتباط ندارد.

## تمرین

1- اگر در یک مثلث متساوی الساقین، زاویه بین دو ساق برابر به  $50^\circ$  باشد، هر یک از زاویه‌های دیگر آن چند درجه است؟

2- در یک مثلث متساوی الاضلاع، هر زاویه آن چند درجه است؟

3- اگر در یک مثلث متساوی الساقین، زاویه بین دو ساق  $70^\circ$  باشد، دو زاویه دیگر آن هر کدام چند درجه است؟

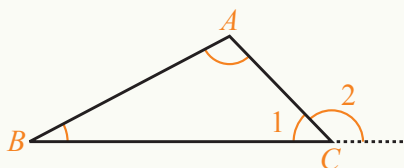
## زاویه خارجی یک مثلث



چند نوع زاویه را در شکل مقابل می بینید؟

### فعالیت

• مثلث  $ABC$  را در نظر بگیرید. ضلع  $\overline{BC}$  را از نقطه  $C$  امتداد می دهیم تا زاویه  $C_2$  تشکیل شود.



• به سؤالهای زیر پاسخ دهید:

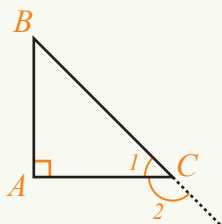
$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = ?$$

$$\hat{C}_1 + \hat{A} + \hat{B} = ?$$

• از دو تساوی بالا چه نتیجه یی به دست می آید؟

در هر مثلث زاویه یی که از امتداد یکی از اضلاع با ضلع دیگر مثلث تشکیل می شود، زاویه خارجی نام دارد. اندازه هر زاویه خارجی در یک مثلث مساوی به مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن است.

**مثال اول:** در یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین می خواهیم اندازه زاویه خارجی را که از امتداد وتر آن به دست می آید، اندازه بگیریم. آیا در این وضعیت فرق می کند که وتر را به کدام جهت امتداد دهیم؟



**حل:** چون مثلث قائم الزاویه است، یک زاویه  $90^\circ$  دارد؛ چون متساوی الساقین است، هر یک از زاویه های حاده آن  $45^\circ$  است.

$$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\hat{C}_2 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$$

چون دو زاویه حاده با هم مساوی اند:

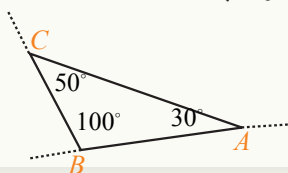
زاویه‌های خارجی آن‌ها نیز با هم مساوی اند و فرقی نمی‌کند که زاویه خارجی در کدام طرف وتر قرار داشته باشد.

**مثال دوم:** در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 50^\circ$  و  $\hat{B} = 70^\circ$  است. زاویه خارجی  $C$  چند درجه است؟

$$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B} = 50^\circ + 70^\circ = 120^\circ$$

## فعالیت

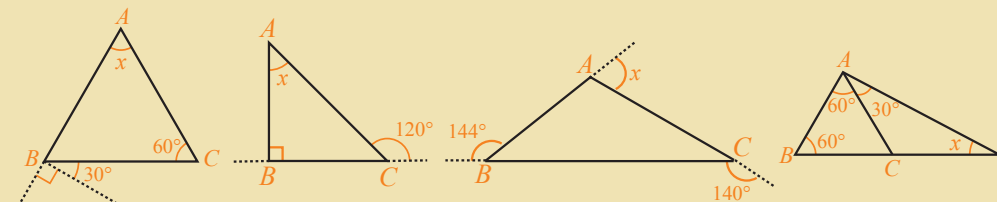
اندازه هر سه زاویه خارجی مثلث مختلف‌الاضلاع زیر را پیدا کنید.



هر یک از زاویه خارجی یک مثلث، مساوی به مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن می‌باشد.

## تمرین

1- در اشکال زیر، اندازه زاویه‌هایی را که به علامت  $x$  مشخص شده اند، به دست آورید:



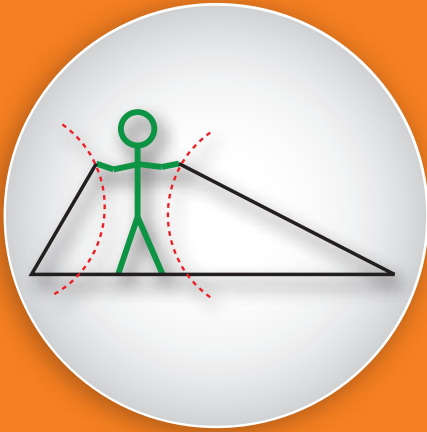
2- اندازه زاویه‌های خارجی در مثلث متساوی‌الاضلاع چه رابطه‌یی با هم دارند؟

3- یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید که اضلاع آن 3cm، 4cm و 5cm باشد؛ سپس مجموع زاویه‌های خارجی آن را پیدا نمایید.

4- با چند مثال نشان دهید که مجموع زاویه‌های خارجی مثلث‌ها برابر و ثابت اند.

5- مجموع زاویه‌های خارجی در یک مثلث، چند برابر مجموع زاویه‌های داخلی آن می‌باشد؟

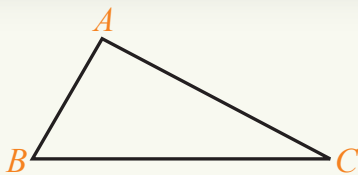
## رابطه بین اضلاع یک مثلث



آیا مثلثی وجود دارد که مجموع دو ضلع آن از ضلع سوم کوچک تر باشد؟

### فعالیت

- یک قطعه خط به طول 7cm رسم کرده، آن را  $\overline{AB}$  بنامید.
- از نقطه A یک دایره به شعاع 4cm و از نقطه B دایره‌یی به شعاع 5cm رسم کنید.
- محل تقاطع دو دایره را C بنامید و آن را به A و B وصل کنید.
- مثلث  $\triangle ABC$  را در نظر گرفته و بگویید طول  $\overline{AC}$  و طول  $\overline{BC}$  چند است؟
- این بار از نقطه A یک دایره‌یی به شعاع 4cm و از نقطه B دایره‌یی به شعاع 2cm رسم کنید.
- آیا این دو دایره یک دیگر را قطع می کنند و مثلث تشکیل می شود؟
- اگر از A دایره‌یی به شعاع 4cm و از B دایره‌یی به شعاع 3cm رسم کنیم، آیا دایره‌ها همدیگر را قطع می کنند؟
- چه تفاوتی میان سه حالت بالا وجود دارد که در یک حالت توانستیم مثلث تشکیل دهیم، و در دو حالت دیگر نتوانستیم مثلث را تشکیل دهیم؟



در فعالیت بالا دیدیم که برای تشکیل یک مثلث مجموع دو ضلع یک مثلث باید از ضلع سوم بزرگ تر باشد؛ یعنی در مثلث  $\triangle ABC$  باید مجموع اندازه اضلاع  $\overline{AC}$  و  $\overline{BC}$  از اندازه  $\overline{AB}$  بزرگ تر باشد.

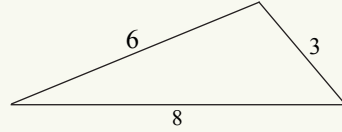
**مثال اول:** مثلثی رسم کنید که اضلاع آن 3cm، 6cm و 8cm باشد؟

**حل:** باید ببینیم که آیا رابطه اضلاع مثلث برای تمام اضلاع برقرار است یا خیر؟

$$3 + 6 = 9 \quad , \quad 9 > 8$$

$$3 + 8 = 11 \quad , \quad 11 > 6$$

$$6 + 8 = 14 \quad , \quad 14 > 3$$



پس می توان این مثلث را رسم کرد. شکل بالا را مشاهده کنید.

**مثال دوم:** آیا می توانید مثلثی رسم کنید که اضلاع آن 3cm، 6cm و 2cm باشد؟

$$3 + 6 = 9 \quad , \quad 9 > 2$$

$$2 + 6 = 8 \quad , \quad 8 > 3$$

$$3 + 2 = 5 \quad , \quad 5 < 6$$

**حل:**

برای این که بتوانیم یک مثلث را رسم کنیم باید هر سه شرط برقرار باشد؛ یعنی: مجموع طول دو ضلع باید از طول ضلع سوم بزرگ تر باشد و چون در این جا  $3 + 2 = 5 < 6$  است، مثلث تشکیل نمی شود.

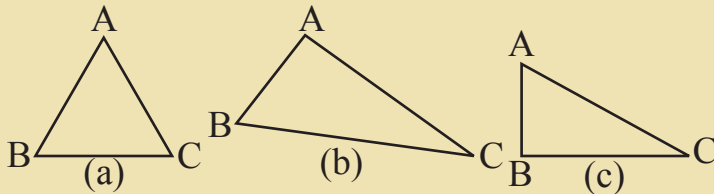
اگر مجموع طول دو ضلع از ضلع سوم کوچک تر باشد، مثلث تشکیل نمی شود.

## تمرین

1- آیا می توان مثلثی رسم کرد که دو ضلع آن 5cm و 7cm و ضلع سوم آن به اندازه نصف مجموع دو ضلع دیگر آن باشد.

2- چرا با سه قطعه خطی که یک قطعه خط از مجموع دو قطعه خط دیگر بزرگ تر باشد، نمی توان یک مثلث را رسم کرد؟

3- با اندازه گیری اضلاع مثلث های زیر، رابطه بین اضلاع مثلث را بررسی کنید.



4- یک مثلث قائم الزاویه رسم کنید که اضلاع زاویه قائم آن 5cm و 3cm و طول وتر آن 7cm باشد؟

5- آیا می توانید یک مثلث متساوی الساقین رسم کنید که طول قاعده آن سه برابر یکی از ساق های آن باشد؟

## چندضلعی‌ها (مضلع‌ها)



در تصویر مقابل، چند نوع چندضلعی را مشاهده می‌کنید؟

### فعالیت

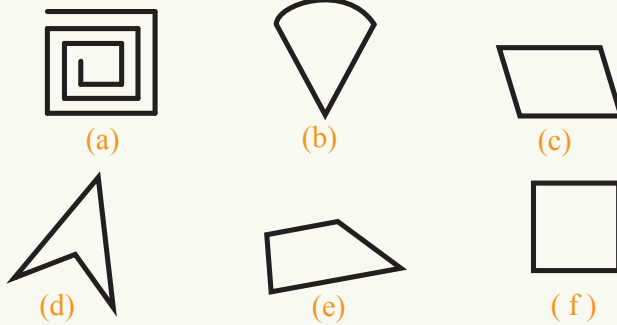
• به جدول زیر نگاه کرده، شکل‌های داخل ستون‌ها را با هم مقایسه کنید.

چند ضلعی نیست	چند ضلعی است	چند ضلعی منظم

- شکل‌های ستون اول و دوم را از چپ به راست با هم مقایسه کنید.
- در چه صورت یک شکل را چندضلعی می‌نامیم و در چه صورتی، یک شکل چندضلعی نیست؟
- زاویه‌های یک چندضلعی منظم را اندازه بگیرید و بگویید که با هم چه رابطه‌یی دارند؟ آیا این خصوصیات در تمام چندضلعی‌ها وجود دارند؟

در فعالیت آغاز این درس دیده می‌شود که یک چندضلعی عبارت از خط منکسر بسته‌یی است که فقط یک ناحیه بسته را در بر دارد. اگر اندازه زاویه‌ها و اضلاع یک چندضلعی با هم مساوی باشند، چندضلعی منظم نامیده می‌شود و چندضلعی‌یی که اضلاع و زوایای آن مساوی نباشند، به نام چندضلعی غیر منظم یاد می‌گردد.

**مثال:** کدام یک از شکل‌های زیر یک چندضلعی است؟



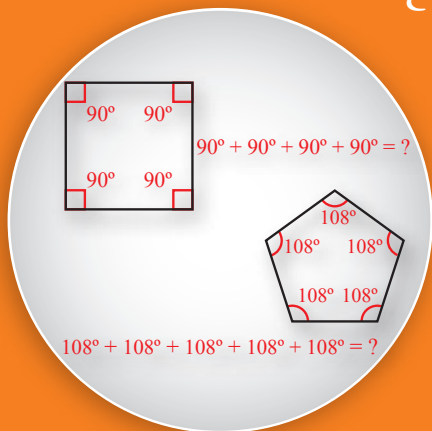
**حل:**

شکل a یک شکل بسته نیست؛ پس یک چندضلعی نیست.  
 شکل b خط منکسر بسته نیست؛ پس یک چندضلعی نیست.  
 شکل c خط منکسر بسته است؛ پس یک چندضلعی است.  
 شکل d خط منکسر بسته است؛ پس یک چندضلعی می‌باشد.  
 شکل e خط منکسر بسته است؛ پس چندضلعی است.  
 شکل f خط منکسر بسته است و در میان تمام اشکال بالا یگانه شکلی است که اضلاع آن با هم مساوی اند، بنابر این یک چندضلعی منظم است؛ سایر چند ضلعی‌های بالا به نام چندضلعی غیر منظم یاد می‌شوند که از تقاطع چند خط تشکیل شده‌اند.  
 چندضلعی‌ها، ناحیه‌های بسته‌یی اند که از تقاطع چند قطعه خط تشکیل می‌شوند و هیچ یک از دو خط آن در امتداد یک خط مستقیم قرار ندارد؛ همچنان هر رأس مصلع فقط و فقط نقطه تقاطع دو قطعه خط است.

## تمرین

- 1- چند ضلعی‌هایی را که می‌شناسید، نام ببرید.
- 2- در میان چند ضلعی‌هایی که می‌شناسید، کدام‌های شان چند ضلعی منظم اند؟
- 3- آیا مستطیل، دوزنقه و معین چندضلعی‌های منظم استند چرا؟
- 4- آیا یک مثلث قائم الزاویه متساوی‌الساقین یک چندضلعی منظم است؟ چرا؟
- 5- آیا یک مثلث متساوی‌الاضلاع، یک چندضلعی منظم است؟ چرا؟
- 6- اگر سه شکل مستطیل، دایره و مربع را در نظر بگیریم، کدام یک آن‌ها، چندضلعی نیست و کدام یک چندضلعی منظم و کدام یک چندضلعی غیر منظم است؟

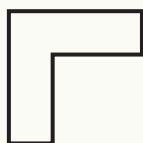
## مجموع زاویه‌های داخلی یک مضلع



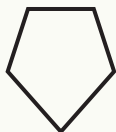
در هر یک از مضلع‌های مقابل مجموع  
زاویای داخلی آن چند درجه است؟

### فعالیت

• در اشکال زیر هر ضلع را امتداد دهید.



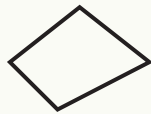
(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

• شکل‌های (e) و (a) چه فرقی با شکل‌های (b)، (c) و (d) دارند؟

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم که در بعضی از چند ضلعی‌ها، امتداد برخی اضلاع از داخل چند ضلعی عبور می‌کند که آن‌ها را چند ضلعی مقعر می‌گویند و چند ضلعی بی‌که امتداد اضلاع آن از بین چند ضلعی عبور نمی‌کند، آن را چندضلعی محدب می‌نامند. ناگفته نماند که اگر در چندضلعی‌ها نام مقعر یا محدب ذکر نگردد، منظور چند ضلعی محدب است.

### فعالیت

- چهار ضلعی ABCD را در نظر بگیرید.
- زاویه‌های داخلی این چهار ضلعی را با نقاله اندازه گرفته و با هم جمع کنید.
- یک قطر چهار ضلعی را رسم کنید. این قطر، چهارضلعی را به چند مثلث تقسیم می‌کند؟
- مجموع زاویه‌های داخلی را بدون استفاده از نقاله پیدا کنید.
- اگر به جای آن قطر، یک قطر دیگر از این چهارضلعی را رسم می‌کردید، آیا نتیجه متفاوت می‌بود؟

• یک پنج ضلعی رسم کنید. دو قطر کیفی این پنج ضلعی را از یک رأس رسم کنید و مجموع زاویه‌های داخلی پنج ضلعی را پیدا کنید.

تعداد اضلاع	مجموع زوایای داخلی
3	$1 \times 180^\circ$
4	$2 \times 180^\circ$
5	$3 \times 180^\circ$
6	$4 \times 180^\circ$
.	.
.	.
.	.

• یک شش ضلعی رسم کنید و بگویید که چند قطر باید رسم شود تا مجموع زاویه‌های داخلی شش ضلعی به دست آید.

• جدول مقابل را در کتابچه‌های خود نوشته و آن را تکمیل کنید. در هر ردیف چه عددی در  $180$  ضرب می‌شود، این عدد چه رابطه‌ی با تعداد اضلاع چندضلعی دارد؟

• آیا حدس زده می‌توانید که مجموع زوایای داخلی هشت ضلعی چند درجه است؟

• مجموع زوایای داخلی  $n$  ضلعی چقدر است؟

از فعالیت بالا معلوم گردید که  $S = (n - 2) \times 180^\circ$  می‌باشد در اینجا  $S$  مجموع زوایای داخلی و  $n$  تعداد اضلاع چندضلعی را نشان می‌دهد.

**مثال:** مجموع زاویه‌های داخلی یک 10 ضلعی چند درجه است؟ همچنان معلوم کنید که چند برابر یک زاویه قائمه می‌شود؟

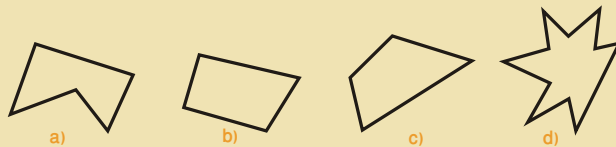
**حل:**  $S = (n - 2) \times 180^\circ = (10 - 2) \times 180^\circ = 8 \times 180^\circ = 1440^\circ$

که 16 برابر یک زاویه قائمه است.

مجموع زاویه‌های داخلی یک چند ضلعی مربوط به تعداد اضلاع آن است.

## تمرین

1- در اشکال زیر، چند ضلعی محدب و چند ضلعی مقعر را نشان دهید.

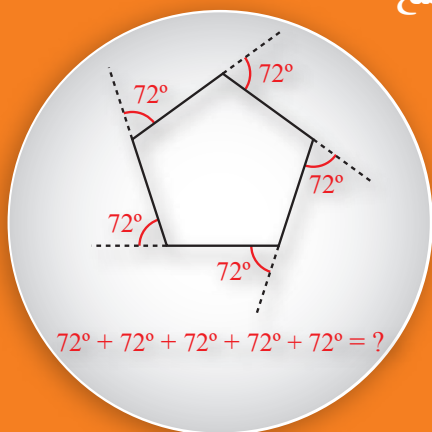


2- مجموع زوایای داخلی یک 12 ضلعی را دریابید.

3- مجموع زوایای داخلی یک 8 ضلعی چند برابر یک زاویه قائمه می‌شود؟

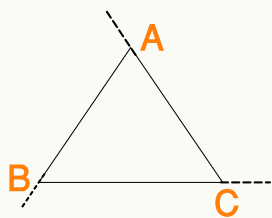
4- مجموع زوایای داخلی یک مثلث، یک مربع، یک مستطیل و یک 20 ضلعی را از روی فورمول بالا دریابید.

## مجموع زاویه‌های خارجی یک مضلع



آیا می‌توانید بگویید که مجموع زوایای خارجی یک چندضلعی چند درجه است؟

### فعالیت

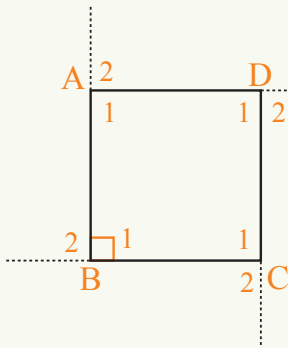


- مثلث  $\triangle ABC$  را در نظر بگیرید.
- ضلع  $\overline{AB}$  را از  $A$  به طرف  $B$  امتداد دهید.
- ضلع  $\overline{BC}$  را از  $B$  به طرف  $C$  امتداد دهید.
- ضلع  $\overline{AC}$  را از  $C$  به طرف  $A$  امتداد دهید.
- سه زاویه خارجی این مثلث را مشخص و نامگذاری کنید.
- جدول زیر را در کتابچه‌های خود نوشته و آن را تکمیل کنید.

چند ضلعی‌ها	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های خارجی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی
سه ضلعی	$\dots \times 180^\circ = ?$	.....	..... + ..... = ?
چهار ضلعی	$\dots \times 180^\circ = ?$	.....	..... + ..... = ?
پنج ضلعی	$\dots \times 180^\circ = ?$	.....	..... + ..... = ?
شش ضلعی	$\dots \times 180^\circ = ?$	.....	..... + ..... = ?
...	...	...	...

- یک چهار ضلعی رسم کرده و زاویه‌های خارجی آن را نشان دهید.
- یک پنج ضلعی رسم کرده و زاویه‌های خارجی آن را نشان دهید.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که: مجموع زاویه‌های خارجی در یک چندضلعی  $360^\circ$  بوده و به تعداد اضلاع ارتباط ندارد.



**مثال اول:** مجموع زوایای خارجی یک مربع را اولاً از روی رسم پیدا نمایید و سپس آن را از روی فورمول دریافت کرده و با هم مقایسه کنید.

**حل:** همان طوری که می‌دانیم مجموع زوایا به یک طرف خط مستقیم  $180^\circ$  است؛ پس:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

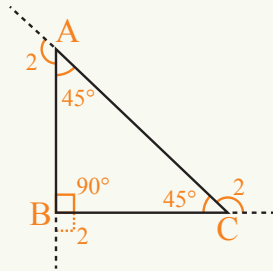
$$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

پس مجموعه زوایای خارجی مربع مساوی است به:  $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$

**مثال دوم:** مجموع زوایای خارجی یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین را دریابید.

**حل:** مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ABC را رسم نموده و اضلاع آن را تا آنجا امتداد دهید که زوایای خارجی آن تشکیل گردد، دیده می‌شود که:



$$\hat{A}_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\hat{B}_2 = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\hat{C}_2 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

از این رو مجموع زوایای خارجی مثلث برابر است به:

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 135^\circ + 90^\circ + 135^\circ = 360^\circ$$

مجموع زوایای خارجی هر مضلع (چند ضلعی)  $360^\circ$  است و به تعداد اضلاع آن ارتباط ندارد.

## تمرین

- 1- مجموع زوایای خارجی یک مثلث متساوی الاضلاع را دریابید.
- 2- اگر در یک مثلث متساوی الساقین، زاویه بین دو ساق  $80^\circ$  باشد، مجموع زوایای خارجی آن را پیدا کنید.
- 3- مجموع زوایای خارجی یک 10 ضلعی منظم را پیدا کنید.
- 4- هر یک از زوایای خارجی یک مستطیل چند درجه است؟ مجموع آن‌ها را به دست آورید.

## اشکال انطباق پذیر



همان طور که می دانید اکثر قفل ها دارای دو یا سه کلید اند. چرا؟ این کلیدها با همدیگر چه رابطه دارند که قفل را باز می کنند، آیا در جواب های زیر، جواب صحیح وجود دارد؟

- (الف) زیرا این کلیدها دارای عین رنگ اند.  
 (ب) زیرا دارای عین درازی اند.  
 (پ) زیرا دارای عین دندانها اند.  
 (ت) زیرا دارای عین ضخامت اند.  
 (ج) ب، پ و ت درست اند.

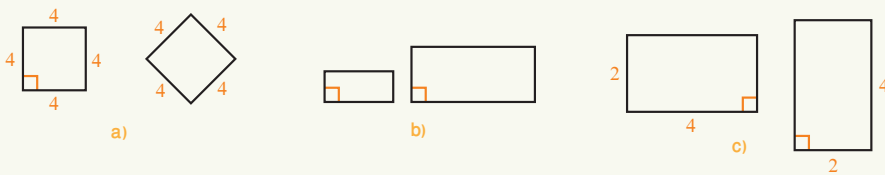
## فعالیت

- یک مربع روی کاغذ رسم نموده که هر ضلع آن 4cm باشد. نام آن را (الف) بگذارید.
- یک مربع دیگر روی کاغذ رسم کنید که هر ضلع آن 6cm باشد. نام آن را (ب) بگذارید.
- یک مربع دیگر نیز روی کاغذ رسم کنید که هر ضلع آن 4cm باشد. نام آن را (پ) بگذارید.
- این مربع ها را قیچی کرده و دو به دو بالای همدیگر گذاشته و با هم مقایسه کنید.

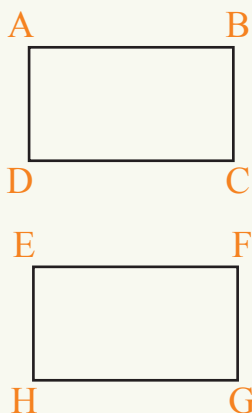
برای نمایش انطباق پذیری دو شکل از علامت  $(\cong)$  استفاده می شود.

**مثال اول:** در اشکال زیر اشکالی را که با هم انطباق پذیر اند، مشخص کنید. (اعداد مربوطه، اندازه طول را به سانتی متر نشان می دهند).

**حل:** جوهره های اشکال (a) و (c) با هم انطباق پذیر اند؛ اما اشکال (b) با هم انطباق پذیر نیستند.



**مثال دوم:** یک مستطیل کیفی رسم کنید و سپس بگویید چگونه می توان یک مستطیل دیگری که با مستطیل اولی انطباق پذیر باشد رسم کرد؟



**حل:** این کار را به دو روش انجام می‌دهیم.

1- مستطیل کیفی ABCD را به رنگ روشن رسم کرده؛ سپس یک ورق کاغذ شفاف را بالای شکل اولی قرار می‌دهیم و از روی آن، شکل مستطیل را رسم می‌کنیم. حالا این دو شکل با هم انطباق‌پذیر اند.

2- چون می‌دانیم که زاویه‌های مستطیل هر کدام  $90^\circ$  است، زاویه قائمه E را رسم کرده و به اندازه دو ضلع مجاور مستطیل اولی، به طور مثال از اضلاع AB و AD عمودهای جدید جدا نموده و اضلاع EF و EH را به دست می‌آوریم؛ بعد از نقاط F و H توسط پرکار به اندازه اضلاع اولی BC و DC اضلاع FG و HG را رسم می‌کنیم.

اکنون مستطیل دومی EFGH با مستطیل ABCD انطباق‌پذیر است.

دو شکلی که کاملاً بر هم منطبق می‌باشند، یعنی یکدیگر را می‌پوشانند، اشکال انطباق‌پذیر نامیده می‌شوند.

## تمرین

- 1- دو مربع که با هم انطباق‌پذیر باشند رسم کنید.
- 2- دو لوزی داده شده است، چطور بدانیم که با هم انطباق‌پذیراند؟
- 3- دو مثلث انطباق‌پذیر را رسم کنید.
- 4- یک دایره به شعاع 4cm رسم کرده؛ سپس یک دایره دیگر ترسیم کنید که با دایره اولی انطباق‌پذیر باشد.

## انطباق پذیری دو مثلث در حالتی که دو ضلع و زاویه بین آن‌ها مساوی باشد

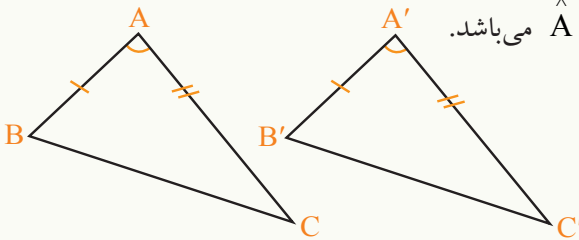


برای آن که ببینیم آیا دو باغچه در شکل انطباق پذیر استند یا خیر، آیا می‌توانیم یکی از آن شکل‌ها را بلند کنیم روی دیگری قرار دهیم؟

### فعالیت

• در دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  شکل زیر:

$\widehat{A} = \widehat{A'}$  و  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ،  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  می‌باشد.



• یک کاغذ نازک برداشته، روی مثلث  $\triangle ABC$  قرار دهید و از روی مثلث  $\triangle ABC$  آن را قطع کنید و آن را  $A''B''C''$  بنامید.

• رأس  $A'$  را روی  $A''$  قرار دهید.

• آیا دو ضلع  $A'B'$  روی  $A''B''$  و  $A'C'$  روی  $A''C''$  قرار می‌گیرند؟ چرا؟

• آیا رأس  $B'$  روی  $B''$  و  $C'$  روی  $C''$  قرار می‌گیرد؟ چرا؟

• دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  چه رابطه‌یی با هم دارند؟

• دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle A''B''C''$  چه رابطه‌یی با هم دارند؟ چرا؟

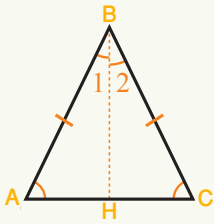
• دو مثلث  $\triangle A'B'C'$  و  $\triangle A''B''C''$  چه رابطه‌یی با هم دارند؟ چرا؟

از فعالیت بالا می‌توان چنین نتیجه گرفت:

اگر دو ضلع و زاویه بین این دو ضلع یک مثلث، با دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلع مثلث دیگر مساوی باشند این دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.

### مثال:

در شکل زیر  $\overline{AB} = \overline{BC}$  و  $\overline{BH}$  ناصف الزاویه  $\triangle ABC$  است، ثابت کنید که دو مثلث  $\triangle ABH \cong \triangle HBC$

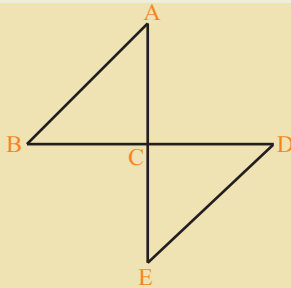


**حل:** در مثلث های  $\triangle ABH$  و  $\triangle HBC$ :  $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$  زیرا زاویه  $B$  نصف گردیده است.

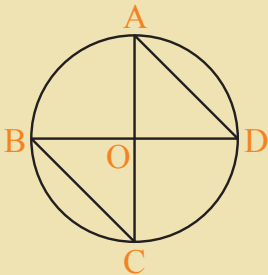
اضلاع  $BA = BC$  که مثال داده شده است و  $BH = BH$  (ضلع مشترک)

از اینجا معلوم می شود که در دو مثلث  $\triangle ABH$  و  $\triangle HBC$  که دو ضلع و زاویه بین آن ها با هم مساوی اند با هم انطباق پذیر می باشند.

### تمرین



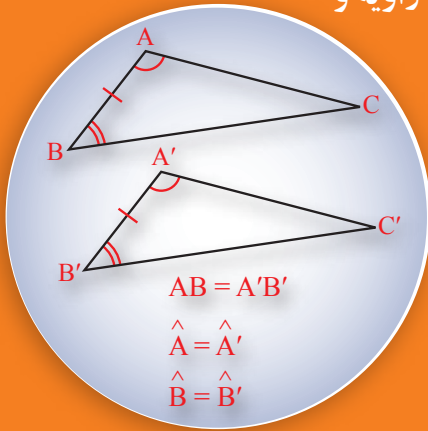
1- در شکل مقابل  $\overline{AE} = \overline{BD}$  است و همدیگر را در نقطه  $C$  تقصیف می کنند و نیز دو خط  $\overline{AE}$  و  $\overline{BD}$  بر همدیگر عمود اند. ثابت کنید که  $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ .



2- اگر دو قطر دایره با همدیگر عمود باشند و نقاط تقاطع این دو قطر با محیط دایره را قرار شکل به هم وصل کنیم، آیا دو مثلث  $\triangle AOD$  و  $\triangle BOC$  با هم انطباق پذیر اند؟

3- یک زمین مستطیل شکل را چگونه به دو مثلث انطباق پذیر تقسیم می کنید؟

## انطباق پذیری دو مثلث از حیث دو زاویه و ضلع بین شان



اگر در دو مثلث دو زاویه و ضلع بین آنها با هم مساوی باشند، چگونه می‌توانیم ثابت کنیم که این دو مثلث، انطباق‌پذیر اند؟

### فعالیت

- مثلث  $\triangle ABC$  را که در آن ضلع  $BC = 4 \text{ cm}$ ،  $\hat{B} = 60^\circ$  و زاویه  $\hat{C} = 80^\circ$  است رسم کنید.
- مثلث  $\triangle A'B'C'$  را که در آن  $B'C' = 4 \text{ cm}$  و  $\hat{B}' = 60^\circ$  و  $\hat{C}' = 80^\circ$  باشد، رسم کنید.
- یک کاغذ شفاف روی مثلث  $ABC$  بگذارید و از کناره‌های مثلث  $ABC$  آن را ببرید. این مثلث را  $A''B''C''$  بنامید.
- رأس  $B''$  را روی  $B'$  بگذارید. آیا  $C''$  روی  $C'$  قرار می‌گیرد؟ چرا؟
- آیا ضلع  $\overline{A''B''}$  بر  $\overline{A'B'}$  منطبق می‌شود؟ چرا؟
- آیا ضلع  $\overline{A''C''}$  بر  $\overline{A'C'}$  منطبق می‌شود؟ چرا؟

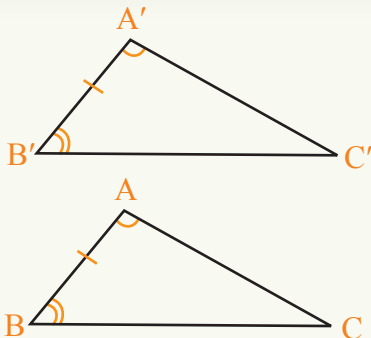
از فعالیت بالا نتیجه می‌شود که:

اگر دو زاویه و ضلع بین آنها در مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها در مثلث دیگر مساوی باشند، دو مثلث انطباق‌پذیر اند.

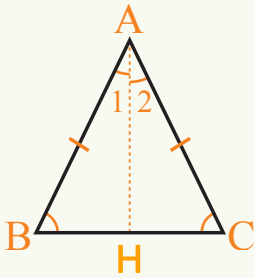
چنانکه در شکل مقابل، داریم:

$$AB = A'B' , \hat{A} = \hat{A}' , \hat{B} = \hat{B}'$$

بنابراین مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  انطباق‌پذیر اند.



**مثال اول:** در مثلث متساوی الساقین  $\triangle ABC$ ، قطعه خط  $\overline{AH}$  ناصف الزاویه بر قاعده  $\overline{BC}$  عمود است. ثابت کنید که مثلث های  $\triangle ABH$  و  $\triangle ACH$  با هم انطباق پذیر اند.

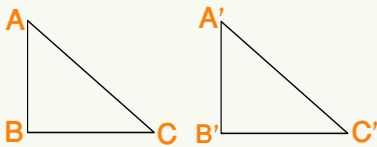


**حل:** در دو مثلث  $\triangle ABH$  و  $\triangle ACH$  داریم که:  
 چون زاویه  $A$  نصف شده است.....  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$   
 مثلث متساوی الساقین است.....  $\hat{B} = \hat{C}$   
 ساق های متساوی الساقین اند.....  $AB = AC$   
 قرار فعالیت بالا در دو مثلث  $\triangle ABH$  و  $\triangle ACH$  داریم که دو زاویه و یک ضلع در هر دو مثلث با هم مساوی اند لذا:

$$\triangle ABH \cong \triangle ACH$$

**مثال دوم:** چرا دو مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین که ساق های شان با هم مساوی اند، با هم انطباق پذیر اند؟

**حل:** در دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  که مثلث های قائم الزاویه متساوی الساقین اند داریم که:



قرار قائمه.  $\hat{B} = \hat{B}'$

در مثال داده شده است.....  $AB = A'B'$

ساق های متساوی الساقین.....  $BC = B'C'$

چون در دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle A'B'C'$  دو ضلع و زاویه بین آنها با هم مساوی اند.

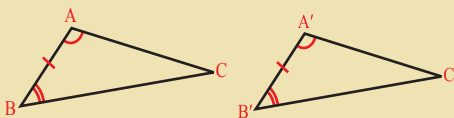
$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

اگر در دو مثلث، دو زاویه و ضلع بین آنها با هم مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.

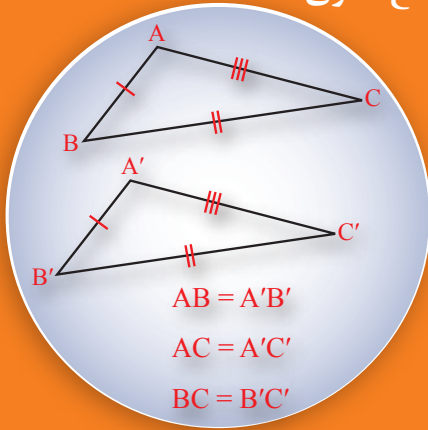
## تمرین

1- دو مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه باید کدام شرط دیگر را داشته باشند تا بر هم منطبق گردند؟

2- در این دو مثلث مختلف الاضلاع اگر  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  و  $AB = A'B'$  است؛ آیا این دو مثلث با هم انطباق پذیر استند چرا؟



## انطباق پذیری دو مثلث از حیث سه ضلع مساوی



اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با همدیگر چه رابطه‌ی دارند؟

### فعالیت

- دو قطعه خط  $\overline{A'B'} = \overline{AB} = 5\text{cm}$  را رسم کنید.
- روی این دو قطعه خط دو مثلث بسازید طوری که:

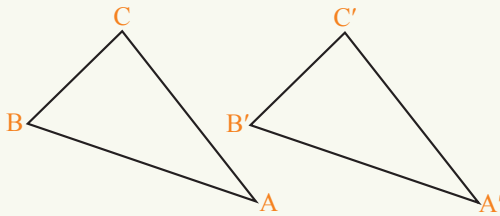
$$\overline{AC} = \overline{A'C'} = 7\text{cm}$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'} = 4\text{cm} \quad \text{و}$$

- یک کاغذ شفاف روی  $\triangle ABC$  قرار داده و مثلث  $A''B''C''$  را ببرید.
- این مثلث  $A''B''C''$  را روی مثلث  $A'B'C'$  قرار بدهید، چه اتفاقی می‌افتد؟

در فعالیت بالا می‌بینیم که:

اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر برابر باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.



به طور مثال در دو مثلث زیر داریم که:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}$$

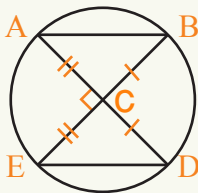
$$\overline{AC} = \overline{A'C'}$$

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}$$

چون سه ضلع این دو مثلث با هم مساوی اند، این دو مثلث با هم انطباق پذیر می‌باشند، یعنی:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

**مثال اول:** در دو مثلث  $\triangle ABC$  و  $\triangle ECD$ ، اگر  $AB = ED$  باشد، آیا این دو مثلث با هم انطباق پذیر هستند؟  $AD$  و  $EB$  قطرهای دایره اند.



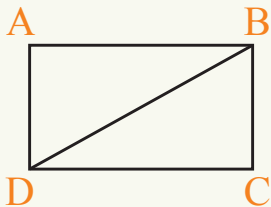
**حل:**

$$\begin{aligned} \text{شعاع دایره } \overline{AC} &= \overline{CE} \\ \text{شعاع دایره } \overline{BC} &= \overline{CD} \\ \text{قرار مفروض } \overline{AB} &= \overline{ED} \end{aligned}$$

چون در دو مثلث بالا سه ضلع آن‌ها با هم مساوی اند؛

$$\triangle ABC \cong \triangle ECD \quad \text{لذا:}$$

**مثال دوم:** اگر یک قطر مستطیل را رسم کنیم، آیا مستطیل به دو مثلث مساوی تقسیم می‌شود؟ چرا؟



**حل:** مستطیل و یک قطر آن را رسم می‌کنیم.

دیده می‌شود که:

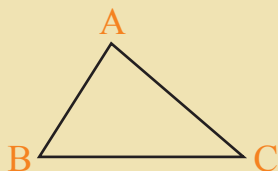
$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{CD} \\ \overline{AD} &= \overline{BC} \\ \overline{BD} &= \overline{BD} \end{aligned}$$

چون در دو مثلث  $\triangle ABD$  و  $\triangle BCD$  سه ضلع با هم مساوی اند، با هم انطباق پذیر می‌باشند. قطر، مستطیل را به دو حصه مساوی تقسیم می‌کند.

اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلثی دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.

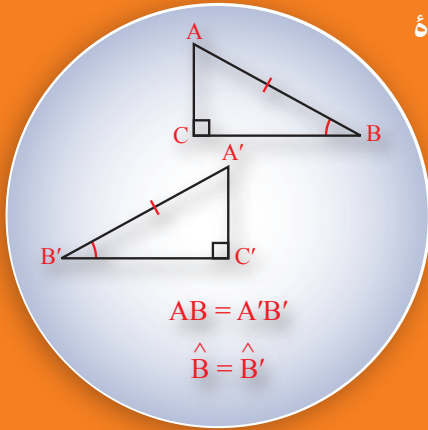
## تمرین

1- یک مثلث دارای اضلاع  $5\text{cm}$ ،  $7\text{cm}$  و  $3\text{cm}$  است. یک مثلث دیگر که مجموع دو ضلع آن  $10\text{cm}$  است، ضلع سومش چند سانتی متر باید باشد تا با مثلث اولی انطباق پذیر گردد؟



2- مثلث  $ABC$  قرار شکل مقابل داده شده است، یک مثلث دیگر که با مثلث داده شده انطباق پذیر باشد رسم کنید.

## حالت انطباق پذیری دو مثلث قایم الزویه که وتر و یک زاویه حاده آن‌ها با هم مساوی باشند.



علاوه بر سه حالتی که در مورد انطباق پذیری دو مثلث مطالعه کردید، آیا در مورد مثلث قایم الزویه حالت دیگری وجود دارد؟

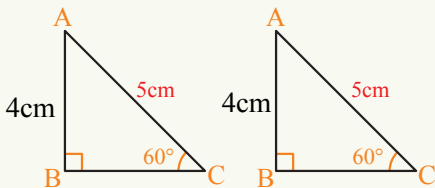
### فعالیت

- یک قطعه خط  $AB$  را به طول  $5\text{cm}$  رسم کنید.
- در نقطه  $B$  ضلع  $AB$ ، یک زاویه  $40^\circ$  را رسم کنید که یک ضلع آن  $AB$  و ضلع دیگر آن  $BC$  باشد.
- از نقطه  $A$  بر ضلع  $BC$  عمود رسم کنید.
- چه نوع مثلثی ایجاد می‌شود؟
- یک مثلث دیگر با همین شرایط رسم نموده و آن را  $A'B'C'$  بنامید.
- یک کاغذ نازک روی مثلث  $A'B'C'$  قرار دهید و مثلث  $A''B''C''$  را بسازید.
- $A''$  را روی  $A'$  قرار دهید. آیا  $B''$  روی  $B'$  قرار می‌گیرد؟ چرا؟
- آیا  $B''C''$  روی  $B'C'$  قرار می‌گیرد؟ چرا؟
- آیا دو مثلث  $ABC$  و  $A'B'C'$  با هم انطباق پذیر اند؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌شود که:

هر گاه وتر و یک زاویه حاده یک مثلث قایم الزویه، با وتر و یک زاویه حاده مثلث قایم الزویه دیگر برابر باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.

**مثال اول:** دو مثلث قایم الزویه که وتر آن‌ها  $5\text{cm}$  و یک زاویه حاده آن‌ها  $60^\circ$  باشد، رسم کنید.

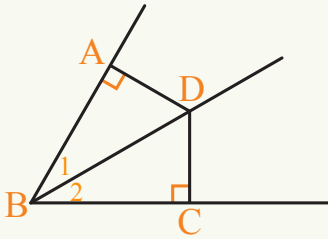


آیا این دو مثلث انطباق پذیر اند؟

**حل:** اول زاویه  $60^\circ$  را رسم می‌کنیم و بعد یک ضلع آن را به اندازه  $5\text{cm}$  جدا کرده از انجام این ضلع، یک عمود بالای ضلع دیگر رسم می‌کنیم.

به همین ترتیب، مثلث دوم را رسم می‌کنیم؛ چون وتر و یک زاویه حاده این دو مثلث قائم‌الزاویه با هم مساوی اند: این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر می‌باشند.

**مثال دوم:** از یک نقطه ناصف‌الزاویه دو خط عمود بالای دو ضلع این زاویه رسم می‌کنیم، اکنون چگونه ثابت کنیم که دو مثلث تشکیل شده با هم انطباق‌پذیر اند؟  
**حل:** زاویه B و ناصف‌الزاویه آن را قرار زیر ترسیم کرده و دو مثلث را قرار شکل زیر تشکیل می‌دهیم. در دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و DBC داریم که:



$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 \quad \text{قرار ناصف‌الزاویه}$$

$$\overline{BD} = \overline{BD} \quad \text{قرار ضلع مشترک}$$

چون در دو مثلث قائم‌الزاویه وتر و یک زاویه حاده آن‌ها با هم مساوی اند. این دو مثلث انطباق‌پذیر اند.

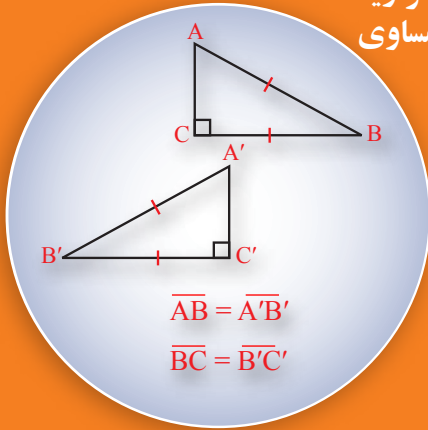
برای انطباق‌پذیری مثلث‌های قائم‌الزاویه، مساوی بودن یک زاویه حاده و وتر کفایت می‌کند.

## تمرین

1- دو مثلث قائم‌الزاویه که وتر آن‌ها 6cm و یک زاویه حاده آن‌ها برابر به  $60^\circ$  باشد را در نظر بگیرید. چگونه می‌توانید ثابت کنید که این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند؟

2- یک قطر مربع، آن را به دو مثلث تقسیم می‌کند. ثابت کنید که این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند؟

حالت انطباق پذیری دو مثلث قائم الزاویه  
که وتر و یک ضلع قائم آن‌ها مساوی  
باشد



آیا در مثلث قائم الزاویه غیر از حالت ذکر شده، حالت دیگری وجود دارد که تحت شرایط آن، دو مثلث قائم الزاویه با هم انطباق پذیر باشند؟

## فعالیت

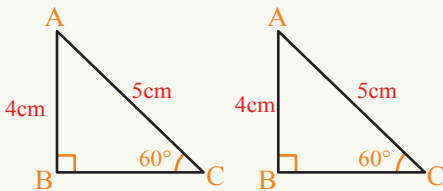
- یک زاویه قائمه رسم کرده، رأس آن را A بنامید.
- روی یک ضلع این زاویه، به طول 4cm جدا نموده، آن نقطه را B بنامید.
- از نقطه B به طول 5cm وتر را رسم کنید، تا ضلع دیگر زاویه A را قطع کند.
- مثلث دیگری نیز با این شرایط رسم کرده، آن را A'B'C' بنامید.
- یک کاغذ شفاف را روی مثلث A'B'C' قرار دهید و مثلث A''B''C'' را که انطباق پذیر با مثلث A'B'C' باشد، بسازید.
- رأس A'' را روی A قرار دهید. آیا B'' روی B قرار می‌گیرد؟ چرا؟
- آیا رأس C'' روی C قرار می‌گیرد؟
- آیا دو مثلث ABC و A''B''C'' با هم انطباق پذیراند؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌شود که:

اگر وتر و یک ضلع یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع مثلث قائم الزاویه دیگری مساوی باشند، مثلث‌ها با هم انطباق پذیراند.

**مثال اول:** دو مثلث قائم الزاویه را که وتر هر یک آن‌ها 5cm و یک ضلع قائم آن‌ها 4cm باشد، چگونه رسم می‌کنید؟ آیا این دو مثلث با هم انطباق پذیر هستند؟

**حل:** اول ضلع قائم معلوم را رسم کرده، سپس در یک انجام آن زاویه قائمه و از انجام دیگر این ضلع قوسی که شعاع آن به اندازه وتر باشد، رسم می‌کنیم. در هر قسمتی که دایره ضلع دیگر قائم را قطع کند نقطه تقاطع را به انجام ضلع قائم معلوم وصل می‌کنیم. به همین ترتیب،

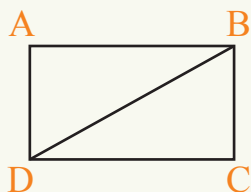


یک مثلث قائم الزاویه دیگر رسم می‌کنیم، در این دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع قائم آن‌ها با هم مساوی اند؛ بنابراین: این دو مثلث قائم الزاویه با هم انطباق پذیراند.

**مثال دوم:** در شکل زیر قطر مستطیل را رسم کرده و ثابت کنید که دو مثلث  $ABD$  و  $CBD$  انطباق پذیراند؟

**حل:** قرار شکل زیر مستطیلی داریم که:

$AB = DC$  و  $BD = BD$  می‌باشد.



چون در دو مثلث قائم الزاویه  $ABD$  و  $DBC$  وتر و یک ضلع قائم با هم مساوی اند؛ پس هر دو مثلث انطباق پذیر می‌باشند همچنین می‌توان انطباق پذیری دو مثلث را از حیث دو ضلع و زاویه بین آن‌ها بررسی کرد:

$$\overline{AB} = \overline{DC}$$

$$\overline{AD} = \overline{BC} \quad (\text{دو ضلع و زاویه بین آن‌ها مساوی اند})$$

$$\hat{A} = \hat{C}$$

$$\triangle ABD \cong \triangle DBC$$

چون:

نتیجه گرفته می‌شود که:

در مثلث‌های قائم الزاویه علاوه بر شرط‌های سه گانه، دو حالت دیگر نیز وجود دارد:

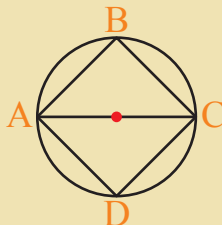
1- اگر وتر و یک زاویه حاده یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک زاویه حاده مثلث

قائم الزاویه دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.

2- اگر وتر و یک ضلع قائم یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع قائم مثلث قائم الزاویه

دیگر مساوی باشند، این دو مثلث انطباق پذیر اند.

## تمرین



1- در شکل زیر  $AC$  قطر دایره است؛ اگر در دو مثلث قائم الزاویه

$ABC$  و  $ADC$ ، ضلع  $BC = CD$  باشد، آیا این دو مثلث با هم

انطباق پذیراند؟ چرا؟

2- ثابت کنید که قطر مربع، آن را به دو مثلث قائم الزاویه انطباق پذیر

تقسیم می‌کند.

- مثلث‌ها از نظر طول اضلاع به سه دسته تقسیم شده اند:
- مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین و مثلث مختلف‌الاضلاع
- مثلث‌ها را از حیث زاویه نیز به سه دسته تقسیم کرده اند:
- مثلث حاده الزاویه، مثلث قائم‌الزاویه و مثلث منفرج‌الزاویه
- در هر مثلث، ارتفاع‌ها، میانه‌ها و ناصف‌الزاویه‌ها به ترتیب همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.
- در هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی آن  $180^\circ$  است.
- زاویه خارجی یک مثلث مساوی با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور این مثلث می‌باشد.
- در هر مثلث، باید طول مجموع دو ضلع از طول ضلع سوم آن بزرگ‌تر باشد.
- در مثلث متساوی‌الساقین، مقابل ساق‌های مساوی، زاویه‌های مساوی قرار دارند.
- یک چندضلعی (مضلع) عبارت از خط منکسر بسته‌یی است که فقط یک ناحیه بسته را تشکیل می‌دهد، و هیچ یک از دو خط آن در امتداد یک خط مستقیم قرار ندارد و هر رأس مضلع فقط و فقط نقطه تقاطع دو قطعه خط می‌باشد.
- در بعضی از چندضلعی‌ها امتداد یک یا برخی اضلاع آن‌ها از داخل چندضلعی عبور کرده که آن‌ها را چندضلعی مقعر می‌نامند و چندضلعی‌یی که امتداد اضلاع آن از داخل چند ضلعی عبور نمی‌کنند را چندضلعی محدب می‌گویند.
- مجموع زاویه‌های داخلی یک  $n$  ضلعی برابر است به:  $(n - 2) \times 180^\circ$
- مجموع زاویه‌های خارجی در یک چندضلعی  $360^\circ$  است و به تعداد اضلاع آن‌ها ارتباط ندارد.
- به دو شکلی که کاملاً بر هم منطبق شوند، یعنی یکدیگر را بپوشانند، اشکال انطباق پذیر نامیده می‌شود.
- اگر دو ضلع و زاویه بین یک مثلث با دو ضلع و زاویه بین مثلث دیگر با هم مساوی باشند، آن دو مثلث انطباق پذیر اند.
- اگر دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه یک مثلث با دو زاویه و ضلع بین این دو زاویه یک مثلث دیگر مساوی باشند، این دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.
- اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر دو به دو مساوی باشند، آن دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.
- اگر وتر و یک ضلع قائم یک مثلث، با وتر و یک ضلع قائم مثلث دیگر مساوی باشند و یا وتر و یک زاویه حاده آن‌ها دو به دو با هم مساوی باشند، آن دو مثلث انطباق پذیر اند.

1- در مقابل هر سؤال، چهار جواب داده شده‌اند، جواب درست را مشخص کنید.

• مجموع زوایای داخلی یک 9 ضلعی چند درجه است؟

(a)  $360^\circ$  (b)  $1260^\circ$

(c)  $180^\circ$  (d) هیچکدام

• مجموع زوایای داخلی یک مضلع  $1980^\circ$  می‌باشد. این مضلع دارای چند ضلع است؟

(a) 18 (b) 13

(c) 11 (d) 17

• اگر سه قطعه خط در یک نقطه یکدیگر را قطع کنند، مجموع زوایایی که به دور نقطه تقاطع تشکیل می‌شود، چند درجه است؟

(a)  $260^\circ$  (b)  $180^\circ$

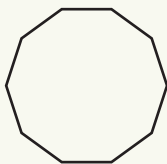
(c)  $360^\circ$  (d) هیچکدام

• اگر اندازه یک زاویه داخلی یک مضلع منظم  $144^\circ$  باشد، تعداد اضلاع آن مساوی است به:

(a) 8 (b) 9

(c) 10 (d) 12

• شکل زیر که همه اضلاع و زوایای آن با هم مساوی‌اند به کدام نام یاد می‌شود؟



(a) مضلع منظم محدب 10 ضلعی (b) مضلع منظم مقعر 10 ضلعی

• اگر در یک مثلث دو ضلع آن با هم مساوی باشند، این مثلث چه نام دارد؟

(a) متساوی‌الساقین

(b) متساوی‌الاضلاع

(c) مختلف‌الاضلاع

(d) مختلف‌الزاویه

• اگر در یک مثلث دو زاویه آن با هم مساوی باشند، این مثلث چه نام دارد؟

(a) مثلث مختلف الاضلاع

(b) مثلث متساوی الساقین

(c) مثلث متساوی الاضلاع

(d) هیچکدام

• اگر در یک مثلث قائم الزاویه اندازه یکی از زوایای حاده آن  $60^\circ$  باشد، وسعت زاویه حاده دیگر آن مساوی است به:

(a)  $30^\circ$  (b)  $50^\circ$  (c)  $40^\circ$  (d)  $29^\circ$

• زاویه خارجی یک مثلث با مجموع زوایای غیر مجاور داخلی آن چه رابطه دارد؟

(a) بزرگ تر است (b) مساوی است (c) کوچکتر است (d) هیچکدام

2- مقابل جمله صحیح (ص) و مقابل جمله غلط (غ) بگذارید.

• ( ) بزرگ ترین زاویه خارجی بی که از امتداد یک ضلع یک چندضلعی منظم ساخته می شود  $120^\circ$  است.

• ( ) مثلث می تواند یک مضلع مقعر باشد.

• ( ) اندازه یک زاویه خارجی یک سه ضلعی هیچ گاه کمتر از یک زاویه داخلی آن نمی باشد.

• ( ) دو ضلع غیر مجاور یک مضلع در یکی از رأس های آن مضلع با هم متقاطع اند.

• ( ) یک مضلع را وقتی متساوی الزوایا گویند که تمام اضلاع آن با هم مساوی باشند.

• ( ) مجموع زوایای خارجی یک مضلع منظم عبارت از:  $180^\circ (n-2)$  است.

• ( ) اگر تعداد اضلاع یک مضلع تزايد نمایند، مجموع زوایای خارجی آن تزايد می نماید.

• ( ) مثلث حاد الزاویه، مثلثی است که صرف دو زاویه آن حاده می باشد.

• ( ) دو مثلث وقتی انطباق پذیر اند که طول یک ضلع و اندازه دو زاویه مجاور آن ها یک به یک مساوی باشند.

• ( ) اگر دو ضلع یک مثلث با هم مساوی باشند، زوایای مقابل این دو ضلع نیز با هم مساوی اند.

• ( ) اندازه هر یک از زوایای مثلث متساوی الاضلاع  $61^\circ$  است.

• ( ) اندازه زاویه خارجی یک مثلث مساوی به مجموع زوایای غیر مجاور داخلی آن می باشد.

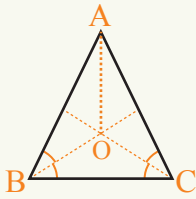
• ( ) مجموع وسعت زوایای داخلی یک مثلث سه قایمه است.

3- جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

- اگر اندازه یک زاویه خارجی یک مضلع منظم دو برابر اندازه زاویه داخلی همجوار آن باشد مضلع مذکور ..... نامیده می شود.
- با تزیید اضلاع یک مضلع منظم، مجموع زوایای داخلی مضلع ..... و مجموع زوایای خارجی آن ..... نمی کند.
- از یک رأس هشت ضلعی ..... قطر رسم شده می تواند.
- اگر اندازه یک زاویه خارجی یک مضلع منظم 120 درجه باشد آن مضلع دارای ..... ضلع می باشد.
- اگر مجموع اندازه زوایای داخلی یک مضلع مساوی به مجموع اندازه زوایای خارجی همان مضلع باشد، مضلع مذکور دارای ..... ضلع است.
- یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع به نام ..... منظم یاد می شود.
- خط مستقیمی که دو رأس غیر مجاور یک مضلع را با هم وصل کند، ..... نامیده می شود.
- مثلثی که هر سه ضلع آن مساوی باشند، مثلث ..... نامیده می شود.
- در هر مثلث مجموع طول دو ضلع آن ..... از طول ضلع سوم آن می باشد.
- خطی که از رأس مثلث به ضلع مقابل آن عمود باشد به نام ..... یاد می شود.
- اگر اندازه زاویه رأس مثلث متساوی الساقین  $50^\circ$  باشد، اندازه هر یک از دو زاویه دیگر آن ..... است.

4- سؤالهای زیر را حل کنید:

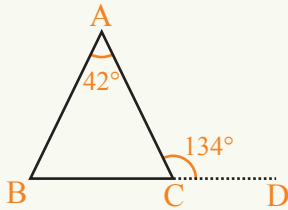
- مجموع یکی از زوایای داخلی و زاویه خارجی مجاور آن در یک مضلع چند درجه است؟
- اگر در مثلثهای متساوی الساقین ABC و DBC قاعده BC را مشترک در نظر بگیریم، ثابت کنید که:  $\hat{D}BA = \hat{A}CD$  در صورتی که رأس های A و D به یک طرف BC واقع نباشند.



- در مثلث متساوی الساقین  $\triangle ABC$  ،  $AB = AC$  است؛ اگر  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  توسط  $OB$  و  $OC$  تنصیف گردند، ثابت کنید که:  
 $OC = OB$  (a)  
 $OA$  ناصف الزاویه  $\hat{A}$  است. (b)

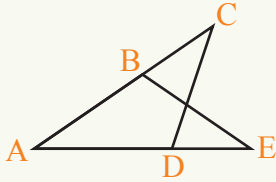
- ثابت کنید که اندازه هر یک از زوایای حاده یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه  $45^\circ$  است.

- ضلع  $BC$  مثلث  $ABC$  قرار زیرتا نقطه  $D$  امتداد داده شده است، در صورتی که  $\hat{DCA} = 134^\circ$  و  $\hat{BAC} = 42^\circ$  باشد، اندازه دو زاویه دیگر مثلث را معلوم کنید.



- در مثلث‌های  $ACD$  و  $AEB$  قرار شکل مقابل، داریم که:  
 $AD = AB$  و  $AE = AC$ . ثابت کنید که:

$$\triangle ACD \cong \triangle AEB$$

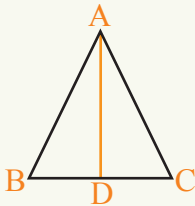


- 5 حالت انطباق‌پذیری در مثلث‌های قائم‌الزاویه را ذکر کنید.
- یک قطر یک معین، معین را به دو مثلث تقسیم می‌کند، به چند حالت ثابت کرده می‌توانید که این دو مثلث با هم انطباق‌پذیر اند؟

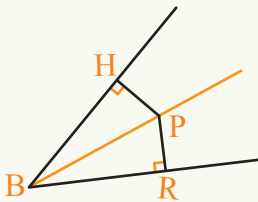
• در یک مثلث متساوی الساقین، میانه‌ی که از رأس به قاعده رسم می‌شود مثلث را به دو مثلث دیگر تقسیم می‌کند. آیا این دو مثلث انطباق‌پذیر اند؟ به چند حالت می‌توانید آن را ثابت کنید؟

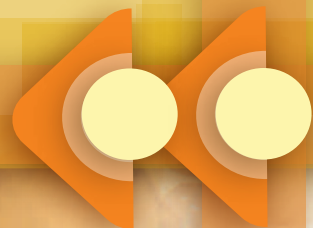
• اگر ناصف‌الزاویه یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین را از رأس قائم به قاعده رسم کنیم، مثلث قائم‌الزاویه به دو مثلث تقسیم می‌شود. آیا این دو مثلث انطباق‌پذیر اند؟ چرا؟

• در مثلث  $ABC$ ،  $\overline{AB} = \overline{AC}$  و  $\overline{AD}$  ناصف‌الزاویه رأس  $A$  است. ثابت کنید که: ارتفاع  $AD$  میانه مثلث ذکر شده نیز می‌باشد.



• اگر در شکل زیر  $BP$  ناصف‌الزاویه  $\widehat{HBR}$  باشد، ثابت کنید که:  $HP = PR$





# فصل ششم

## خطوط موازی و عمود

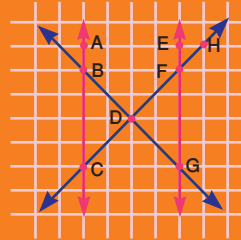


طبیعت پُر از خطوط موازی است!

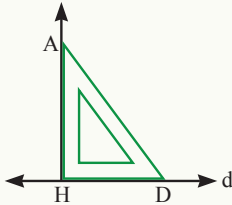
## خطوط موازی و عمود (Parallel and Perpendicular Lines)



در شکل چند خط مشاهده می‌شود. راجع به وضعیت خطوط چه گفته می‌توانید؟



### فعالیت



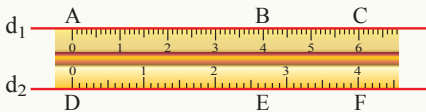
- ابتدا خط مستقیم  $d$  را رسم کرده گونیا را روی خط  $d$  طوری که در شکل نشان داده شده است، می‌گذاریم. رأس گونیا را  $A$  می‌نامیم و خطوط  $\overline{AD}$  و  $\overline{AH}$  را رسم می‌کنیم.
- بالای خط مستقیم  $d$  از نقطه  $A$  سه خط مستقیم  $\overline{AB}$ ،  $\overline{AE}$  و  $\overline{AC}$  را که یکی عمود و دو خط دیگر مایل باشند، رسم کنید.
  - خط‌ها را با خط کش اندازه گرفته و تعیین کنید که کدام خط از همه کوچکتر است.

خط  $\overline{AH}$  با خط  $d$  زاویه  $90^\circ$  می‌سازد. قطعه خط  $\overline{AH}$  عمود بر خط مستقیم  $d$  است، که این طور نشان داده می‌شود:

$$AH \perp d$$

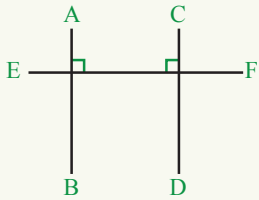
### فعالیت

- خط کش را روی کاغذ بگذارید و از هر دو کنار خط کش دو خط رسم کنید و این خطوط را  $d_1$  و  $d_2$  بنامید.



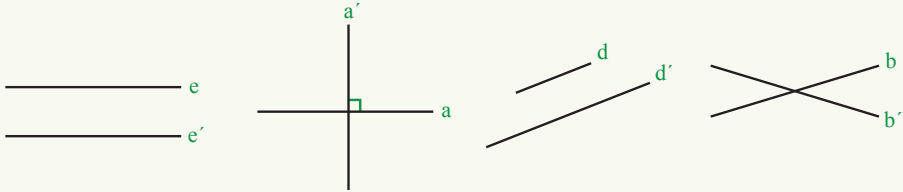
- بالای خط  $d_1$  سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  را انتخاب و به کمک گونیا از نقطه  $A$ ، نقطه  $B$  و نقطه  $C$  بر خط  $d_2$  عمود رسم کنید و نظر به شکل عمودها را  $\overline{AD}$ ،  $\overline{BE}$  و  $\overline{CF}$  بنامید.
- طول قطعه خط‌های مستقیم  $\overline{AD}$ ،  $\overline{BE}$  و  $\overline{CF}$  را اندازه بگیرید. در مورد طول‌های شان چه گفته می‌توانید؟

دو خط  $d_1$  و  $d_2$  را که فاصله بین شان مساوی است، خطوط موازی می‌نامند که این طور نشان داده می‌شود:  $d_1 \parallel d_2$ . دو خط مستقیم  $\overline{AC}$  و  $\overline{DG}$  که فاصله بین آنها مساوی نیست، طوری که در شکل نیز مشاهده می‌شود موازی نیستند؛ زیرا که امتداد یافته آنها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کند و این طور نمایش داده می‌شود:  $\overline{AC} \nparallel \overline{DG}$ .



می‌توان به کمک گونیا یا خط کش نشان داد که فاصله بین این دو قطعه خط مستقیم در نقاط مختلف مساوی نیست. اگر دو قطعه خط  $\overline{AB}$  و  $\overline{CD}$  را بالای  $\overline{EF}$  عمود رسم کنیم ( $AB \perp EF$  و  $CD \perp EF$ ) خطوط  $AB$  و  $DC$  موازی می‌باشند، زیرا اگر موازی نباشند همدیگر را قطع می‌کنند که از یک نقطه تقاطع دو عمود بر خط  $\overline{EF}$  رسم شده است و این امکان ندارد.

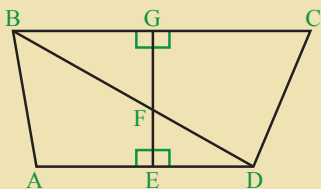
**مثال:** در بین خطوط زیر خطوط موازی، عمود و متقاطع را مشخص کنید:



**حل:**  $e \parallel e'$  ،  $d \parallel d'$  ،  $a' \perp a$  و خطوط  $b$  و  $b'$  با هم متقاطع اند.

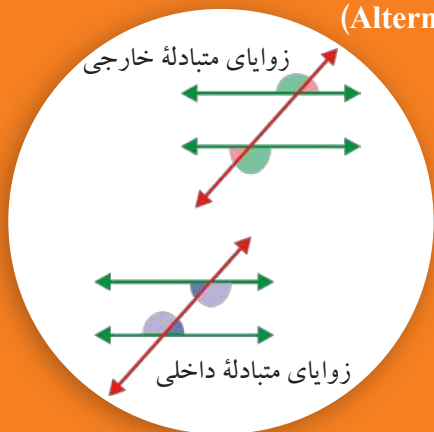
دو خط مستقیم را وقتی موازی می‌گوییم که خود خطوط و یا امتداد شان نقطه مشترک نداشته باشند. فاصله بین این دو خط در تمام نقاط مساوی می‌باشد. دو خط وقتی با هم عمود اند که زاویه بین آنها یک زاویه قائمه ( $90^\circ$ ) باشد.

## تمرین



- در شکل مقابل کدام قطعه خط‌ها موازی اند؟
- کدام قطعه خط‌ها بر هم عمود اند؟
- کدام دو قطعه خط‌ها متقاطع اند؟
- کدام زاویه‌ها قائمه اند؟
- آیا همه خطوط متقاطع بر هم عمود می‌باشند؟

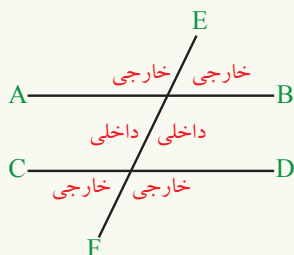
## زوایای متبادله داخلی و خارجی (Alternate interior and exterior angles)



شکل مقابل را مشاهده و در مورد زوایای تشکیل شده آن اظهار نظر کنید.

### فعالیت

- دو خط موازی  $d_1$  و  $d_2$  و دو خط غیر موازی  $d_3$  و  $d_4$  را رسم کنید.
- دو خط قاطع را که یکی از آن خطوط  $d_1$  و  $d_2$  و دیگری آن خطوط  $d_3$  و  $d_4$  را قطع کند رسم کنید.
- زوایایی را که قاطع با خطوط موازی می‌سازند و زوایایی را که قاطع با خطوط غیر موازی می‌سازند، توسط نقاله اندازه بگیرید. چه نتیجه‌یی به دست می‌آید؟



دو قطعه خط  $\overline{AB}$  و  $\overline{CD}$  با هم موازی اند و توسط  $\overline{EF}$  قطع شده‌اند.

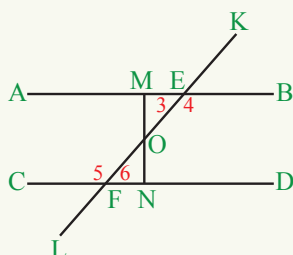
طوری که در شکل مشاهده می‌شود ناحیه بین دو خط را ناحیه داخلی و ناحیه خارج دو طرف را ناحیه خارجی می‌گویند.

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  است و خط  $\overline{LK}$  این دو خط را قطع کرده است.

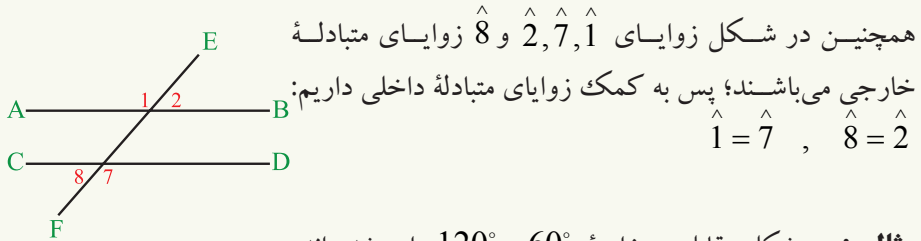
برای نشان دادن این که  $\hat{3} = \hat{6}$  است، نقطه  $O$  را روی خط  $\overline{LK}$  انتخاب نموده و از نقطه  $O$  خط عمود بر  $\overline{AB}$  و  $\overline{CD}$  رسم می‌کنیم، دو مثلث  $\triangle OME$  و  $\triangle OFN$  تشکیل می‌شود.

چون  $\hat{MOE} = \hat{FON}$  متقابل به رأس و

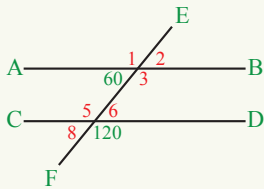
است؛ پس زاویه‌های سومی این  $\hat{OME} = \hat{ONF} = 90^\circ$



مثلتها نیز با هم مساوی می‌باشند؛ در نتیجه  $\hat{6} = \hat{3}$  می‌شود. زوایای  $\hat{3}$  و  $\hat{6}$  را به نام زوایای متبادله داخلی یاد می‌کنند؛ به همین ترتیب،  $\hat{4} = \hat{5}$  است و هر دو زوایای متبادله داخلی نیز می‌باشند.



**مثال:** در شکل مقابل دو زاویه  $60^\circ$  و  $120^\circ$  داده شده اند، زوایای  $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{8}$  چند درجه می‌باشند؟

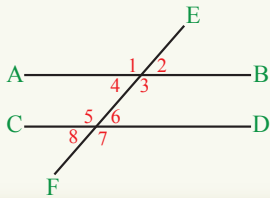


**حل:**

$\hat{6} = 60^\circ$ متبادله داخلی	$\hat{1} = 120^\circ$ متبادله خارجی
$\hat{5} = 120^\circ$ متقابل به رأس	$\hat{8} = \hat{6} = 60^\circ$ متقابل به رأس
$\hat{5} = \hat{3}$ متبادله داخلی	$\hat{2} = \hat{8}$ متبادله خارجی

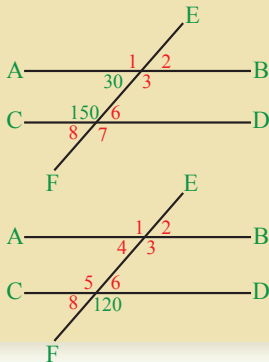
در نتیجه  $\hat{3} = 120^\circ$  است و از مقایسه مساوات فوق  $\hat{2} = 60^\circ$  می‌باشد.

اگر دو خط موازی  $AB$  و  $CD$  توسط خط قاطع  $EF$  قطع شوند دو جوره زوایای متبادله داخلی و دو جوره زوایای متبادله خارجی را می‌سازند که:



متبادله داخلی:	$\hat{4} = \hat{6}$	و	$\hat{3} = \hat{5}$
متبادله خارجی:	$\hat{2} = \hat{8}$	و	$\hat{1} = \hat{7}$

### تمرین



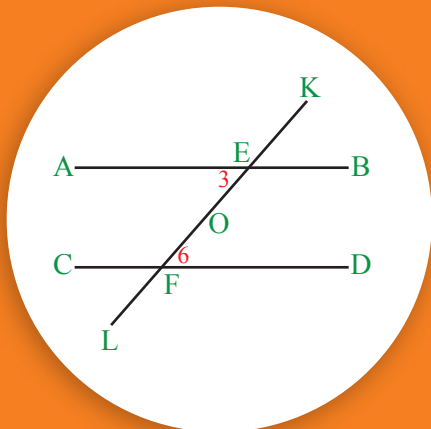
1- اگر  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  باشد، در شکل زوایای  $\hat{1}, \hat{3}, \hat{6}, \hat{7}, \hat{8}$

و  $\hat{2}$  چند درجه می‌باشند؟

2- در شکل اگر  $\hat{7} = 120^\circ$  باشد، مقدار زوایای

$\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{8}$  را دریابید.

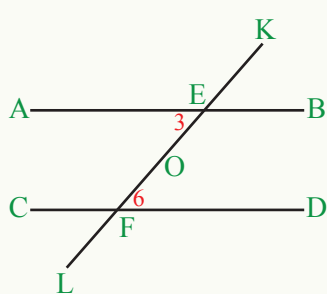
موازی بودن دو خط در صورتی که زوایای متبادله با هم مساوی باشند



در شکل مقابل زوایایی  $\hat{3}$  و  $\hat{6}$  که دو زاویه متبادله داخلی اند با هم مساوی می‌باشند. آیا  $AB \parallel CD$  شده می‌تواند؟

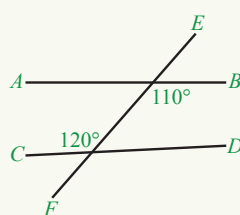
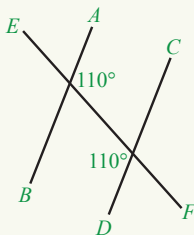
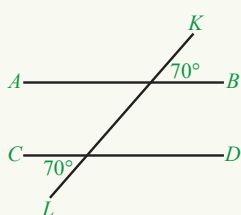
### فعالیت

زوایای  $\hat{3}$  و  $\hat{6}$  با هم مساوی اند.



- در شکل مقابل از نقطه O وسط خط  $\overline{EF}$  بالای  $\overline{AB}$  عمود رسم کنید. نقطه تقاطع با  $\overline{AB}$  را M بنامید و آن را امتداد دهید که خط  $\overline{CD}$  را در N قطع کند.
- نشان دهید که دو مثلث  $\triangle MOE$  و  $\triangle FON$  با هم مساوی اند.
- آیا خط مستقیم  $\overline{MN}$  بر خط مستقیم  $\overline{CD}$  نیز عمود است؟
- چرا  $\overline{AB}$  موازی با  $\overline{CD}$  است؟

**مثال اول:** در اشکال زیر کدام دو خط مستقیم AB و CD با هم موازی اند؟



**حل:**  $70^\circ = 70^\circ$  متبادله خارجی؛ پس  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  است.  
 $110^\circ = 110^\circ$  متبادله داخلی؛ پس  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  است.  
 $120^\circ \neq 110^\circ$ ؛ پس  $\overline{AB} \not\parallel \overline{CD}$  است.

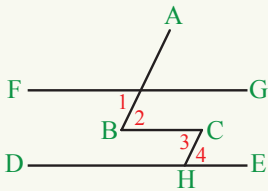
**مثال دوم:** اگر  $\hat{1} = \hat{2}$  ،  $\hat{2} = \hat{3}$  و  $\hat{3} = \hat{4}$  باشد، کدام جوره از خطوط موازی اند؟

**حل:**

چون  $\hat{1} = \hat{2}$  است؛ پس  $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$

است؛ پس  $\hat{2} = \hat{3}$

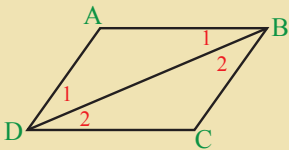
پس  $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$  می باشد.



اگر دو خط توسط یک خط طوری قطع شوند که دو زاویه متبادله مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.

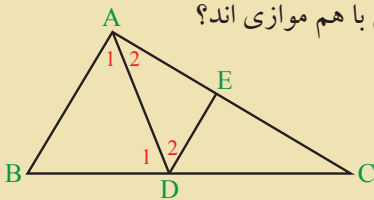
## تمرین

1- در شکل زیر  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$  و  $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$  است، آیا  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  است؟ چرا؟

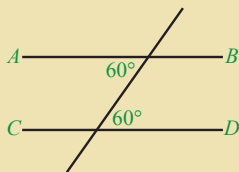


2- در شکل زیر، اگر:

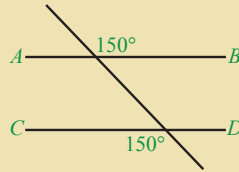
$\hat{A}_1 = \hat{D}_2$  و  $\hat{A}_2 = \hat{D}_1$  باشد، کدام خطوط مستقیم با هم موازی اند؟



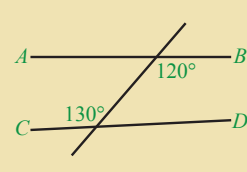
3- در هر یک از شکل های زیر کدام دو خط AB و CD با هم موازی اند؟



a

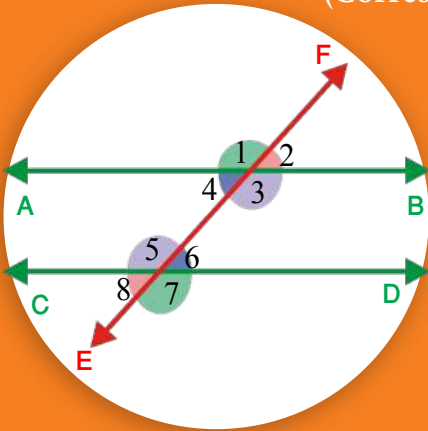


b



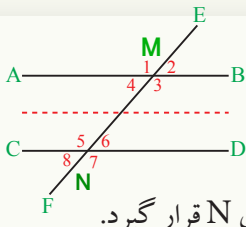
c

## زوایای متوافق (Corresponding angles)



در شکل  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  است و خط EF این دو خط را قطع کرده است.  
زوایای  $(\hat{4}$  و  $\hat{8}$ )،  $(\hat{2}$  و  $\hat{6}$ )،  $(\hat{3}$  و  $\hat{7})$  و  $(\hat{1}$  و  $\hat{5})$  را به نام زوایای متوافق یاد می کنند. آیا این زوایا با هم مساوی اند؟

### فعالیت

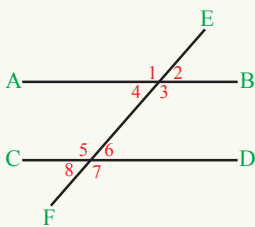


شکل مقابل را در نظر بگیرید.  
چهار طرف شکل را توسط قیچی ببرید.  
سپس محل نقطه چین را جدا کنید.  
حال قطعه خط CD را به روی قطعه خط AB قرار دهید تا M روی N قرار گیرد.  
درباره زوایای  $\hat{1}$  تا  $\hat{8}$  چه می توان گفت؟

$$\hat{1} = \hat{5}, \quad \hat{2} = \dots, \quad \dots = \hat{7}, \quad \hat{4} = \dots$$

• به کمک نقاله زوایای  $\hat{1}$  تا  $\hat{8}$  را اندازه کرده، درستی برابری های بالا را بررسی کنید.

همچنین اگر دو خط توسط یک قاطع طوری قطع شوند که زوایای متوافق مساوی را بسازند این دو خط با هم موازی اند.



دو قطعه خط مستقیم AB و CD توسط خط مستقیم EF قطع شده اند.

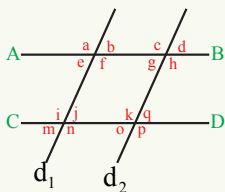
اگر  $\hat{2} = \hat{6}$  باشد، می خواهیم نشان دهیم که  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  می باشد.

چون قرار متقابل به رأس  $\hat{2} = \hat{4}$

قرار مفروض  $\hat{2} = \hat{6}$

در نتیجه  $\hat{4} = \hat{6}$  است. از طرف دیگر چون  $\hat{4}$  و  $\hat{6}$  زوایای متبادله استند، در نتیجه  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

می باشد.

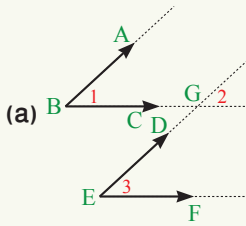


**مثال اول:** در شکل:  $\hat{a} = \hat{p}$  و  $\hat{m} = \hat{o}$ ،  $\hat{b} = \hat{j}$ ،  $\hat{h} = \hat{p}$  می باشد.

آیا قطعه خط AB موازی با قطعه خط CD و  $d_1 \parallel d_2$  است؟

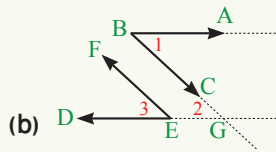
**حل:** چون  $\hat{h} = \hat{p}$  و  $\hat{b} = \hat{j}$  می‌باشد که زوایای متوافقۀ اند و با هم مساوی؛ پس  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  است.

و چون  $\hat{m} = \hat{o}$  و  $\hat{n} = \hat{p}$  می‌باشد که زوایای متوافقۀ اند و با هم مساوی؛ پس  $d_1 \parallel d_2$  است.



**مثال دوم:** در شکل (a) دو زاویه  $\hat{ABC}$  و  $\hat{DEF}$  که ضلع  $AB$  موازی و هم‌جهت با  $ED$  و ضلع  $BC$  موازی و هم‌جهت با  $EF$  می‌باشد. آیا می‌توانید نشان دهید که  $\hat{1} = \hat{3}$  می‌باشد؟

**حل:** ابتدا مطابق شکل‌های (a) و (b) اضلاع  $BC$  و  $ED$  را امتداد می‌دهیم تا در نقطه  $G$  همدیگر را قطع کنند.

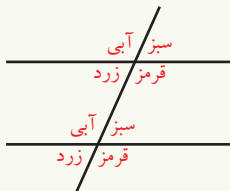


در شکل a: متوافقۀ  $\hat{1} = \hat{2}$   
متوافقۀ  $\hat{3} = \hat{2}$

در نتیجه:  $\hat{1} = \hat{3}$  می‌باشد.

همچنین در شکل (b) ضلع  $AB$  موازی و مختلف‌الجهت با ضلع  $ED$  و  $BC$  موازی و مختلف‌الجهت با ضلع  $EF$  می‌باشد. زوایای  $\hat{1}$  و  $\hat{3}$  نیز با هم مساوی اند؛ زیرا:  $\hat{1} = \hat{2}$  (قرارمتبادله)، (قرارمتوافقۀ)  $\hat{3} = \hat{2}$

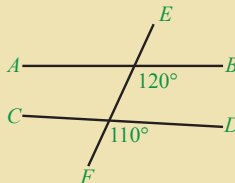
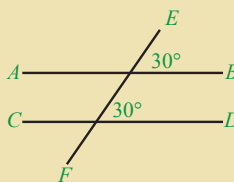
در نتیجه:  $\hat{1} = \hat{3}$  می‌باشد.



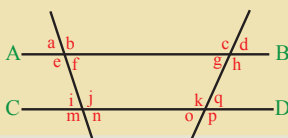
اگر دو خط موازی توسط یک خط قاطع قطع شوند، زوایای مساوی متوافقۀ را می‌سازند و اگر دو خط مستقیم توسط خط قاطع طوری قطع شوند که زوایای متوافقۀ مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.

## تمرین

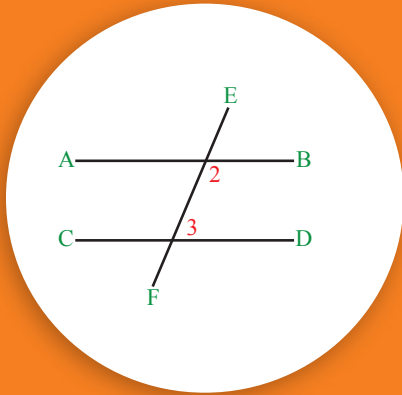
1- کدام جوهره از خطوط مستقیم با هم موازی اند؟



2- دو خط مستقیم  $\overline{AB}$  و  $\overline{CD}$  با هم موازی اند، کدام زاویه‌ها با هم مساوی اند؟



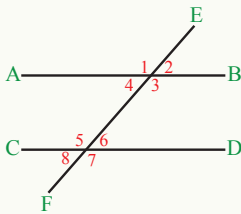
## زوایای متممه داخلی یک طرف خط قاطع (Supplementary Angles)



اگر  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  و خط مستقیم  $\overline{EF}$  دو خط موازی را طوری که در شکل مشاهده می شود قطع کرده باشد، آیا می توانید بگویید که  $\hat{2} + \hat{3}$  چند درجه می شود؟

### فعالیت

دو خط مستقیم  $AB$  و  $CD$  موازی اند و خط مستقیم  $EF$  آن‌ها را مطابق شکل قطع کرده است.



$$\hat{3} + \hat{4} = \square$$

از طرف دیگر  $\hat{4} = \hat{6}$  است. چرا؟

از دو تساوی بالا خانه خالی زیر را پر کنید.

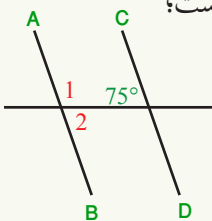
$$\hat{3} + \hat{6} = \square$$

به کمک نقاله زاویه‌های  $\hat{3}$  و  $\hat{6}$  را اندازه گرفته، مجموع آن دو را به دست آورید.

خانه خالی زیر را پر کنید.

$$\hat{4} + \hat{5} = \square$$

**مثال:** در شکل اگر خطوط مستقیم  $AB$  و  $CD$  با هم موازی باشند، اندازه  $\hat{1}$  و  $\hat{2}$  را دریابید.



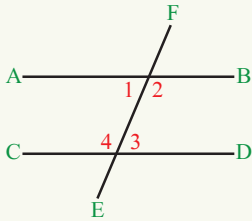
**حل:** چون  $\hat{1}$  و زاویه  $75^\circ$  متممه داخلی هستند و مجموع آن‌ها  $180^\circ$  است؛

$$\hat{1} + 75^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{1} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

چون زاویه  $75^\circ$  و  $\hat{2}$  متبادله هستند:  $\hat{2} = 75^\circ$

اگر دو خط مستقیم  $AB$  و  $CD$  موازی باشند و خط مستقیم  $EF$  این دو خط را طوری که در شکل مشاهده می شود قطع کرده باشد، دو زاویه داخلی یک طرف قاطع به نام زوایای متمم داخلی یک طرف خط قاطع یاد می گردند که مجموع شان مساوی به  $180^\circ$  می شود.

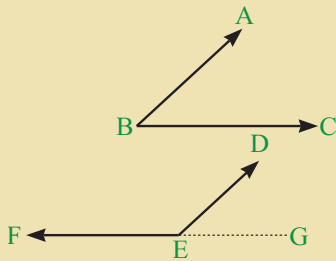


$$\hat{1} + \hat{4} = 180^\circ \text{ و } \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$$

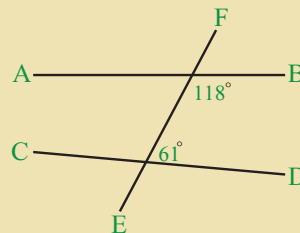
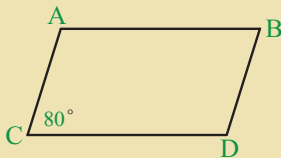
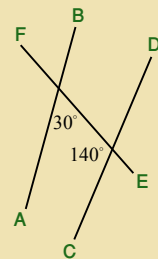
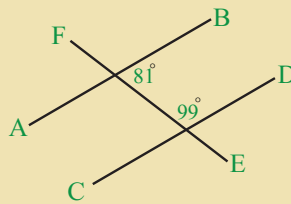
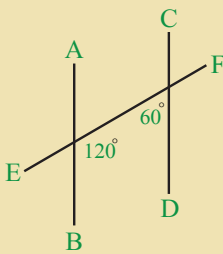
اگر یک خط قاطع با دو خط مستقیم، دو زاویه متمم داخلی یک طرف خط قاطع را بسازد، این دو خط با هم موازی اند.

## تمرین

1- در شکل مقابل دو زاویه  $\hat{ABC}$  و  $\hat{DEF}$  را داریم که ضلع  $AB$  موازی و هم جهت  $ED$  و ضلع  $BC$  موازی و مختلف جهت  $EF$  می باشد؛ نشان دهید که  $\hat{ABC} + \hat{DEF} = 180^\circ$  می شود.



2- کدام جوهره از خطوط مستقیم زیر با هم موازی اند؟

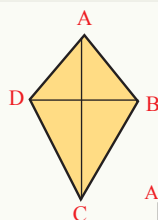


## چهار ضلعی‌ها (Quadrilaterals)



در شکل مقابل چه تعداد چهارضلعی مشاهده می‌شود؟

### فعالیت



• ABCD یک چهارضلعی است. چهار ضلع، چهار رأس، چهار زاویه و دو قطر آن را نام ببرید.

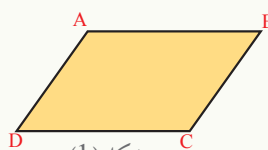
• هر یک از چهارضلعی‌های زیر را نام ببرید.



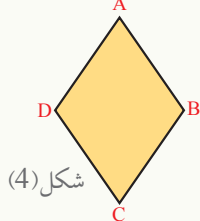
شکل (3)



شکل (2)



شکل (1)



شکل (4)



شکل (5)

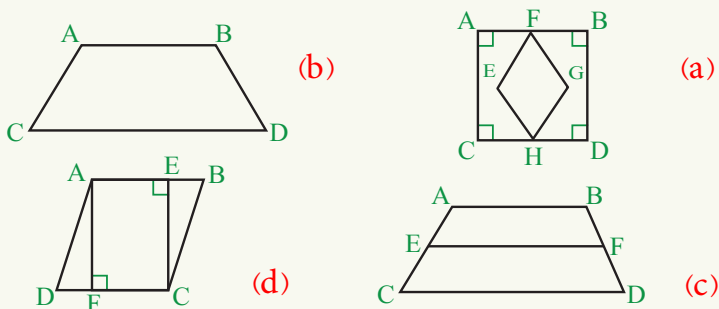
طوری که می‌دانید در تمام چهارضلعی‌های بالا، به جز دوزنقه، اضلاع مقابل آن‌ها دو به دو با هم موازی اند و در دوزنقه فقط دو ضلع مقابل آن با هم موازی هستند.

شکل شماره (1) متوازی‌الاضلاع (Parallelogram): یک چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو با هم موازی و مساوی می‌باشند.

شکل (2) مستطیل (Rectangle): یک چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی و مساوی اند و هر چهار زاویه آن قائمه می‌باشند.

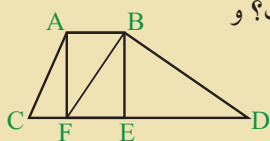
شکل (3) مربع (Square): یک چهارضلعی است که هر چهار ضلع آن با هم مساوی

و هر چهار زاویه آن قائمه می‌باشند.  
 شکل (4) معین یا لوزی (Rhombus): یک چهارضلعی است که اضلاع مقابل آن دو به دو موازی و هر چهار ضلع آن با هم مساوی و زوایای مقابل آن نیز با هم مساوی می‌باشند.  
 شکل (5) دوزنقه یا منحرف (Trapezoid): چهارضلعی بی‌است که فقط دو ضلع مقابل آن با هم موازی اند.  
**مثال:** در اشکال زیر، مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع، معین یا لوزی و دوزنقه را نشان دهید.



**حل:** در شکل (a) مربع  $ABDC$  و شکل  $FEHG$  معین می‌باشد؛ در شکل (b)  $ABDC$  یک دوزنقه است، در شکل (c) اشکال  $ABDC$ ،  $EFDC$  و  $ABFE$  دوزنقه می‌باشند و در شکل (d)  $ABDC$  یک متوازی‌الاضلاع و  $AFCE$  یک مستطیل است.

## تمرین

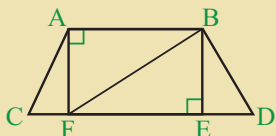


1- در شکل مقابل کدام یک مستطیل و کدام یک دوزنقه است؟ و

نیز بگویید که در این شکل چند مثلث موجود می‌باشد؟

2- کدام جملات درست و کدام نادرست اند؟

- هیچ‌گاه یک دوزنقه متوازی‌الاضلاع شده نمی‌تواند.
- اضلاع مقابل مستطیل دو به دو موازی و مساوی‌اند.
- اضلاع مقابل دوزنقه دو به دو موازی و مساوی می‌باشند.
- لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.
- مربع یک متوازی‌الاضلاع است.
- لوزی یک مربع است.



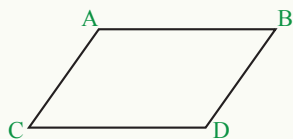
3- در شکل مقابل سه دوزنقه، یک مستطیل و یک متوازی‌الاضلاع را نشان دهید.

## زوایای مقابل متوازی الاضلاع



آیا زوایای مقابل متوازی الاضلاع با هم مساوی هستند؟

### فعالیت



متوازی الاضلاع ABDC داده شده است.

• چون  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، پس  $\hat{A} + \hat{C} = \square$

• چون  $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ، پس  $\hat{C} + \hat{D} = \square$

• از رابطه بالا داریم:  $\hat{A} + \hat{C} = \hat{C} + \square$

• از تفریق کردن  $\hat{C}$  از هر دو طرف چه رابطه‌ی به دست می‌آید؟  $\square = \square$

• راجع به زوایای  $\hat{A}$  و  $\hat{D}$  چه می‌توان گفت؟ به همین ترتیب نشان دهید  $\hat{B} = \hat{C}$  می‌باشد.

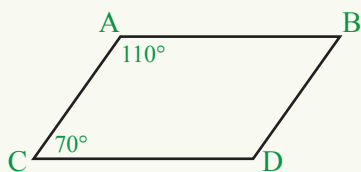
در یک متوازی الاضلاع زوایای مقابل آن با هم مساوی اند.

**مثال:** شکل ABDC یک متوازی الاضلاع است، اندازه

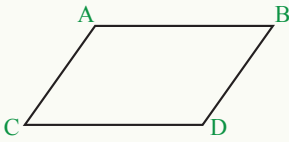
زوایای  $\hat{B}$  و  $\hat{D}$  را معلوم کنید.

**حل:** چون زوایای مقابل یک متوازی الاضلاع با هم

مساوی اند؛ پس  $\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$  و  $\hat{D} = \hat{A} = 110^\circ$



## فعالیت



چهارضلعی  $ABDC$  را در نظر می‌گیریم.

(I).....  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \square$  •

با توجه به تساوی زوایای مقابل متوازی الاضلاع داریم:  $\hat{B} = \hat{C}$  ,  $\hat{A} = \square$  •

اکنون در رابطه (I) به عوض  $A$  و  $B$  مقادیرهای  $C$  و  $D$  را می‌گذاریم.

$$\hat{D} + \hat{C} + \hat{C} + \hat{D} = \square$$

$$2\hat{C} + 2\hat{D} = \square \quad \text{از رابطه بالا}$$

$$\hat{C} + \hat{D} = \square$$

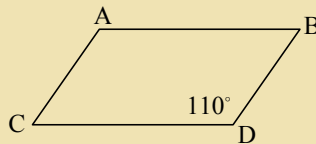
• قطعه خط‌های  $AB$  و  $CD$  چه رابطه‌یی با هم دارند؟

• به طور مشابه چه رابطه‌یی بین  $\overline{AC}$  و  $\overline{BD}$  وجود دارد؟

اگر در یک چهارضلعی زوایای مقابل آن با هم مساوی باشند، این چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

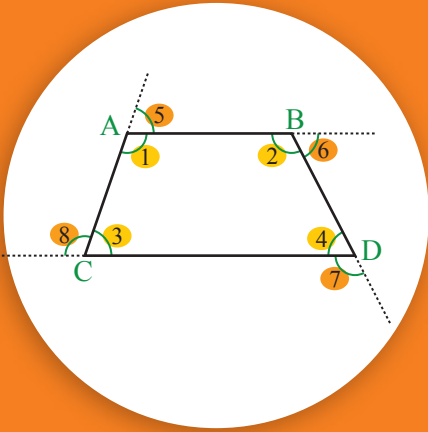
## تمرین

1- اگر در متوازی الاضلاع زیر  $\hat{D} = 110^\circ$  باشد، زوایای  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  و  $\hat{C}$  را دریابید.



2- اگر قطر یک چهارضلعی، چهارضلعی را به دو مثلث انطباق‌پذیر تقسیم کند، آیا این چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟

## زوایای خارجی یک چهارضلعی



آیا می‌توانید بگویید که مجموع زوایای خارجی یک چهارضلعی چند درجه می‌شود؟

اضلاع  $AC$ ،  $AB$ ،  $BD$  و  $CD$  را مطابق شکل بالا امتداد می‌دهیم. زوایای  $\hat{5}$ ،  $\hat{6}$ ،  $\hat{7}$  و  $\hat{8}$  زوایای خارجی این چهارضلعی می‌باشند.

$$\hat{1} + \hat{5} = 180^\circ$$

$$\hat{2} + \hat{6} = 180^\circ$$

$$\hat{4} + \hat{7} = 180^\circ$$

$$\hat{3} + \hat{8} = 180^\circ$$

می‌خواهیم نشان دهیم که  $\hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 360^\circ$  می‌باشد.

اگر هر دو طرف را جمع کنیم داریم که:

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ$$

$$360^\circ + \hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 360^\circ + 360^\circ$$

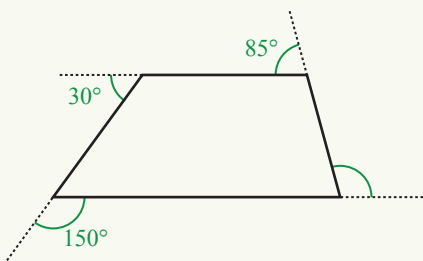
با توجه به این که مجموع زوایای داخلی چهارضلعی  $360^\circ$  است داریم:

در نتیجه  $\hat{5} + \hat{6} + \hat{7} + \hat{8} = 360^\circ$  پس مجموع زوایای خارجی یک چهارضلعی  $360^\circ$  می‌باشد.

## فعالیت



در شکل دو زاویه خارجی چهارضلعی نامعلوم می‌باشند؛ آن‌ها را دریابید.



**مثال:** سه زاویه خارجی این چهارضلعی داده شده اند. زاویه چهارمی آن چند درجه می شود؟

**حل:**

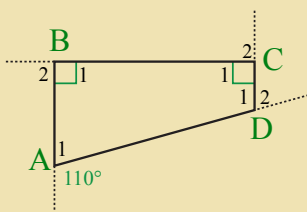
$$150^\circ + 30^\circ + 85^\circ = 265^\circ$$

چون مجموعه هر چهار زاویه خارجی یک چهارضلعی  $360^\circ$  می باشد، زاویه چهارمی مساوی است به:  $360^\circ - 265^\circ = 95^\circ$

مجموعه زوایای خارجی یک چهارضلعی  $360^\circ$  می باشد.

## تمرین

1- مجموع سه زاویه خارجی یک چهارضلعی  $301^\circ$  می باشد. زاویه چهارمی این چهارضلعی چند درجه می شود؟



2- در شکل مقابل یک زاویه خارجی چهارضلعی داده شده است، سه زاویه خارجی دیگر این چهارضلعی را دریابید.

3- آیا مجموع چهار زاویه داخلی یک چهارضلعی با مجموع چهار زاویه خارجی یک چهارضلعی مساوی است؟ چرا؟

4- مجموع زوایای داخلی و خارجی یک چهارضلعی مساوی است به:

a)  $360^\circ$

b)  $720^\circ$

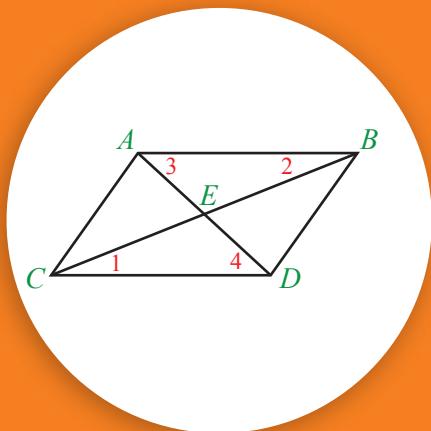
5- اگر مجموع سه زاویه داخلی یک چهارضلعی  $315^\circ$  باشد، زاویه چهارم داخلی این چهارضلعی چند درجه است؟

a)  $50^\circ$

b)  $45^\circ$

c)  $25^\circ$

## خاصیت‌های قطرهای چهارضلعی

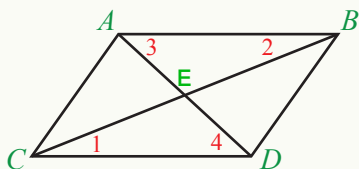


خاصیت‌های قطرهای متوازی‌الاضلاع  
در مورد قطرهای یک متوازی‌الاضلاع چه  
می‌توان گفت؟

BC و AD دو قطر متوازی‌الاضلاع ABDC می‌باشند.

### فعالیت

- ابتداء طول قطرهای متوازی‌الاضلاع را معلوم کنید.
- گفته می‌توانید که قطرها با همدیگر چه رابطه‌ی دارند؟
- خانه‌های خالی زیر را پر کنید.



$\hat{1} = \hat{\quad}$  چرا؟

$\hat{3} = \hat{\quad}$  چرا؟

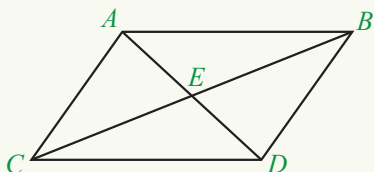
$\overline{AB} = \overline{\quad}$  چرا؟

$\triangle \cong \triangle$  چرا؟

آیا می‌توانید از تساوی دو مثلث ABE و CED بگویید که قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند؟

قطرهای متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

**مثال:** در متوازی‌الاضلاع ABDC قطر  $BC = 8\text{cm}$  و قطر  $AD = 6\text{cm}$  می‌باشد؛  
طول‌های AE و EC را معلوم کنید.

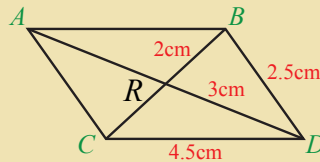


**حل:** چون قطرهای متوازی الاضلاع یک دیگر را نصف می کنند، بنابراین:

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{6\text{cm}}{2} = 3\text{cm} , \quad \overline{EC} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{8\text{cm}}{2} = 4\text{cm}$$

## تمرین

1- در چهارضلعی زیر قطعه خط های نامعلوم را دریابید.



2- کامل ترین جواب را نشانی کنید.

در یک متوازی الاضلاع قطر ها:

(a) با هم عمود اند.

(b) یکدیگر را نصف می کنند.

(c) هر دو درست اند.

در یک متوازی الاضلاع:

(a) زوایای مقابل آن دو به دو با هم مساوی اند.

(b) اضلاع مقابل آن دو به دو با هم مساوی اند.

(c) هر دو درست اند.

از تقاطع قطرهای متوازی الاضلاع:

(a) دو جوړه مثلث های انطباق پذیر تشکیل می شوند.

(b) چهار مثلث انطباق پذیر تشکیل می شوند.

## قطرهای مستطیل

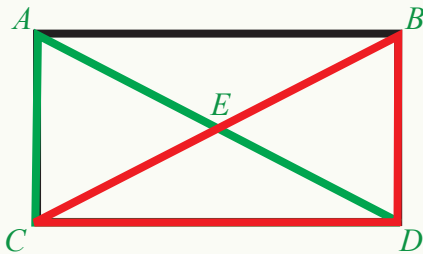


در شکل مقابل سطح روی میز کدام شکل هندسی را دارد؟ در مورد خواص آن چه می دانید؟

### فعالیت

مستطیل  $ABDC$  را در نظر بگیرید:

- قطرهای مستطیل را رسم نموده، نقطه تقاطع را  $E$  بنامید.
- قطرهای مستطیل را با خط کش اندازه گرفته و ببینید که با هم مساوی اند؟
- با در نظر داشت شکل زیر دو مثلث  $ACD$  و  $BCD$ ، خانه های خالی زیر را پر کنید.



$$\overline{DB} = \square$$

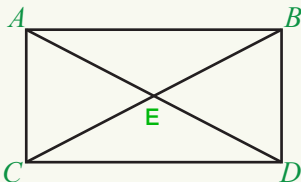
$$\hat{C} = \hat{\square}$$

$$\square = \square$$

ضلع مشترک

- درباره دو مثلث  $ACD$  و  $BCD$  چه می توان گفت؟
- آیا  $\overline{BC} = \overline{AD}$  است؟

در هر مستطیل قطرها با هم مساوی و یکدیگر را نصف می کنند.

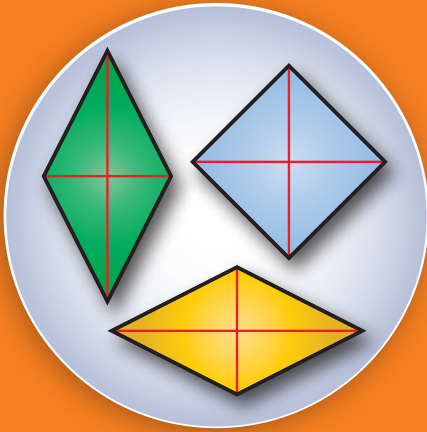


**مثال:** در شکل مقابل  $\overline{BC}$  و  $\overline{AD}$  قطرهای مستطیل  $ABDC$  می باشند؛ اگر  $ED = 4\text{cm}$  باشد، طول  $BC$  را معلوم کنید.



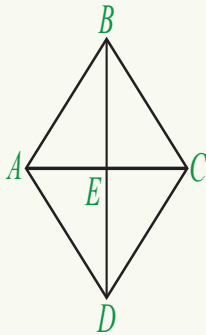
## قطرهای لوزی (معین)

در شکل مقابل اشکال هندسی را نام ببرید.



### فعالیت

- یک لوزی را رسم کنید که یک ضلع آن 4cm و یک زاویه آن  $50^\circ$  باشد.
- قطرهای این لوزی را رسم کنید.
- زاویه بین قطرهای این لوزی را اندازه بگیرید. در مورد آن چه می توان گفت؟



$\overline{AC}$  و  $\overline{BD}$  دو قطر لوزی ABCD می باشند.

می خواهیم ثابت کنیم که قطرهای لوزی بر یکدیگر عمود اند.

در لوزی ABCD داریم که:

اضلاع لوزی با هم مساوی اند ....  $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$

از طرف دیگر دو قطر  $\overline{AC}$  و  $\overline{BD}$  یکدیگر را نصف می کنند.

(لوزی یک متوازی الاضلاع است.)

پس:

$$\overline{EB} = \overline{ED}$$

$$\overline{AE} = \overline{EC}$$

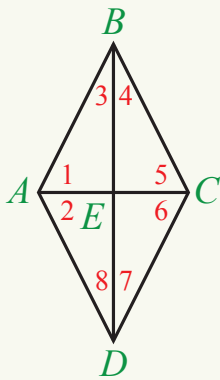
دو مثلث ABC و ACD متساوی الساقین می باشند. (اضلاع لوزی با یکدیگر مساوی اند).

در مثلث متساوی الساقین ABC ضلع AC به دو قسمت مساوی تقسیم شده است؛ بدین

معنی که خط مستقیم BE میانه و ارتفاع مثلث ABC نیز می باشد.

چون در نقطه E خط مستقیم BE عمود بر AC و همچنین در نقطه E خط مستقیم ED

عمود بر AC می باشد؛ در نتیجه:  $BD \perp AC$  می باشد.



**مثال:** در شکل مقابل  $AC$  و  $BD$  قطرهای لوزی  $ABCD$

می باشند.

اگر  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C}_5 = \hat{C}_6 = 60^\circ$  باشد، اندازه زوایای  $\hat{B}_3$ ،  $\hat{D}_7$  و  $\hat{D}_8$  را دریابید.

**حل:** چون مثلث های  $ABE$ ،  $BCE$ ،  $CDE$  و  $ADE$  قائم الزاویه

می باشند.

$$\hat{D}_7 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

در نتیجه:  $\hat{B}_3 = \hat{B}_4 = \hat{D}_7 = \hat{D}_8 = 30^\circ$  می باشد.

قطرهای لوزی بر همدیگر عمود اند و یکدیگر را نصف می کنند.

## تمرین

1- آیا قطرهای لوزی زاویه های رأس را نصف می کنند؟

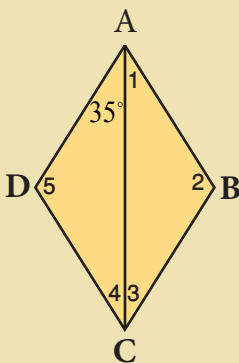
2- آیا در لوزی قطرها با هم مساوی و بر یکدیگر عمود اند؟

3- آیا قطرهای معین یکدیگر را نصف می کنند؟

4- آیا معین (لوزی) یک متوازی الاضلاع است؟

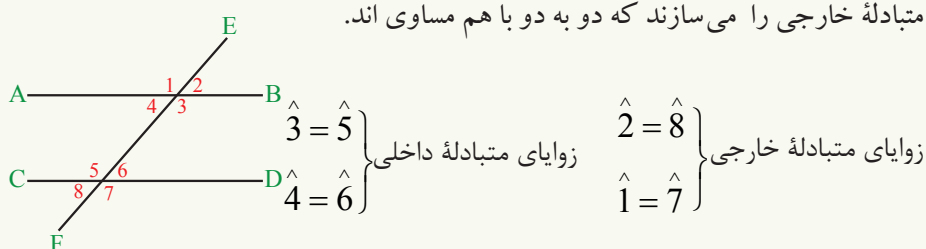
5- در این شکل معین (لوزی) در صورتی که یک زاویه آن  $35^\circ$  باشد.

مقدار زوایای  $\hat{1}$ ،  $\hat{2}$ ،  $\hat{3}$ ،  $\hat{4}$  و  $\hat{5}$  را دریابید.



## خلاصه فصل ششم

- دو خط مستقیمی که در یک مستوی قرار دارند و خودشان یا امتدادشان نقطه مشترکی نداشته باشند، با هم موازی اند. فاصله بین دو خط موازی، مساوی است.
- دو خط مستقیم عمود بر یک خط مستقیم، با هم موازی اند.
- دو خط مستقیم وقتی بر همدیگر عمود می‌باشند که زاویه بین آنها  $90^\circ$  باشد.
- اگر دو خط موازی توسط خط قاطع قطع شوند، چهار زاویه متبادله داخلی و چهار زاویه متبادله خارجی را می‌سازند که دو به دو با هم مساوی اند.

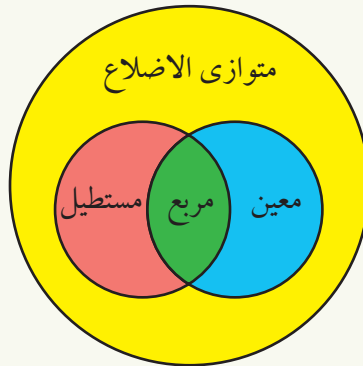


- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط مستقیم طوری قطع شوند که زاویه‌های متبادله مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.
- اگر دو خط موازی توسط یک خط مستقیم قطع شوند 8 زاویه متوافق مساوی را می‌سازند که دو به دو با هم مساوی اند.

$$\begin{aligned} \hat{2} &= \hat{6} & \hat{1} &= \hat{5} \\ \hat{3} &= \hat{7} & \hat{4} &= \hat{8} \end{aligned}$$

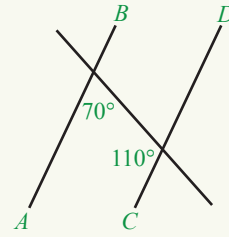
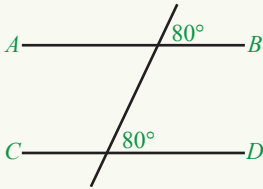
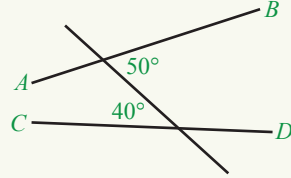
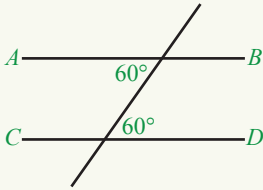
- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که زاویه‌های متوافق مساوی را بسازند، این دو خط با هم موازی اند.
- اگر دو خط مستقیم موازی توسط یک خط مستقیم قطع شوند، مجموع زوایای داخلی یک طرف خط قاطع مساوی به  $180^\circ$  می‌باشد.
- اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که مجموع زوایای داخلی یک طرف خط قاطع  $180^\circ$  باشد، این دو خط با هم موازی اند.
- در یک متوازی‌الاضلاع زوایای مقابل آن، دو به دو با هم مساوی می‌باشند.
- قطره‌های متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف کرده و از تقاطع آنها دو جوهره مثلث انطباق

- پذیر تشکیل می شوند.
- در مستطیل قطرها با هم مساوی اند و یکدیگر را تنصیف نموده، از تقاطع قطرها دو جوره مثلث انطباق پذیر تشکیل می شوند و هر چهار زاویه مستطیل قائمه می باشند.
- چهار ضلع معین (لوزی) با هم مساوی اند، قطرها بر هم عمود اند و یکدیگر را نصف می کنند و از تقاطع آن ها چهار مثلث انطباق پذیر تشکیل می شوند. همچنین قطرها زاویه رأس را نصف می کنند.
- قطرهای مربع با هم مساوی اند، بر یک دیگر عمود اند و یک دیگر را نصف می کنند. قطرهای مربع، زاویه رأس را نصف می کنند و از تقاطع آن ها چهار مثلث انطباق پذیر تشکیل می شوند.
- مجموع چهار زاویه داخلی یک چهارضلعی  $360^\circ$  می باشد و مجموع چهار زاویه خارجی یک چهارضلعی نیز  $360^\circ$  است.
- تقاطع خاصیت های متوازی الاضلاع، مستطیل، معین (لوزی) و مربع در دیاگرام وین توسط تقاطع ست ها نشان داده شده است.

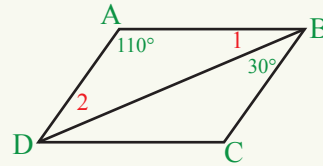
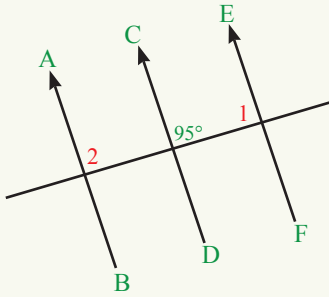


## تمرینات فصل ششم

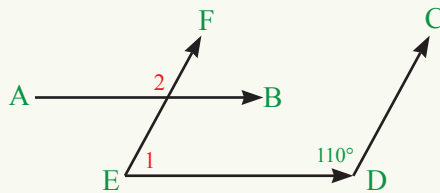
1- در کدام یک از اشکال زیر، دو قطعه خط  $AB$  و  $CD$  موازی اند؟



2- در اشکال زیر اگر  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  و  $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$  باشد، زوایای  $\hat{1}$  و  $\hat{2}$  چند درجه می‌باشند؟



3- در شکل زیر اگر  $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$  و  $\overline{FE} \parallel \overline{CD}$  باشد، زوایای  $\hat{1}$  و  $\hat{2}$  را دریابید.



4- هر خاصیتی که چهار ضلعی‌ها دارند، در مقابل آن علامت ✓ را بگذارید.

مربع	لوزی	مستطیل	متوازی‌الاضلاع	خاصیت‌ها
				قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند
				قطرها با هم مساوی اند.
				قطرها بر هم عمود اند.
				قطرها زوایای رأس را نصف می‌کنند.
				از تقاطع قطرها دو جوره مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند.
				از تقاطع قطرها، چهار مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شوند.
				اضلاع مقابل مساوی و موازی اند.
				تمام اضلاع مساوی اند.
				زوایای مقابل مساوی اند.
				هر چهار زاویه با هم مساوی اند.

5- جواب درست را انتخاب کنید:

وقتی که از تقاطع دو خط مستقیم با یک قاطع زاویه‌های متبادله مساوی تشکیل شود، این دو خط با هم:

(a) عمود اند. (b) موازی اند. (c) متقاطع اند.

دو زاویه‌یی که اضلاع‌شان موازی و هم‌جهت یا موازی و مختلف‌الجهت باشند:

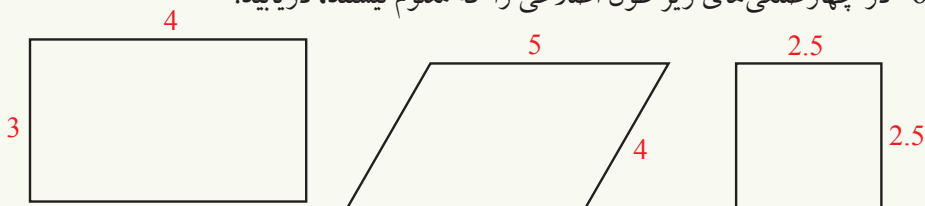
(a) مساوی اند. (b) متمم یکدیگر اند. (c) مجموع این دو زاویه  $90^\circ$  می‌شود.

دو زاویه‌یی که دو ضلع آن‌ها موازی و هم‌جهت و دو ضلع آن‌ها موازی و مختلف‌الجهت باشند:

(a) مجموع آن‌ها  $180^\circ$  می‌شود. (b) مجموع آن‌ها  $90^\circ$  می‌شود. (c) با هم مساوی اند.

دو خط مستقیم عمود بر یک خط، با هم: (a) موازی اند. (b) عمود اند. (c) متقاطع اند.  
 اگر دو خط مستقیم توسط یک خط طوری قطع شوند که مجموع دو زاویه داخلی یک طرف خط قاطع  $180^\circ$  شود، این دو خط با هم: (a) موازی اند. (b) عمود اند. (c) متقاطع اند.

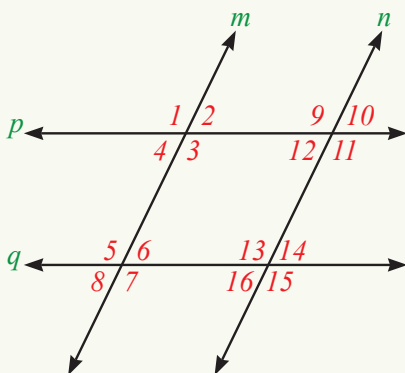
6- در چهارضلعی‌های زیر طول اضلاعی را که معلوم نیستند، دریابید:



7- اندازه سه زاویه دیگر چهارضلعی‌های زیر را به دست آورید:



8- در شکل  $m \parallel n$  و  $p \parallel q$  است؛ اگر  $\hat{2} = 40^\circ$  باشد، اندازه زاویه‌های متباقی چند درجه می‌باشد؟



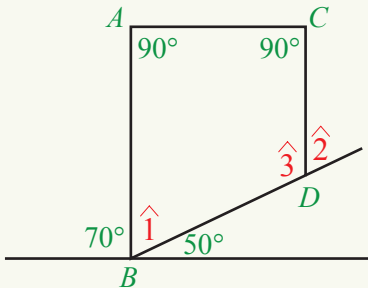
9- در بین جمله‌های زیر کدام‌ها درست و کدام‌ها نادرست اند؟

- قطرهای متوازی‌الاضلاع با هم مساوی اند.
- قطرهای مربع بر یکدیگر عمود اند.
- قطرهای معین (لوزی) یکدیگر را نصف می‌کنند.
- هر چهار زاویه معین (لوزی) قائمه می‌باشند.
- اضلاع مقابل یک متوازی‌الاضلاع دو به دو با هم مساوی و موازی اند.
- اضلاع مقابل یک دوزنقه دو به دو موازی می‌باشند.
- هیچ‌گاه یک دوزنقه متوازی‌الاضلاع شده نمی‌تواند.
- هر مستطیل یک چهارضلعی است.
- معین (لوزی) یک متوازی‌الاضلاع می‌باشد.
- مربع یگانه چهارضلعی بی است که هر چهار زاویه آن قائمه می‌باشند.
- اگر مجموع سه زاویه یک چهارضلعی  $300^\circ$  باشد، زاویه چهارم آن  $60^\circ$  است.
- مجموع زوایای خارجی یک چهارضلعی  $360^\circ$  می‌باشد.
- مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی  $360^\circ$  می‌باشد.
- قطرهای یک متوازی‌الاضلاع بر هم عمود اند.
- از تقاطع قطرهای مستطیل، چهار مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شود.
- از تقاطع قطرهای معین (لوزی) چهار مثلث انطباق‌پذیر تشکیل می‌شود.
- قطرهای مستطیل یکدیگر را نصف می‌کنند.
- قطرهای معین برهمدیگر عمود اند.

10- اگر یک زاویه متوازی‌الاضلاع قائمه باشد، نشان دهید که سه زاویه دیگر آن نیز قائمه می‌باشند.

11- اگر یک زاویه متوازی‌الاضلاع  $55^\circ$  باشد، سه زاویه دیگر این متوازی‌الاضلاع را دریابید.

12- در شکل زیر  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$  می‌باشد؛  $\hat{1}$ ،  $\hat{2}$  و  $\hat{3}$  را دریابید.





# فصل هفتم

## احصائیه

احصائیه، روشن گر اطلاعات اطراف ما می باشد.





مدیر مکتب شما می خواهد یک برنامه تفریحی را برای شما تهیه کند. اگر شما به جای مدیر مکتب باشید چه اطلاعاتی را باید کسب کنید؟

### فعالیت

- مدیر مکتب از شما خواسته است که اطلاعاتی از هم صنفی های خود جمع آوری کنید و در اختیار او قرار دهید تا بتواند یک برنامه تفریحی برای شما تهیه کند.
- 1- از 5 نفر از هم صنفی های خود سؤالات زیر را پرسید:
- چه نوع ورزشی را دوست دارید؟
  - چند ساعت در هفته می خواهید ورزش کنید؟
  - آیا حاضر استید در روز رخصتی برای ورزش کردن به مکتب بیایید؟
- 2- چه فکر می کنید اطلاعات بالا را بهتر است که با پرسیدن شفاهی از هم صنفی های خود به دست آورید یا سؤالات را برای آن ها بنویسید و آن ها پاسخ بگویند؟
- پرسیدن شفاهی با پرسیدن کتبی چه فرقی می کند؟
  - می خواهید بفهمید که کدام هم صنفی شما بازی والیبال را بلد است؟
- آیا از او می پرسید؟
- آیا ترجیح می دهید که بازی او را تماشا کنید؟
- دو روش بالا چه فرقی با هم دارند؟ کدام یک بهتر است؟
  - برای انتخاب تیم بسکتبال، قد هم صنفی های خود را اندازه بگیرید.
  - آیا روش دیگری برای پیدا کردن اندازه قد آن ها وجود دارد؟

اطلاعات خود را در یک ورق بنویسید و به معلم بدهید.

وقتی که برای جمع آوری اطلاعات، سؤال می کنید، سؤال را می توانید به شکل شفاهی یا کتبی پرسید. برخی اوقات بهتر است سؤال نکنیم؟ در این مورد به مشاهده آن پردازیم تا اطلاعات بهتر به دست آوریم و بعضی اوقات باید آزمایشی را انجام دهیم تا اطلاعات را جمع آوری نمایم.

برخی از روش‌های جمع‌آوری اطلاعات عبارت از جمع‌آوری معلومات از طریق پرسش (شفاهی یا کتبی)، مشاهده و آزمایش اند.

### مثال:

- 1- اگر بخواهیم درآمد یک خانواده را بدانیم، از چه روشی بهتر است اطلاعات را جمع‌آوری نماییم یا از اطلاعاتی که از قبل ثبت شده، استفاده نماییم؟
- 2- اگر بخواهیم نمره ریاضی شاگردان صنف ششم را بررسی نماییم، از چه روشی بهتر است اطلاعات را جمع‌آوری نماییم؟
- 3- اگر بخواهیم تعداد خواهران و برادران شاگردان را بدانیم از چه روشی اطلاعات را جمع‌آوری کنیم؟
- 4- اگر بخواهیم وزن نوزادان را بررسی کنیم، از چه روشی بهتر است اطلاعات را جمع‌آوری نماییم؟

### حل

- در مثال 1 هرگاه در آمد کم باشد، ممکن است شاگردان خوش نداشته باشند که معلومات دهند؛ پس بهتر است بدون نام از آن‌ها پرسیم.
- در مثال (2) ممکن است شاگردان نمره واقعی خود را نگویند، بهتر است از دفاتر ثبت شده استفاده کنیم.
- در مثال (3) می‌توانیم از پرسش شفاهی یا کتبی استفاده کنیم.
- در مثال (4) باید وزن نوزادان را اندازه‌گیری نماییم.

## تمرین

- 1- اگر شما بخواهید تعداد اشخاص با سواد محل تان را بدانید از چه روشی باید استفاده کنید؟
  - 2- اگر شما بخواهید تعداد شاگردان مکتب خود را بیابید، از چه روشی باید استفاده کنید؟
  - 3- اگر شما بخواهید رفتار حیوانات را در شب بررسی کنید، از چه روشی باید استفاده کنید؟
  - 4- دو موضوع بررسی برای هر یک از روش‌های جمع‌آوری اطلاعات بیان کنید.
- پرسش شفاهی (مصاحبه)
  - پرسش کتبی
  - مشاهده



آیا یک مشت برنج نمونه‌ی از یک بوجی  
برنج شده می‌تواند؟

### فعالیت

وزارت معارف می‌خواهد نظر معلمان را در مورد کافی بودن تعداد ساعت‌های درسی  
مضمون ریاضی بررسی کند.

- فکر می‌کنید، از چه کسانی باید سؤال شود؟
- آیا از معلمان صنف خاصی باید سؤال صورت گیرد؟
- چه فکر می‌کنید؛ اگر بخواهیم از همه معلمان مربوطه سؤال کنیم، چه مشکلاتی وجود خواهد داشت؟
- آیا کافی است تا از یک بخشی از معلمان سؤال کنیم؟
- آیا کافی است تا این بخش را فقط از معلمان صنف هفتم انتخاب کنیم؟

در فعالیت بالا معلمان ریاضی، افرادی هستند که از آن‌ها باید سؤال شود؛ ولی لزومی ندارد  
که از معلم اجتماعیات سؤال شود.

در یک بررسی، همه افراد و اشیا **ی** که از آن‌ها اطلاعات مورد نیاز را دریافت می‌کنیم، جامعه  
می‌نامیم؛ اگر اطلاعات را از همه اعضای جامعه به دست آوریم، این عمل را رأی‌پرسی  
همگانی می‌گویند. برخی اوقات به دلیل مشکلاتی چون کمبود وقت، مشکلات اقتصادی،  
امکان نداشتن دسترسی به همه افراد جامعه مجبور هستیم فقط اطلاعات بخشی از اعضای  
جامعه را به دست آوریم.

**نمونه**، بخشی از اعضای جامعه است. نمونه‌ی از یک جامعه، باید خاصیت و صفات کل  
جامعه را داشته باشد.

**مثال:** مثال‌هایی از جامعه و موضوع مورد بررسی آن‌ها به صورت زیر است:

- معلمان ولایت هرات ..... سابقهٔ تدریس معلمان در هرات
- محصول پنبهٔ سمت شمال ..... میزان تولید پنبه
- محصولات زراعتی افغانستان ..... انواع محصولات افغانستان

2- مثال‌هایی از نمونه به صورت زیر است:

- یک مشت برنج، نمونه‌یی از یک بوجی برنج است.
- شاگردان صنف هفتم مکتب شما نمونه‌یی از شاگردان صنف هفتم افغانستان استند.
- معلمان ریاضی کندز، نمونه‌یی از معلمان کندز است.
- گندم نمونه‌یی از محصولات زراعتی افغانستان است.

## تمرین

1- در موضوع‌های بررسی زیر جامعهٔ آن‌ها را تعیین کنید:

- میزان تحصیلات اعضای خانوادهٔ شما.
- تعداد خواهران و برادران شاگردان صنف شما.
- ساعات کار دکتوران شفاخانهٔ علی آباد.
- مدت زمان عبور موترها از یک سرک.

2- در کدام حالت از سرشماری و در کدام حالت از نمونه‌گیری برای جمع‌آوری اطلاعات استفاده می‌کنیم؟

- پیدا کردن جمعیت افغانستان.
- میزان علاقهٔ کودکان 5 ساله به فوتبال.
- وزن متوسط یک گوسفند 2 ساله.
- نمرهٔ ریاضی شاگردان صنف هفتم برای درجه بندی.
- قابلیت نوشیدن آب یک چاه.
- رضایت مشتریان از محصولات یک کارخانه.
- احصایه‌گیری تعداد فرزندان هر خانواده در شهر کابل.



در این کارتن نام‌های شاگردان صنف هفتم در پارچه‌های کاغذ نوشته شده اند؛ اگر برای انتخاب اعضای تیم باسکتبال، این شاگرد نام‌های پنج نفر را از کارتن بیرون کند، آیا این یک نمونه تصادفی شده می‌تواند؟

### فعالیت

- می‌خواهیم قد شاگردان صنف دهم ولایت شما را اندازه بگیریم:
- آیا می‌توانیم بلندی قد همه شاگردان صنف دهم ولایت شما را تعیین کنیم؟
  - آیا اعضای تیم باسکتبال صنف دهم ولایت شما را می‌توانیم برای این بررسی انتخاب کنیم؟ چرا؟
  - به عنوان نمونه صنف دهم مکتب خود را در نظر بگیرید، 6 نفر از آن‌ها را به ترتیب الفبای نام شان انتخاب کنید. آیا این نمونه می‌تواند نشان‌دهنده قد شاگردان صنف دهم مکتب شما باشد؟
  - آیا این نمونه می‌تواند نمونه قد تمام شاگردان صنف دهم ولایت شما باشد؟

در فعالیت بالا نمونه انتخاب شده در تیم باسکتبال یک نمونه تصادفی نیست؛ زیرا از قبل می‌توانیم حدس بزنیم همه آن‌ها قد بلند اند؛ ولی نمونه انتخاب با حروف الفبای نام شان یک نمونه تصادفی است؛ زیرا نام شاگردان به قد آن‌ها مربوط نمی‌باشد و اگر از قبل شاگردان را شناسیم نمی‌توانیم با دانستن نام آن‌ها قد شان را حدس بزنیم. برای آن که یک نمونه، نشان‌دهنده یک جامعه و دارای خصوصیات جامعه باشد، باید خصوصیات زیر را داشته باشد:

- امکان انتخاب هر فرد و یا شی به عنوان عضوی از نمونه امکان‌پذیر باشد.
- قبل از انتخاب نمونه نتوانیم در باره اعضای نمونه قضاوت کنیم.
- تمام اعضای جامعه به عنوان یک نمونه سهم برابر داشته باشند.

**مثال:** کدام یک از نمونه‌های زیر یک نمونه تصادفی است؟

- موضوع بررسی: سواد اهالی شهر.
- جامعه: اهالی شهر.
- نمونه اول: هر فردی که ساعت 5 بعد از ظهر از سرک عبور کند.
- نمونه دوم: دکتوران یک شفاخانه.

**حل:**

- نمونه اول یک نمونه تصادفی است؛ زیرا از قبل سواد افرادی که از سرک می‌گذرند را نمی‌توان پیش‌بینی کرد.
- نمونه دوم یک نمونه غیر تصادفی است؛ زیرا از قبل می‌توان نتیجه را پیش‌بینی کرد و این نمونه نشان دهنده همه جامعه نیست.

## تمرین

- 1- در هر یک از بررسی‌های زیر، علت مناسب بودن یا مناسب نبودن نمونه‌ها را بیان کنید.
  - موضوع: رضایت مشتریان از محصولات یک کارخانه.  
نمونه: خانواده کارگران کارخانه.
  - موضوع: مطالعه تعداد فرزندان هر خانواده در شهر.  
نمونه: ساکنین یکی از مناطق یک شهر که به گونه تصادفی انتخاب شده باشند.
- 2- نام تمام هم‌صنفی‌های خود را روی کاغذهای کوچک نوشته و سپس به اساس قرعه 5 نفر را انتخاب کنید. آیا این یک نمونه تصادفی است؟ چرا؟

## متحول تصادفی و انواع آن



زلمی به بازار رفت و از دیدن رنگ‌های مختلف میوه‌ها شادمان شد. چند عدد کیله چند عدد بادرنگ و 2 کیلوگرام انگور خرید. طرز خریدن این میوه‌ها چه تفاوتی با هم دارند؟

### فعالیت

- یک موضوع مورد بررسی را نام ببرید که اطلاعات پیرامون آن را می‌توانیم با اندازه‌گیری به دست آوریم.
- یک موضوع مورد بررسی را نام ببرید که برای پاسخ دادن به آن بتوان شمارش کرد.
- پاسخ‌های دو موضوع بالاچه تفاوتی با هم دارند؟
- یک موضوع مورد بررسی را نام ببرید که پاسخ‌های آن را نمی‌توانیم با عدد بیان کنیم.
- در هر یک از موارد بالا یک جامعه را بررسی و معرفی کنید.
- در مثال‌های بالا آیا اطلاعات در مورد موضوعی را می‌توان قبل از جمع‌آوری اطلاعات در مورد هر یک از اعضای جامعه پیش‌بینی کرد؟

اگر اطلاعات جمع‌آوری شده از موضوع مورد مطالعه از یک عضو جامعه به عضو دیگر قابل پیش‌بینی نباشد، موضوع را متحول تصادفی می‌نامیم.

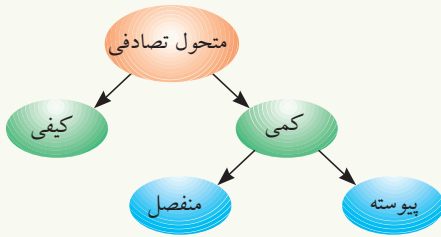
برخی از اطلاعات را با عدد می‌توان بیان نمود.

این دسته از متحول‌ها را به نام متحول کمی یا عددی می‌نامیم؛ هرگاه در متحول کمی نتوانیم بین دو واحد پشت سر هم عددی پیدا کنیم، آن را متحول کمی مجزا می‌نامیم.

اگر بین دو واحد پشت سر هم بتوانیم عددی را پیدا نماییم، آن متحول را متحول کمی پیوسته می‌نامیم.

در صورتی که اطلاعات را توصیف و بدون عدد بیان کنیم، متحول را متحول کیفی یا توصیفی می‌نامیم.

مطالب بالا را می‌توان به شکل زیر نشان داد:



**مثال:**

سه متحول تصادفی را نام بگیرید که بتوان با شمارش، سه متحول تصادفی را نام ببرید که بتوان با اندازه‌گیری و سه متحول تصادفی را نام ببرید که بتوان با توصیف در مورد آن‌ها سخن گفت.

کیفی	کمی پیوسته	کمی مجزا
رنگ چشم شاگردان	طول قد شاگردان	تعداد اعضای خانوادهٔ تان
میزان سواد کارگران	درجهٔ حرارت شهر شما	تعداد صنف‌های مکتب
موسیقی مورد علاقهٔ مردم	وزن گوسفندان	تعداد موترهایی که از یک سرک می‌گذرند

## تمرین

- 1- متحول‌های تصادفی‌یی را نام ببرید که مربوط به سه نوع شکل ماده: مایع، جامد و گاز باشند.
- 2- آیا درجهٔ حرارت ولایت کابل در روزهای ماه جدی متحول‌های تصادفی می‌باشد؟ چرا؟ نوع آن را تعیین کنید.
- 3- آیا تعداد موترهایی که از پیش روی شما در ساعت هشت صبح می‌گذرد متحول تصادفی است؟ چرا؟ نوع آن را تعیین کنید.
- 4- کدام یک از متحول‌های زیر مجزا، پیوسته و کدام یک آن‌ها کیفی اند؟
  - تعداد مکالمات تلفونی یک اداره در یک روز.
  - زمان مکالمات تلفونی یک اداره.
  - جنسیت شرکت کننده گان در یک مهمانی.
  - تعداد نامه‌های یک صندوق.
  - وضع سواد مردم یک ولایت.
  - وزن نامه‌های موجود در یک صندوق.
  - تعداد بیماران مراجعه کننده به یک شفاخانه در طول روز.
  - میزان تحصیلات اهالی یک شهر (بکلوریا، لیسانس، ماستر، دکتور).
  - حالت متأهل بودن کارمندان یک اداره.

## جدول کثرت (Frequency Table)



در کلمه معلم چند مرتبه حرف "م" تکرار شده است؟

### فعالیت

رنگ مورد علاقه 30 نفر از شاگردان مکتب شما را که همه به گونه تصادفی انتخاب شده بودند پرسیدیم. جواب آن‌ها قرار زیر است:

سبز آبی زرد سرخ سبز سفید آبی سبز زرد سرخ  
 سرخ زرد سبز آبی آبی آبی آبی آبی آبی  
 زرد سرخ زرد آبی سبز آبی سرخ زرد سرخ

- | رنگ  | تعداد |
|------|-------|
| آبی  |       |
| زرد  |       |
| سبز  |       |
| سفید |       |
| سیاه |       |
| سرخ  |       |
- آیا با یک نگاه سریع می‌توانید بگویید کدام رنگ بیشتر از همه یا کمتر از همه رنگ‌ها مورد علاقه واقع شده است؟
  - با شمارش بگویید، تعداد افرادی که هر رنگ را انتخاب کرده اند چند است؟ جواب را در جاهای خالی بنویسید.
  - جمع اعداد ستون راست چند است؟ این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟
  - اکنون با نگاه کردن به رنگ‌ها، آیا می‌توانید سریع‌تر به سؤال اول جواب دهید؟
  - اگر ترتیب نوشتن رنگ‌ها را عوض کنیم، آیا جواب شما عوض می‌شود؟

در یک بررسی، داتاهای جمع‌آوری شده را که روی آن هیچ عملی انجام نشده باشد داتای خام می‌نامند. در هر بررسی با منظم کردن داتاها جدولی تشکیل نموده که آن را جدول کثرت می‌نامیم، در فعالیت فوق ستون چپ این جدول نشان‌دهنده داتاها و ستون راست این جدول نشان‌دهنده کثرت هر یک از این داتاها می‌باشد. برخی اوقات جدول را به شکل سطری ترتیب نموده و تعداد دفعاتی را که یک داتا تکرار شده است کثرت آن داتا می‌نامیم.

مجموع کثرت داتاها در یک نمونه برابر با کل داتاها یا تعداد اعضای نمونه می‌باشد؛ اگر  $f_1$  کثرت دیتای اول،  $f_2$  کثرت داتای دوم، ...،  $f_n$  کثرت داتای  $n$ -ام و تعداد کل داتاها مساوی به  $n$  باشد؛ پس:

$$n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

**توجه:** اطلاعات اولیه جمع‌آوری شده را دایتا (Data) می‌گویند.

**مثال:**

یک شهر را به عنوان جامعه و چهل خانواده از این شهر را به عنوان نمونه انتخاب کرده؛ سپس از این خانواده‌ها تعداد اعضای شان را می‌پرسیم و داتاها را زیر را به دست می‌آوریم:

1	2	3	5	5	2	1	2	4	3
5	3	4	1	3	3	4	4	2	6
1	6	2	4	5	1	4	2	3	7
8	7	3	6	5	4	2	4	3	3

برای به دست آوردن معلومات بهتر، داتاها را بالا را به صورت منظم در جدول زیر خلاصه می‌کنیم. در این جدول سطر اول نوع خانواده از نظر جمعیت و سطر دوم تعداد خانواده‌ها را نشان می‌دهد:

تعداد اعضای هر خانواده	1	2	3	4	5	6	7	8	مجموع
تعداد خانواده‌ها	5	7	9	8	5	3	2	1	40

جدول بالا نشان می‌دهد که پنج خانواده 1 نفر عضو و 8 خانواده 4 نفر عضو دارند و در بین خانواده‌ها فقط یک خانواده دارای 8 عضو است.

## تمرین

1- از 20 نفر دوستان، فامیل یا همسایه‌گان خود پرسید که به کدام یک از ورزش‌ها (فوتبال، والیبال، باسکتبال و دوش) علاقه دارند. پاسخ‌ها را در یک جدول کثرت خلاصه کنید. کدام ورزش بیشتر از دیگر ورزش‌ها مورد علاقه است؟


2- جدول مقابل اوسط حرارت شهرهای مختلف را در ماه

نام شهر	اوسط درجه حرارت
بلخ	20
بامیان	10
کنز	24
جلال‌آباد	25

حمل بر حسب درجه سانتی‌گرید نشان می‌دهد.

- کدام شهر در این ماه از همه سردتر است؟
- کدام شهر در این ماه از همه گرم‌تر است؟



اگر در ابتدای یک سرک علامت  را ببینید، چه پیامی به ذهن تان می رسد؟


## فعالیت

انسان‌های اولیه خواندن و نوشتن را نمی دانستند؛ اگر شما به جای انسان‌های اولیه می بودید برای بیان تعداد گوسفندان خود چه می کردید؟

- اگر یک گوسفند می داشتید؟
- اگر پنج گوسفند می داشتید؟
- اگر صد گوسفند می داشتید؟

از فعالیت بالا فهمیده می شود که برای دانستن اطلاعات می توانیم از سمبول‌ها و اشکال استفاده کنیم، این روش ارائه توسط تصویر را به نام گراف تصویری یاد می کنند. در صورتی که کثرت (فریکونسی) داده‌ها زیاد باشد، از مقیاس استفاده می کنیم.

**مثال:** یک هنرمند یک تعداد مجسمه را در مدت زمان شش ماه (حمل، ثور، جوزا، سرطان، اسد و سنبله) می سازد و آن‌ها را در یک قفسه کارگاه خود، قرار شکل زیر جا به جا می کند:

						
						
						
						
						
سنبله	اسد	سرطان	جوزا	ثور	حمل	 = 2

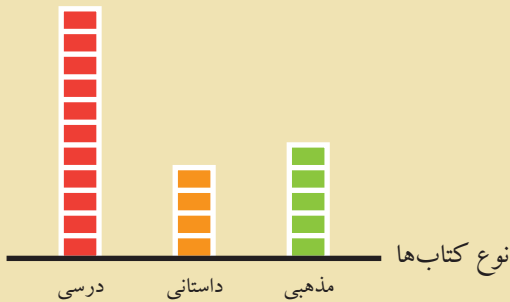
• در کدام ماه تعداد بیشتر مجسمه ساخته شده اند؟ چند تا؟

• در کدام ماه تعداد کمتر مجسمه ساخته شده اند؟ چند تا؟

**حل:** مقیاس «دو» است، پس هر علامت دو مجسمه را نشان می‌دهد، بیشترین مجسمه در ماه سرطان ساخته شده‌اند؛ زیرا  $6 \times 2 = 12$  می‌شود و کمترین مجسمه در ماه جوزا و اسد ساخته شده‌اند؛ زیرا  $3 \times 2 = 6$  است. گراف نشان می‌دهد که در ماه‌های جوزا و اسد به تعداد برابر مجسمه ساخته شده‌اند.

## تمرین

1- خالد تعدادی از کتاب‌های خود را با گراف تصویری زیر نشان داده است.



• خالد از هر نوع کتاب چند تا دارد؟

• از کدام نوع کتاب بیشتر دارد؟

2- گراف زیر میزان مطالعه خالد را در روزهای مختلف نشان می‌دهد.



● = 3 ساعت

• نشان‌دهنده چیست؟ ● نشان‌دهنده چیست؟

• خالد در هر روز چند ساعت مطالعه کرده است؟



فابریکه‌های تولید لباس، از بعضی رنگها بیشتر استفاده می‌کنند. فکر می‌کنید چرا؟

### فعالیت

در یک ولایت که حدود دوصدوپنجاه هزار جمعیت دارد سه نفر می‌خواهند، برای عضویت در شورای ملی خود را کاندید نمایند، کسی که بیشترین رأی را کسب نماید عضو مجلس شورای ملی می‌گردد. در رأی‌گیری 150000 نفر شرکت کردند. شما می‌خواهید بدانید که کدام یک از این کاندیدها عضویت شورای ملی را حاصل نموده است.

- |            |                                 |
|------------|---------------------------------|
| کاندید اول | 30 فی صد آراء را از خود می‌کند. |
| کاندید دوم | 50 فی صد آراء را از خود می‌کند. |
| کاندید سوم | 20 فی صد آراء را از خود می‌کند. |
- جدول کثرت برای تعداد رأی هر کاندیدا را تشکیل دهید.
  - بیشترین تعداد رأی را چه کسی گرفته است؟ چند رأی گرفته است؟
  - چه کسی وارد شورای ملی می‌شود؟
  - آیا تفاوت رأی بین رای‌های دو کاندید دیگر، در انتخابات اثرگذار است؟

در فعالیت بالا دیدیم که می‌توان داتایی را یافت که بیشترین فریکونسی را دارد، داتایی که بیشترین کثرت داشته باشد **Mode** می‌نامیم. مد در بسیاری از موضوعات کاربرد دارد؛ مانند: رأی‌گیری‌ها، فروش کالاها و غیره.

**مثال اول:** نمرات مضمون ریاضی یک شاگرد صنف هفتم در طول شش سال گذشته برابر است با:

91 ، 81.5 ، 70 ، 81 ، 91 ، 71

مد نمرات شاگرد را حساب کنید.  
 مد نمرات شاگرد عدد 91 است؛ زیرا بیشتر از بقیه داتاها آمده است.  
**توجه:** ممکن است یک مجموعه از اطلاعات داده شده یک یا بیشتر از یک مُد داشته باشد  
 و یا هم هیچ مُد نداشته باشد.  
**مثال دوم:** اطلاعات داده شده

1, 1, 2, 3, 4, 2, 5, 7, 5, 5

دارای سه مد 1، 2 و 5 است  
 همچنان اطلاعات داده شده

2, 4, 3, 5, 7

هیچ مد ندارد.

## تمرین

1- مد اطلاعات داده شده زیر را در یافت کنید.

- 2, 2, 5, 7, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18
- 3, 5, 8, 10, 2, 15, 16
- 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 7, 7, 7

2- مُد را در ست‌های زیر دریافت کنید.

$$A = \{17, 19, 19, 19, 21\}$$

$$B = \{1, 4, 10, 61\}$$

$$C = \{0, 9, 8, 5, 9, 10, 8\}$$

3- نمرات سالانه یک شاگرد در زیر داده شده است. مد آن را دریافت کنید.

دری	پشتو	انگلیسی	عربی	تعلیمات اسلامی	اجتماعیات	تربیت بدنی	هنر	ساینس	ریاضی
90	68	77	84	78	81	95	80	82	97

4- در یک مغازه لباس، پنج نوع لباس به رنگ‌های سرخ، سبز، سیاه، سفید و آبی موجود است. از لباس سرخ 9، از لباس سبز 14، از لباس سیاه 12، از لباس سفید 8 و از لباس آبی 19 دست به فروش رسیده است؛ بیش‌ترین لباس‌هایی که به فروش رسیده‌اند را تعیین کنید.

5- در گراف زیر محل تقریبی مد را مشخص کنید.

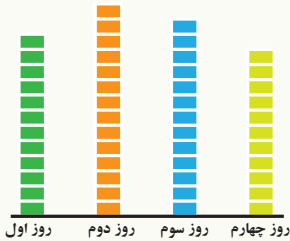


$$\frac{37 + 45 + 29}{3} = ?$$

اوسط نمرات یک شاگرد 78 است و اوسط نمرات شاگرد دیگر 82 آیا می‌توان گفت که شاگرد دوم در تمام مضامین از شاگرد اول بهتر است؟

### فعالیت

پرویز چهار روز متوالی کتاب خواند؛ روز اول 12 صفحه، روز دوم 14 صفحه، روز سوم 13 صفحه و روز چهارم 11 صفحه؛ این اطلاعات با گراف زیر نشان داده شده است.



- پرویز چند صفحه خوانده است؟
- مربع‌های روی میله‌ها را طوری جابه‌جا کنید که هر چهار میله طول یکسان داشته باشند، شکل آن را رسم کنید.
- طول میله‌ها پس از برابری، مساوی به چند واحد است؟
- مجموع طول میله‌های برابر چقدر است؟ آیا این مجموع تفاوتی با مجموع صفحات خوانده شده دارد؟
- چطور می‌توانیم طول میله‌های برابر را با داشتن تعداد کل صفحات و تعداد روزها پیدا کنیم؟
- آیا پرویز می‌تواند بگوید که به طور اوسط هر روز چند صفحه کتاب را خوانده است؟

از فعالیت بالا معلوم شد که اوسط چند عدد را می‌توانیم با تقسیم حاصل جمع اعداد بر تعداد عددها پیدا کنیم. اگر به تعداد  $n$  دیتا داشته باشیم و آن‌ها را با  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نشان دهیم

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

و اوسط را به  $\bar{X}$  داریم:

**مثال:** نمره‌های نازو و زرغونه در پایان سال گذشته در مضمون‌های مختلف به صورت زیر است:

مضمون	ریاضی	ساینس	دری	پشتو	عربی	تعلیمات اسلامی	هنرها	تربیت بدنی	انگلیسی	علوم اجتماعی
زرغونه:	78	78	85	87	79	90	70	85	91	86
نازو:	86	89	85	88	91	79	89	90	73	92

بادیدن نمرات، آیا می‌توانید بگویید کدام شاگرد، بیشتر درس خوانده است؟  
 باید اکردن اوسط نمرات ابراز نظر کنید.  
 اگر مکتب به زرغونه دوباره فرصت دهد تا اوسط خود را بهتر بسازد، فکر می‌کنید که کدام مضمون را باید دوباره امتحان دهد؟  
 برای آن که اوسط نمرات زرغونه به 85 برسد، در مضمون هنرها چه نمره‌یی باید بگیرد؟  
 آیا امکان دارد که اوسط او به 90 برسد؟

**حل:**

$$\frac{86 + 91 + 85 + 70 + 90 + 79 + 87 + 85 + 78 + 78}{10} = \frac{829}{10} = 82.9$$

اوسط نمرات زرغونه 82.9

$$\frac{92 + 73 + 90 + 89 + 79 + 91 + 88 + 85 + 89 + 86}{10} = \frac{862}{10} = 86.2$$

اوسط نمرات نازو 86.2

نمره‌یی را که زرغونه در امتحان مجدد در مضمون هنرها باید به دست آورد چنین پیدا می‌کنیم.

$$\frac{86 + 91 + 85 + \square + 90 + 79 + 87 + 85 + 78 + 78}{10} = 85$$

$$\square + 759 = 85 \cdot 10 = 850$$

$$\square = 850 - 759 = 91$$

پس برای آن که اوسط نمرات زرغونه 85 شود، او باید نمره 91 را در مضمون هنرها به دست آورد.

برای آن که اوسط نمرات زرغونه 90 شود، چنین عمل می‌کنیم.

$$\frac{86 + 91 + 85 + \square + 90 + 79 + 87 + 85 + 78 + 78}{10} = 90$$

$$\square + 759 = 90 \times 10 = 900$$

$$\square = 900 - 759 = 141$$

کسب چنین نمره‌یی امکان ندارد؛ پس اوسط نمرات زرغونه با یک امتحان دیگر در مضمون هنرها هیچگاه 90 نمی‌شود.

## تمرین

1- محصولات پنبه سه مزرعه در پنج سال گذشته به صورت زیر بوده است. (عددها بر حسب تُن است).

12	15	13	20	8	مزرعه اول:
11	17	18	7	13	مزرعه دوم:
18	9	8	11	10	مزرعه سوم:

- اوسط محصول پنبه هر مزرعه را در پنج سال گذشته پیدا کنید. کدام مزرعه به طور متوسط تولید بیشتری داشته است؟

2- درآمد ماهانه 6 نفر از اعضای یک خانواده قرار زیر است:  
5000 افغانی، 10000 افغانی، 8000 افغانی، 5000 افغانی، 15000 افغانی و 3500 افغانی

- مجموعه درآمد این خانواده را پیدا کنید.
- اوسط درآمد ماهوار این خانواده را پیدا کنید.

3- سن بازیکنان تیم ملی فوتبال به شرح زیر است:

27	24	26	26	29	19	31	18	23	22
25	26	27	23	29	25	25	33	31	21
26	25								

- اوسط سن بازیکنان تیم را به دست آورید.
- تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از اوسط. و همچنان تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از اوسط است را تعیین کنید.

4- اوسط 9 عدد 3، 8، 5، 9، 3، 7، 8، a و 4 برابر 5.5 است؛ a را پیدا کنید.

5- نمرات امتحان سالانه احمد و حامد در جدول زیر داده شده اند:

مضمون	ریاضی	ساینس	عربی	انگلیسی	دری	پشتو	علوم اجتماعی	تربیت بدنی	هنر ها	تعلیمات اسلامی
احمد	73	71	76	86	93	75	82	85	62	92
حامد	85	65	76	82	94	78	66	93	91	82

- اوسط نمرات هر کدام را حساب کنید.
- با مقایسه اوسط نمرات آن‌ها بگویید که: کدام یک بیشتر نمره گرفته است؟

## خلاصه فصل هفتم

- اطلاعات جمع آوری شده را دیتا می گویند.
- روش های جمع آوری اطلاعات عبارت اند از:
  - پرسش (شفاهی یا کتبی) مشاهده، انجام آزمایش و استفاده از اطلاعات ثبت شده.
  - جامعه احصائیه یی یا به طور خلاصه جامعه، مجموعه یی از افراد و اشیایی است که در باره اعضای آن اطلاعات مورد نیاز را دریافت می کنیم.
  - بخشی از جامعه را نمونه می گویند.
  - تعداد اعضای جامعه اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامند.
  - برای شناخت جامعه، نمونه یی را که از آن جامعه انتخاب می کنیم، باید نمونه تصادفی باشد، شرط های انتخاب نمونه قرار زیر اند:
    - انتخاب هر فرد به عنوان عضوی از نمونه امکان پذیر باشد.
    - پیش از انتخاب یک نمونه باید نتوانیم درباره مشخصات آن قضاوت کنیم.
    - اطلاعات جمع آوری شده در باره یک موضوع را متحول های تصادفی می گویند.
    - متحول های تصادفی دو نوع اند:
      - کمی یا عددی که قابل اندازه گیری اند.
      - کیفی یا غیر عددی که قابل اندازه گیری نمی باشند.
    - متحول های کمی دو نوع اند:
      - پیوسته، که بین هر دو مقدار آن می توان مقدار دیگر را دریافت کرد.
      - مجزا، که پیوسته نباشد.
  - اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  تعداد دیتای یک موضوع باشند، تعداد دفعاتی که یک دیتا تکرار می شود به نام کثرت آن دیتا یاد می شود و معمولاً آن را به  $f_1, f_2, \dots, f_n$  نشان می دهند.
  - گاهی برای دانستن اطلاعات داده شده از سمبول ها و اشکال استفاده می کنند که این ارائه توسط تصویر را به نام گراف تصویری یاد می کنند.
  - مُد دیتایی است که بیشترین کثرت را داشته باشد.
  - اوسط دیتا را می توان از تقسیم حاصل جمع دیتا بر تعداد دیتا به دست آورد.

- 1- موضوعات زیر را در نظر گرفته و درباره بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها برای آزمایش این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید.
  - بیش‌تر مردم فکر می‌کنند حد اکثر سرعت در دستگاه‌ها باید معین باشد.
  - در زمان مطالعه گوش دادن به موسیقی به یادگیری کمک می‌کند.
  - رژیم گرفتن موجب کاهش هوش می‌شود.
- 2- اگر گفته شود که تعداد فرزندان خانواده‌ها در سال‌های قبل به طور اوسط 7 نفر بوده و اکنون 5 نفر است و از شما خواسته شود که یک نمونه 100 تایی را در نظر گرفته و درستی این موضوع را بررسی کنید، در این مطالعه، جامعه و نمونه را واضح سازید.
- 3- یک موضوع بررسی و جامعه‌ی را نام بگیرید که صنف شما نمونه آن باشد.
- 4- یک موضوع بررسی و نمونه‌ی از جمعیت افغانستان را نام بگیرید.
- 5- جاهای خالی را پر کنید.
  - اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، می‌گوییم ..... کرده ایم.
  - نمونه مجموعه ..... از جامعه است.
  - تعداد اعضای جامعه را ..... جامعه می‌گویند.
  - تعداد اعضای نمونه را ..... نمونه می‌گویند.
- 6- متحول‌های تصادفی چند نوع اند؟
- 7- چهار نوع متحول تصادفی را نام ببرید و نوع هر یک را از نظر کمی و کیفی بودن تعیین کنید.
- 8- چهار نوع متحول کمی را نام ببرید که دو تای آن‌ها پیوسته و دو تای آن‌ها مجزا باشند.
- 9- شش نوع متحول تصادفی را نام ببرید که سه تای آن‌ها قابل اندازه‌گیری و سه تای دیگر آن‌ها قابل اندازه‌گیری نباشند.
- 10- در جمله «من متعلم صنف هفتم استم» بیش‌ترین کثرت را کدام حرف دارد؟ تعداد آن را معین کنید.

11- طول قد یک گروه ده نفری بر حسب سانتی متر قرار زیر داده شده است:

175	177	151	170	156
177	152	159	156	177

کثرت عدد 177 و عدد 159 را بنویسید.  
12- 40 خانواده را از یک شهر به عنوان نمونه انتخاب کرده و آن‌ها را به سه دسته مانند جدول تقسیم کنید.

نوع خانواده	کم جمعیت	با جمعیت متوسط	پر جمعیت	جمع
تعداد خانواده	8	12	20	40

اعداد 8، 12 و 20 را به نام چه یاد می‌کنند؟  
13- در باغ وحش پنج نوع ماهی قرار جدول زیر نگهداری می‌شوند.

نوع اول	نوع دوم	نوع سوم	نوع چهارم	نوع پنجم
100	80	120	70	110

اگر  $\rightarrow$  نشان‌دهنده 10 ماهی باشد، گراف آن‌ها را رسم کنید.  
14- مد دیتای زیر را حساب کنید.  
50 ، 6 ، 15 ، 12 ، 0 ، 4 ، 15 ، 5  
15- اگر دیتاهای بالا را دو برابر کنیم، چه تأثیری در مقدار مد حاصل می‌شود؟

16- دیتای زیر، قد 20 شاگرد را بر حسب سانتی‌متر نشان می‌دهد.

137	155	139	150	155
132	130	160	135	141
151	150	142	144	158
156	146	138	140	141

- اوسط قد شاگردان یک صنف را حساب کنید.

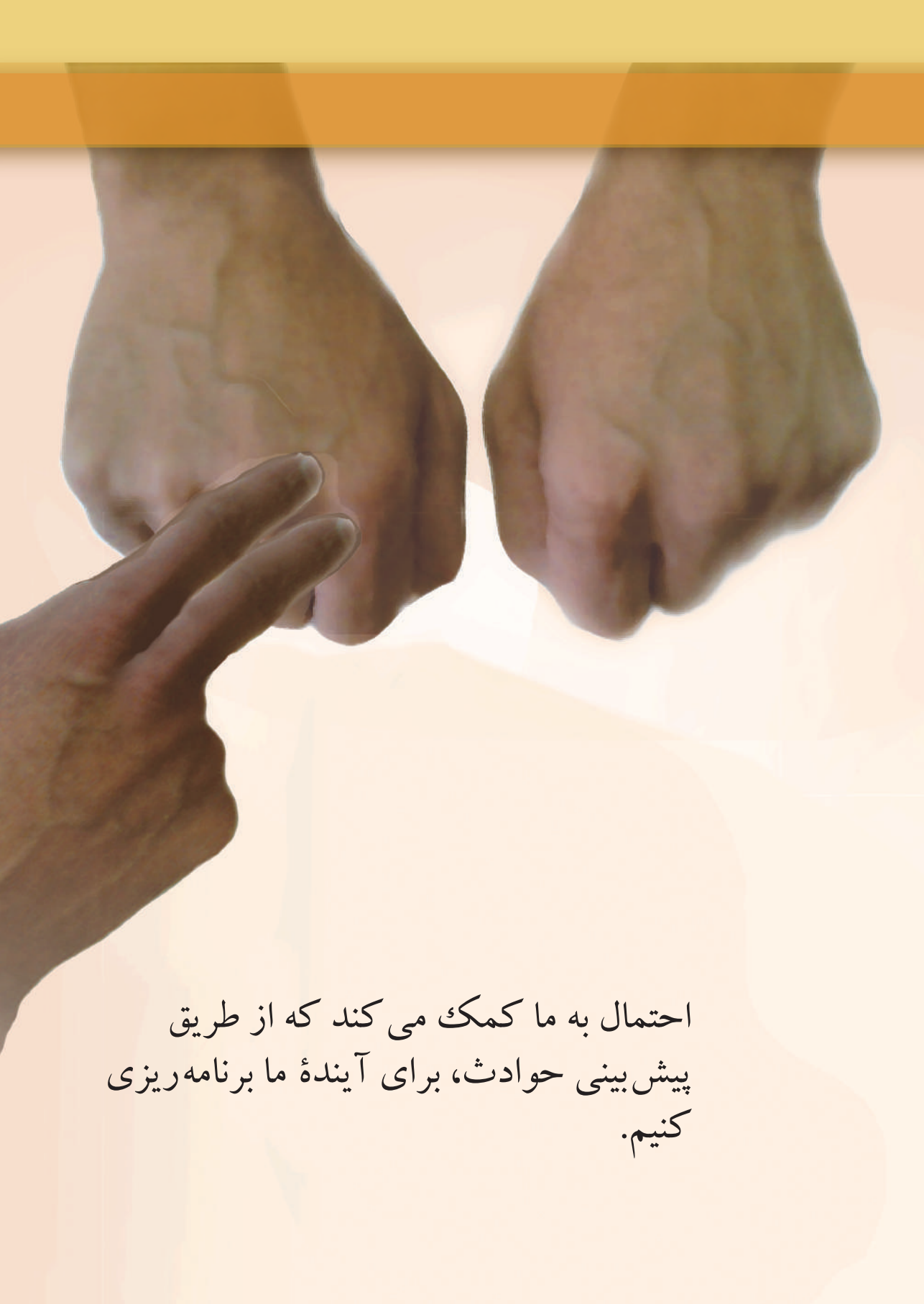
- اگر در هر دیتا عدد 2 را ضرب کنیم، چه تغییری در اوسط وارد می‌شود؟
- اگر از هر یک دیتا 10 تا کم شود، چه تغییری در دیتا وارد می‌شود؟
- 17- اگر تعداد دیتا 20 و اوسط دیتا 8.5 باشد، مجموع دیتا را حساب کنید.
- 18- نمرات چهارونیم ماهه 5 شاگرد صنف ششم در جدول زیر داده شده است، بگویید که اوسط نمرات کدام شاگرد بیشتر است.

مضمون	ریاضی	ساینس	عربی	انگلیسی	پشتو	دری	تعلیمات اسلامی	هنرها	تربیت بدنی	علوم اجتماعی
محمود	24	35	20	25	27	22	36	34	30	40
احمد	22	26	28	30	35	40	37	32	38	33
منصور	40	38	32	30	33	35	33	40	39	
خالد	40	30	20	35	38	34	22	27	30	
پژواک	35	38	39	40	35	26	28	40	35	



# فصل هشتم

## احتمالات



احتمال به ما کمک می کند که از طریق  
پیش بینی حوادث، برای آینده ما برنامه ریزی  
کنیم.

آیا فردا هم چانس باریدن باران وجود دارد؟



### فعالیت

چانس وقوع رویدادهای زیر را بر اساس تجارب روزانه، با یکی از عبارتهای "حتمی است"، "ممکن است" و "ناممکن است" جواب دهید، جواب تان را در خانه‌های خالی مقابل رویدادهای داده شده زیر بنویسید.

- هر هم صنفی ما، روزانه یک گیللاس شیر می نوشد. ( )
- فیل پرواز می کند. ( )
- بازی با توپ فوتبال بالای بام خانه خطر ندارد. ( )
- آفتاب از شرق طلوع می کند. ( )
- نتیجه بالا انداختن سکه رو یا پشت (شیر یا خط) سکه است. ( )
- چانس به روی آمدن سکه برابر به  $\frac{1}{2}$  است. ( )
- اگر سکه را بالا بیندازیم، دوباره پایین نمی آید. ( )
- به جای کلماتی که برای پاسخها به کار بردید کلمات مناسب دیگری بنویسید.

حتمی ( ) ( )  
 ممکن ( ) ( )  
 ناممکن ( ) ( )

از فعالیت صفحه قبل نتیجه زیر به دست می آید:

**نتیجه:** یک حادثه را می توان با سه درجه «حتمی»، «ممکن» و «ناممکن» و یا با کلمات معادل آن‌ها؛ مانند: صد فیصد، شاید و هیچ، ارزیابی کرد و با کاربرد کلمه «چانس» آن را پیش بینی نمود.

**مثال:** کلمات حتمی، ممکن، ناممکن، شاید، صد فیصد، و صفر فیصد را مقابل جمله های

زیر در جاهای خالی مناسب بنویسید:

- |  |                    |
|--|--------------------|
| (a) زمستان پس از خزان می آید.                            | (حتمی، صد فیصد)    |
| (b) آفتاب در شمال غروب می کند.                           | (ناممکن، صفر فیصد) |
| (c) مرغ همسایه یک لنگ دارد.                              | (ممکن، شاید)       |
| (d) از آسمان صاف همیشه ژاله می بارد.                     | (ناممکن، صفر فیصد) |
| (e) اطفال شیرینی را دوست ندارند.                         | (ممکن، شاید)       |
| (f) یک توپ که به هوا پرتاب شده باشد، به زمین بر می گردد. | (حتمی، صد فیصد)    |

## تمرین

برای کلمات حتمی، ممکن و ناممکن از زنده گی روزمره خود هر کدام مثال هایی دریافت کرده و در جاهای خالی بنویسید:

1- حتمی:

(a) زمین به دور آفتاب می چرخد.

(b) .....

(c) .....

2- ممکن:

(a) ممکن است شب به خاطر دیدن پدر کلانم بروم.

(b) .....

(c) .....

3- ناممکن:

(a) شتر پرواز می کند.

(b) .....

(c) .....

## احتمال (Probability)



زلمی به هم صنفی اش گفت:  
«امروز بعد از ظهر پیش من بیا تا با هم فوتبال  
بازی کنیم.»  
هم صنفی اش جواب داد: «ممکن است بیایم.»

### فعالیت

از جریان فعالیت‌های روزمره خود با درجه‌های مختلف امکانات، با در نظر داشت فیصدی‌های داده شده مثال‌هایی بگویید که در آن‌ها فیصدی احتمال صورت گرفتن واقعه وجود داشته باشد.

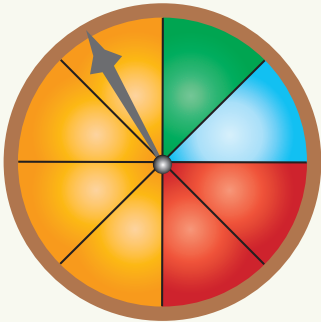
- 1- 95% امکان دارد که فردا مکتب بیایم. (95 فیصد)
- 2- 0% بز پرواز می‌کند. (0 فیصد)
- 3- ..... (10 فیصد)
- 4- ..... (50 فیصد)
- 5- ..... (20 فیصد)
- 6- ..... (75 فیصد)
- 7- ..... (80 فیصد)
- 8- ..... (99 فیصد)
- 9- ..... (100 فیصد)
- 10- ..... (1 فیصد)

### سؤال:

مثالی را که در فعالیت بالا برای شماره 5 آورده‌اید، به پهلو فیل خود نشان داده و از او پرسید که آیا او هم با شما موافق است که احتمال صورت گرفتن واقعه 20% است. از فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می‌آید:

## نتیجه:

برای پیش‌بینی احتمال وقوع یک اتفاق، یک واقعه ناممکن را با 0% و احتمال یک واقعه مطمئن یا امکان‌پذیر قطعی را با 100% یا 1 نشان می‌دهند. احتمال وقوع واقعه‌های ممکن بین اعداد 0 و 1 واقع می‌گردد.



**مثال 1:** بازی چرخ طالع بجنگان را طوری در نظر می‌گیریم که قرار شکل ذیل با دوران عقربه ساعتی بالای نواحی رنگه ایستاده می‌شود. فیصدی احتمال واقعات زیر را طوری دریافت کنید که عقربه بعد از دوران بالای رنگ‌های زیر ایستاده شود.

1- احتمال این که بالای رنگ نارنجی ایستاده شود، 50% می‌باشد؛ زیرا:

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} = 50\% \text{ (نسبت مساحت رنگ نارنجی نظر به مساحت کل دایره)}$$

2- احتمال این که بالای رنگ سرخ ایستاده شود (25%) می‌باشد؛ زیرا:

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\% \text{ (نسبت مساحت رنگ سرخ نظر به مساحت کل دایره)}$$

3- احتمال این که بالای رنگ سیاه ایستاده شود، (0%) می‌باشد؛ زیرا:

$$0 = \frac{0}{100} = 0\% \text{ (نسبت مساحت رنگ سیاه در دایره وجود ندارد)}$$

## تمرین

شکل بازی چرخ طالع بجنگان را در نظر گرفته و احتمال رویدادهای زیر را دریافت کنید.

1- احتمال این که عقربه بالای رنگ آبی یا سبز ایستاده شود.

2- احتمال این که عقربه بالای رنگ زرد ایستاده شود.

3- احتمال‌های کدام رنگ‌ها با هم برابر اند؟

4- احتمال کدام رنگ دو چند احتمال رنگ دیگر است؟ قیمت‌های آن را دریافت کنید.

5- احتمال آمدن یکی از رنگ‌ها چند است؟

## تجربه کردن یک اتفاق



برای آغاز مسابقه والیبال از طرف راست میدان، داور یک سکه را میان دو تیم به هوا می‌اندازد. می‌توانید بگویید که کدام یک از دو تیم والیبال اولین سرویس را از سمت راست انجام خواهد داد؟

### فعالیت

یک سکه را چندین بار به هوا انداخته، نتایج به رُخ یا به پشت آمدن آن را در جدول زیر نوشته و احتمال واقعه را محاسبه کنید. (رخ = خط، پشت = شیر)

شماره	مسئول انجام تجربه	تعداد دفعات پرتاب سکه	تعداد آمدن رخ	احتمال
1	محمود	8 بار	3	$\frac{3}{8}$
2		15 بار		
3		20 بار		
4		25 بار		
5		40 بار		
6		20 بار		
7		30 بار		

از فعالیت بالا می‌توانیم دو نتیجه زیر را بگیریم:

### نتیجه:

1- بیان چانس وقوع یک حادثه توسط اعداد به نام «احتمال» یاد می‌شود.

2- در فعالیت بالا دیده شد که نتایج تجارب برای افراد مختلف متفاوت می‌باشند.

**مثال:** نتایج مسابقات تیم‌های ورزشی افغانستان در پنج سال اخیر نشان می‌دهد، که تیم تکواندوی دختران در مسابقات منطقه‌یی برنده نبوده اند؛ برای پیش‌بینی نتیجه در مسابقات منطقه‌یی امسال، به جمله‌های زیر با کلمات صحیح و یا غلط جواب دهید:

1- بر اساس نتایج سال‌های گذشته احتمال برنده شدن تیم دختران در مسابقات امسال چقدر است؟

جواب: چون تیم دختران در هیچ یک از 5 سال گذشته برنده نبوده است، احتمال برنده شدن

$$\frac{0}{5} = 0 \text{ امسال برابر است با:}$$

ولی چون در بیان احتمال، یک پیش‌بینی انجام می‌شود، این پیش‌بینی ممکن است صحیح نباشد، یعنی تیم دختران یا تیم پسران امسال امکان برنده شدن را نیز دارند.

• احتمال دارد تیم ورزشی دختران برنده شود. ( )

• احتمال دارد تیم ورزشی پسران برنده شود. ( )

## تمرین

1- یک دانه رمل<sup>۱</sup> را هشت بار انداختیم، سه بار عدد 1 آمد.

احتمال این که در پرتاب بار نهم شماره رمل 1 بیاید چقدر است؟

2- در یک مکتب حاضری روزانه هر صبح بالای لین گرفته می‌شود، دریافت کنید احتمال آن که امروز:

(a) حاضری بالای لین گرفته شود.

(b) حاضری بالای لین گرفته نشود.

۱- رمل: یک دانه مکعبی است که دارای شش سطح برابر و در هر سطح شماره‌ها (خال‌ها) ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را دارا می‌باشد.

## تجربه تصادفی



آیا شاگردان صنف اول با سواد هستند؟  
گفته می‌توانید که یک نطق تلویزیون با سواد یا  
بی سواد است؟  
آیا هر باشنده کوجه ما با سواد است؟

### فعالیت

- اگر کنار یک سرک پر از ازدحام ترافیک ایستاده باشید، از همه اول تر انتظار عبور کدام نوع عراده را خواهید داشت؟  
(لاری، سرویس، تیزرفتار، موترسایکل، بایسکل و یا گادی)  
آیا گفته می‌توانید که:
- در یک ساعت چند عدد لاری از پیش روی تان خواهد گذشت؟
- چند موتر تیز رفتار از طرف راست به چپ در هر ساعت عبور خواهد کرد؟
- موتر بعدی کدام نوع خواهد بود؟
- فیل هم از پیش روی تان خواهد گذشت؟
- عبور فیل در جاده با حادثه عبور لاری در سرک چه فرقی دارد؟
- آیا می‌توانید یک حادثه تصادفی را قبل از وقوع پیش‌بینی کنید؟

از فعالیت بالا نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

#### نتیجه:

یک حادثه که هنوز نتایج آن به صورت قطعی معلوم نشده و به صورت تصادفی اتفاق افتاده است تجربه تصادفی یاد می‌شود.  
برای حوادثی که تصادفی و یا اتفاقی نیستند، پیش‌بینی معنا ندارد.

**مثال:** برای انتخاب نماینده صنف از راه قرعه‌کشی، پنج تن از متعلمان علاقه‌مند (حسن، زلمی، خبیر، انور و زمری) نام‌های خود را در ورقه‌های کوچک کاغذی نوشته و داخل یک جعبه می‌اندازند.

از میان جعبه یک ورقه را که روی آن‌ها نام یکی از نامزدان نوشته شده، بی طرفانه بر می‌داریم. این پروسه جمعاً یک تجربه تصادفی می‌باشد.

اما اگر پنج نفر نامزد نباشند و تنها یک نفر مثلاً: خبیر نامزد باشد، آیا می‌توان گفت که تجربه در این صورت نیز تصادفی است؟ نخیر؛ زیرا نتیجه آن پیش از پیش معلوم است.

## تمرین

1- آیا انداختن یک سکه که هر دو طرف آن یکسان است، می‌تواند یک تجربه تصادفی باشد؟ اگر نه، چرا؟

2- انتخاب رئیس جمهور که توسط رأی مستقیم مردم به صورت سری صورت می‌گیرد می‌تواند یک تجربه تصادفی باشد؟

3- دو نمونه از تجربه تصادفی را از زنده گی روزمره خود بنویسید.

.....(a)

.....(b)

4- آیا گرفتن یک گلوله از یک جعبه که در آن 3 گلوله به رنگ سبز قرار دارند، می‌تواند یک تجربه تصادفی باشد؟

## فضای نتیجه و یا نمونه

نتیجه چه خواهد شد؟  
شیر یا خط، کدام یک؟



### فعالیت

- آیا پرتاب سکه یک تجربه تصادفی است؟
- آیا می‌توان گفت که سکه خط خواهد آمد؟
- اگر سکه خط نیاید، چه خواهد آمد؟
- آیا غیر از دو حالت شیر و خط سکه، حالت سومی هم وجود دارد؟
- بگویید که تجربه چند نتیجه ممکن دارد.
- نتایج ممکن انجام تجربه تصادفی را داخل علامت ست (set) بنویسید.

بعد از انجام فعالیت بالا به نتیجه زیر می‌رسیم:

### نتیجه:

تمام نتایج ممکن یک تجربه تصادفی را در یک مجموعه یا ست (Set) نشان داده می‌توانیم که به نام فضای نمونه یاد می‌شود. فضای نمونه را معمولاً به  $S$  نشان می‌دهیم. هر عضو فضای نمونه، یک نتیجه ممکن همان تجربه تصادفی است که به نام حوادث اولیه یاد می‌گردند.



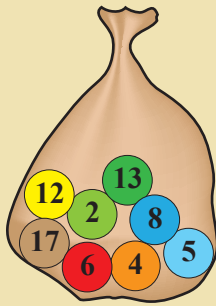
**مثال:** شکل مقابل انداختن یک تیر را از فاصله سه متری بالای یک صفحه دایره بی نشان می‌دهد. دایره به چند ناحیه مختلف تقسیم شده است؟

هرگاه تیر به شماره‌های داده شده 1، 2، 3 و 6 اصابت کند، همان شماره که تیر به آن اصابت کرده نتیجه است. **یادداشت:** اگر تیر خارج دایره اصابت کند به نتیجه نمره 0 داده می‌شود. بنابراین این تعداد نتایج ممکنه پنج عدد است که فضای نمونه آن عبارت است از:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 6\}$$

در شکل صفحه قبل بعضی قسمت‌های دایره دو بار توسط یک عدد نشان داده شده است؛ مثلاً عدد 2. این مسأله چانس اصابت به ناحیه 2 را بیشتر کرده؛ ولی دو نتیجه از هم متفاوت نمی‌باشند.

## تمرین



1- خریطه‌یی را که قرار شکل مقابل داده شده است در نظر بگیرید. در داخل آن به تعداد 8 گلوله یکسان که با اعداد مختلف نمره گذاری شده اند، قرار دارند؛ اگر از داخل آن چشم‌بسته، به صورت تصادفی یک گلوله برداشته شود، آیا امکان دارد که از

خریطه، گلوله‌یی با شماره 50 بیرون آید؟

اگر نه؛ پس فضای نمونه و تعداد نتایج ممکن را ارائه کنید.

2- فضای نمونه و تعداد نتایج ممکن را برای انداختن یک دانه رمل بنویسید.



حسن، زلمی، خبیر، انور و زمری برای نماینده گی صنف، خود را نامزد کرده بودند. آیا احتمال دارد زلمی برنده شود؟ احتمال برد انور چقدر است؟

### فعالیت

فضای تجربه انداختن یک دانه رمل را در نظر می گیریم، نتایج ممکنه عبارت اند از:



- فضای نمونه تجربه را بنویسید.
- تعداد نتایج ممکنه چند است؟
- دیده می شود که آمدن شماره 2 یکی از 6 حالت ممکن دانه رمل است، احتمال آن را با یک کسر بنویسید.
- آیا احتمال آمدن شماره 1 و شماره 2 رمل با هم برابر اند؟
- احتمال آمدن هر شماره رمل چند است؟
- چند شماره رمل جفت اند؟ احتمال آمدن شماره جفت را با یک کسر بنویسید.

در دریافت احتمال های حوادث فوق، ارقام صورت کسر تعداد حالات مساعد نتیجه مورد نظر و یا مطلوب را نشان می دهد.

از حالات فوق می توان نتیجه زیر را به دست آورد:

#### نتیجه:

احتمال یک نتیجه را می توان توسط کسر ذیل به دست آورد:

$$\text{تعداد حالات مساعد برای وقوع حادثه اتفاقی} = \frac{\text{احتمال وقوع یک نتیجه یا حادثه اتفاقی}}{\text{تعداد کل حالات نتیجه های تجربه}}$$

**مثال:** در تجربه تصادفی، انداختن یک دانه رمل را در نظر گرفته و احتمال حوادث زیر را دریافت کنید.

(a) شماره دانه رمل طاق باشد.

(b) شماره دانه رمل 5 باشد.

(c) شماره دانه رمل 8 باشد.

(d) شماره دانه رمل بزرگتر از 1 یا مساوی به 1 باشد.

**حل:** می‌دانیم که تعداد کل حالات ممکن مساوی به 6 است؛ با در نظر داشت تعریف احتمال داریم:

(a) حالات مساعد در این صورت 3 عدد بوده؛ بنابراین:

$$(a) \text{ احتمال این که شماره رمل طاق باشد} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

(b) حالات مساعد در این صورت مساوی به 1 بوده؛ پس:

$$(b) \text{ احتمال این که شماره 5 باشد} = \frac{1}{6} = 0.167 = 16.7\%$$

(c) حالات مساعد در این صورت برای شماره 8 وجود ندارد؛ بنابراین:

$$(c) \text{ احتمال این که شماره 8 باشد} = \frac{0}{6} = 0 = 0\%$$

(d) حالات مساعد برای این حالت 6 عدد بوده؛ بنابراین:

$$(d) \text{ احتمال این که شماره بزرگتر از 1 یا مساوی به 1 باشد} = \frac{6}{6} = 1 = 100\%$$

## تمرین

1- از بین 12 پسر و 6 دختر نماینده صنف‌های مختلف یک مکتب، یک تن به حیث نماینده عمومی متعلمین بر اساس قرعه انتخاب می‌گردد؛ احتمال این که:

(a) نماینده عمومی شاگردان، یک دختر باشد.

(b) نماینده عمومی شاگردان، یک پسر باشد.

2- در بین یک جعبه سه عدد گلوله به رنگ سبز، دو عدد به رنگ زرد و یک عدد به رنگ سرخ قرار دارد؛ اگر به صورت اتفاقی از بین جعبه یک گلوله برداریم، احتمال حوادث زیر را دریافت کنید.

(a) احتمال آن که رنگ گلوله سبز باشد.

(b) احتمال آن که رنگ گلوله زرد باشد.

(c) احتمال آن که رنگ گلوله سیاه باشد.

3- در انداختن تجربه تصادفی یک سکه، احتمال حوادث ذیل را به دست آورید:

(a) سکه به رو بیاید.

(b) سکه نه به رو و نه به پشت بیاید.

**چانس:** در پیش‌بینی حوادثی که از نگاه عددی قابل اندازه‌نباشند، از کلمه چانس استفاده می‌گردد. کلمات: امکان دارد، ممکن نیست، حتمی است، چانس کمتر، چانس بیشتر و چانس ندارد برای پیش‌بینی یک اتفاق به کار برده می‌شوند؛ مثلاً:

- 1- چانس طی نمودن فاصله هرات - لغمان با موتر در یک ساعت، ناممکن است.
- 2- چانس آمدن روز بعد از هر شب به رضای خداوند (ج) حتمی و صد فیصد است.
- 3- چانس باریدن باران در تابستان نیز ممکن است.

**احتمال:** اگر چانس یک اتفاق با اعداد و ارقام پیش‌بینی گردد، به نام احتمال حادثه اتفاقی یاد می‌شود.

احتمال یک واقعه ناممکن 0 و احتمال یک حادثه مطمئن 1 است؛ مثلاً:

1- احتمال این که مدیر یک لیسه بی سواد باشد، 0 است.

2- احتمال این که آفتاب از شرق طلوع کند، 1 است.

**حادثه اتفاقی:** به تجربه‌یی که نتیجه ممکنه آن هنگام اجرا معلوم نباشد، حادثه اتفاقی می‌گویند. مثلاً:

1- آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که برنده نمرات عالی کانکور امسال یک دختر باشد؟

2- آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که زمستان امسال با خانواده به جلال‌آباد می‌رویم؟

**تجربه تصادفی:** یک فعالیت که تا هنوز نتایج آن معلوم نباشد و یا حادثه‌یی که به صورت تصادفی اتفاق افتد، به نام تجربه تصادفی یاد می‌گردد؛ مثلاً:

انتخاب نماینده صنف از میان چند نامزد توسط قرعه یک تجربه تصادفی است.

یا انداختن یک سکه که نتیجه آن به رو یا پشت قرار گرفتن سکه منجر می‌شود نیز یک تجربه تصادفی است.

**احتمال تجربی:** احتمالی که توسط انجام تجربه به شکل عملی یا از روی تعداد نتایج یک تجربه به دست می‌آید، به نام احتمال تجربی یاد می‌گردد.

**احتمال نظری:** احتمالی که از روی فضای نمونه، نسبت حالات مساعد بر تعداد کل حالات یک تجربه به دست می‌آید، به نام احتمال نظری یاد می‌گردد.

$$\text{احتمال یک نتیجه یا حادثه اتفاقی} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد برای حادثه اتفاقی}}{\text{تعداد کل حالات نتیجه‌های تجربه}}$$

- 1- سوالات زیر را با کار برد کلمات: ممکن است، ممکن نیست و حتمی است، جواب دهید.
  - از آسمان ابری، باران می بارد.
  - چانس دیدن ستاره ها روزانه ممکن نیست.
  - شتر مرغ پرواز می کند.
  - گوسفند چوپه نمی دهد، تخم می دهد.
- 2- یک تجربه تصادفی را مثال گفته، حوادث اتفاقی اولیه و چند حادثه اتفاقی آن را مشخص کنید.
- 3- یک فضای نمونه که 4 حادثه اولیه اتفاقی داشته باشد، چند حادثه اتفاقی دارد. با یک مثال واضح کرده و فهرست حوادث اتفاقی را بنویسید.
- 4- حادثه اتفاقی مطمئن و ناممکن را در یک مثال تجربه اتفاقی واضح سازید.
- 5- یک فضای نمونه چیست؟ با علامت (P) جواب صحیح را نشانی کنید.
  - ( ) هر نتیجه یک تجربه فضای نمونه است.
  - ( ) فضای نمونه نتیجه ندارد.
  - ( ) است تمام نتایج ممکن یک تجربه است.
  - ( ) حادثه مطمئن و ناممکن است.
- 6- در یک تجربه تصادفی هر حادثه اتفاقی .... (جواب درست را با (P) نشانی کنید).
  - ( ) یک عنصر فضای نمونه است.
  - ( ) است فرعی فضای نمونه است.
  - ( ) در یک تجربه تصادفی حادثه اتفاقی چانس ندارد.
  - ( ) ناممکن است.
- 7- در انداختن دو دانه سکه:
  - فضای نمونه را تشکیل دهید.
  - دریافت کنید احتمال آن که هر دو سکه شیر باشند.
  - دریافت کنید احتمال آن که هر دو سکه خط باشند.
  - دریافت کنید احتمال آن که هر دو سکه یکسان باشند.

8- در بین گلوله‌های مساوی که در یک خریطه قرار دارند و روی آن‌ها از 1 تا 100 شماره

زده شده است، قرعه‌کشی می‌شود، دریافت کنید احتمال این که:

● عدد قرعه برآمده قابل تقسیم بر 5 باشد.

● عدد قرعه جفت باشد.

● عدد قرعه بر 12 قابل تقسیم باشد.

● عدد سه‌رقمی باشد.

● عدد چهاررقمی باشد.