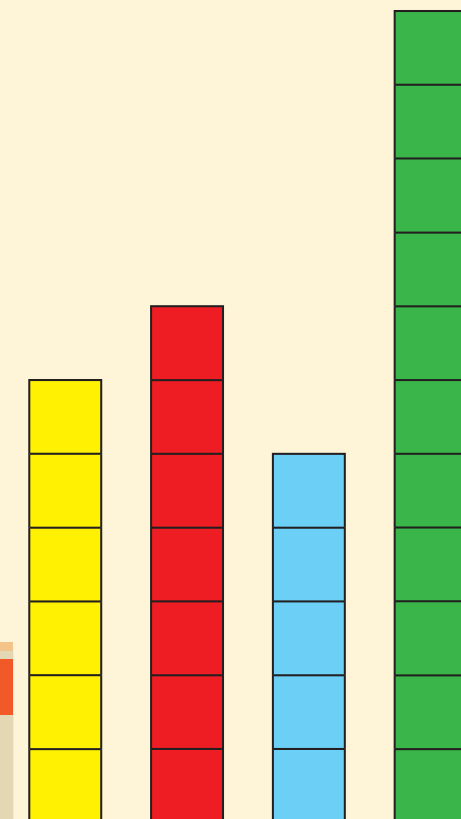


ریاضی

صنف ۸



صنف ۸





سرود ملی

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زره وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلېږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

رياضی
صنف
۸

۱۳۹۹

ه.ش

مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی نصاب تعلیمی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: هشتم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامه وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

مکان چاپ: کابل

چاپ‌خانه:

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

حق طبع، توزیع و فروش کتاب‌های درسی برای وزارت معارف جمهوری اسلامی افغانستان محفوظ است. خرید و فروش آن در بازار ممنوع بوده و با متخلفان برخورد قانونی صورت می‌گیرد.

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربك

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی پایان بر رسول خاتم - حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه گان هویدا است، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می نمایند. در چنین برهه سرنوشت ساز، رهبری و خانواده بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می باشد.

از همین رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت های مهم وزارت معارف پنداشته می شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی با کیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکر شده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به عنوان تربیت کننده گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس را آغاز کنند، که در آینده نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه های فردای کشور می خواهم تا از فرصت ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفاده بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند. در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن ها در این راه مقدس و انسان ساز موفقیت استدعا دارم. با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

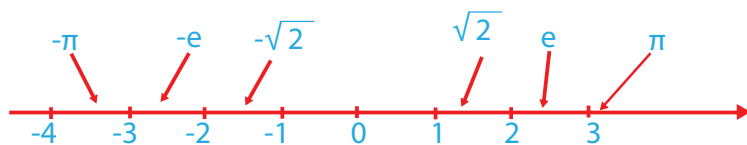
وزیر معارف

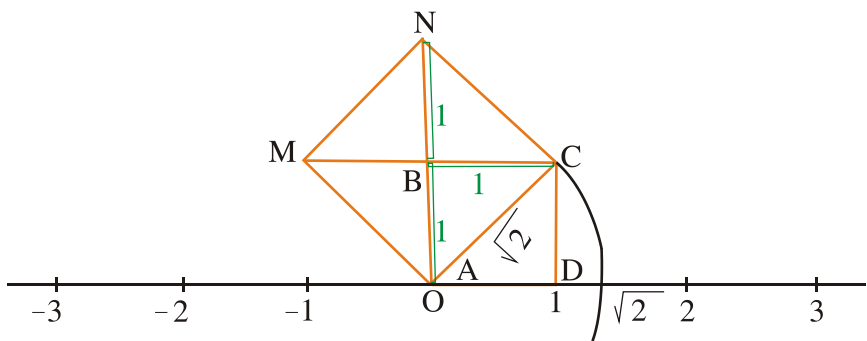
صفحه	عناوین
۱	فصل اول (اعداد حقیقی)
۳	مفهوم اعداد حقیقی و خواص آن‌ها
۱۱	طریقهٔ عمومی استخراج جذر مربع تقریبی، اوسط و جذر دوم اعداد اعشاریه دار
۱۹	عملیات بالای اعداد جذر دار (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)
۲۳	قوانین اعداد توان‌دار (ضرب، تقسیم، توان صفر و منفی)
۲۹	توان‌های کسری و قوانین آن، ناطق کردن کسرها
۳۳	نکات مهم فصل اول
۳۷	فصل دوم (محاسبات مالی)
۳۹	نسبت، تقسیم به اجزای متناسبه
۴۳	تناسب، خواص تناسب، انواع تناسب، تناسب مرکب
۵۵	فیصد، احدیت، تخفیف
۶۱	ربح ساده و مرکب
۶۳	نکات مهم فصل دوم
۶۷	فصل سوم (مشابهت)
۶۹	اشکال متشابه، مضلعات متشابه
۷۳	قضیهٔ خطوط موازی با فاصله‌های مساوی، قضیهٔ تالس و معکوس آن
۷۷	قضیهٔ تالس در مثلث، حالت‌های تشابه مثلث‌ها
۸۵	نکات مهم فصل سوم
۸۹	فصل چهارم (تناظر)
۹۱	مفهوم تناظر، تناظر محوری، تناظر مرکزی
۹۷	نکات مهم فصل چهارم
۹۹	فصل پنجم (قضایای مثلث)
۱۰۱	قضایای مثلث متساوی الساقین
۱۰۵	قضیهٔ فیثاغورث، عکس قضیهٔ فیثاغورث
۱۱۱	قضایای مثلث قائم الزاویه، قضایا در مثلث قائم الزاویه برای زوایای 30° و 60°
۱۱۹	ناصف الزاویه، ناصف الزاویه‌های داخلی مثلث، ناصف عمودی در یک مثلث
۱۲۷	ارتفاع‌های مثلث، میانه‌های مثلث
۱۳۱	نکات مهم فصل پنجم
۱۳۵	فصل ششم (مساحت‌ها و احجام)
۱۳۷	مساحت و حجم مکعب مستطیل، دریافت قطر مکعب مستطیل و مکعب
۱۴۱	مساحت و حجم منشور، مساحت و حجم استوانه
۱۴۵	مساحت و حجم هرم
۱۴۹	مساحت و حجم مخروط، مساحت و حجم کره
۱۵۳	نکات مهم فصل ششم

۱۵۷	فصل هفتم (افاده‌های الجبری)
۱۵۹	مفهوم متحول، افاده‌های الجبری، ساده کردن افاده‌های الجبری
۱۶۵	ضرب افاده‌های یک حده، تقسیم افاده‌های یک حده، ضرب افاده‌های الجبری
۱۷۱	مطابقت‌ها، مربع مجموع و تفاضل افاده‌های دو حده، تجزیه افاده‌های الجبری
۱۷۷	نکات مهم فصل هفتم
۱۸۱	فصل هشتم (معادلات)
۱۸۳	مفهوم معادله، عملیه‌های جمع و تفریق در مساوات، عملیه‌های ضرب و تقسیم در مساوات
۱۸۹	معادله عمومی درجه یک یک مجهوله، معادلات معادل و تشکیل معادلات
۱۹۵	نکات مهم فصل هشتم
۱۹۹	فصل نهم (رابطه و تابع)
۲۰۱	نقطه در مستوی، مختصات یک نقطه در مستوی، مجهول و متحول
۲۰۹	رابطه، رابطه خطی، تشکیل رابطه‌های خطی و تابع
۲۱۷	نکات مهم فصل نهم
۲۱۹	فصل دهم (احصائیه)
۲۲۱	جدول کثرت دیتای غیر متمادی، خواص اجرای جدول کثرت
۲۲۵	کثرت تجمعی
۲۲۷	کثرت نسبی، گراف میله‌ای، گراف خط منکسر
۲۳۳	اوسط دیتای غیر متمادی، اوسط دیتای متمادی با استفاده از جدول
۲۳۷	نکات مهم فصل دهم
۲۴۱	فصل یازدهم (احتمال)
۲۴۳	کثرت نسبی و احتمال
۲۴۵	چانس برابر و نابرابر در یک فضای نمونه
۲۴۷	حادثه اتفاقی یک فضای نمونه، قواعد احتمال
۲۵۱	دیگرام درختی، قاعده اول مسیر (حاصل ضرب)
۲۵۵	نکات مهم فصل یازدهم

فصل اول

اعداد حقيقي

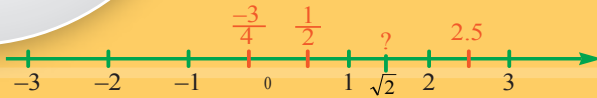




مفهوم اعداد حقیقی

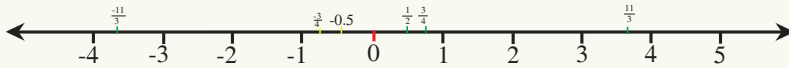


می‌دانیم که تمام اعداد نسبی را می‌توانید روی محور اعداد نمایش دهید، مانند: شکل زیر که روی محور اعداد بعضی از اعداد نسبی نمایش داده شده‌اند. آیا می‌توان عددی؛ مانند $\sqrt{2}$ را نیز روی محور اعداد نمایش داد؟



آیا اعداد ناطق را می‌شناسید؟

از صنف هفتم با در نظر داشت محور اعداد گفته می‌توانیم که هر عدد ناطق (نسبی) را روی محور اعداد توسط یک نقطه نشان دهیم؛ مانند: شکل زیر که بعضی از اعداد نسبی روی آن نشان داده شده‌اند:



اعداد دیگری نیز وجود دارند که تا حال روی محور اعداد نشان داده نشده‌اند. یا به عبارت دیگر اعداد نسبی به تنهایی نمی‌توانند تمام نقاط روی محور اعداد را پوشانند؛ یعنی بین اعداد نسبی روی محور اعداد، جاهای خالی برای اعدادی که نسبی یا ناطق نباشند وجود دارند که توسط همین اعداد پر می‌شوند.

فعالیت

- جذر مربع اعداد زیر را پیدا کنید:

عدد	25	16	2	100	4	$\frac{9}{4}$
جذر مربع				10		

- در فعالیت فوق پیدا کردن جذر مربع کدام عدد برای شما مشکل است؟

• آیا می‌توانید یک عدد ناطق را پیدا کنید که در خودش ضرب شود و حاصل ضرب آن عدد 2 باشد؟

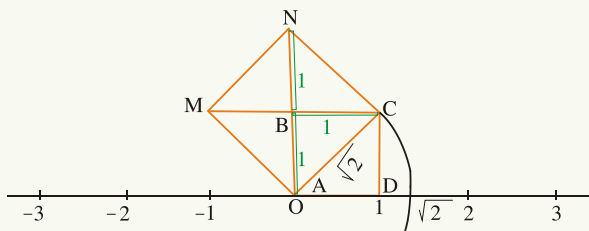
• جدول مقابل را تکمیل کنید.

عدد	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
مربع عدد	1					2.25

• جذر مربع عدد 2 بین کدام دو عدد قرار دارد؟
• به منظور دقت بیشتر در پیدا کردن جذر مربع عدد 2 جدول زیر را تکمیل نمایید.

عدد	1.40	1.41	1.42	1.43
مربع عدد		1.981		

با ملاحظه به جدول فوق، نشان دهید که جذر مربع عدد 2، بین کدام دو عدد قرار دارد. اعداد سطر اول اعدادی هستند که حدس موجودیت جذر مربع عدد 2 بین آن‌ها وجود دارد. به هر اندازه بی که در سطر اول جدول اعداد با هم نزدیک‌تر انتخاب کردند. باز هم دیده می‌شود که در سطر دوم جدول عدد 2 ظاهر نمی‌شود؛ یعنی عدد ناطقی را که مساوی $\sqrt{2}$ باشد پیدا کرده نمی‌توانیم، پس ست جدید اعداد را دریافت کردیم که عبارت از ست اعداد غیر ناطق (گنگ) است. ست اعداد غیر ناطق را به Q' نشان می‌دهیم، مانند: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ و $\sqrt{2}$ با وجود این که $\sqrt{2}$ عدد ناطق نمی‌باشد، می‌توان آن را بالای محور اعداد با استفاده از نمایش هندسی زیر مشخص نمود:



در شکل می‌بینیم مربع کوچکی ABCD که طول اضلاع آن یک واحد است به دو مثلث قائم‌الزاویه تقسیم شده و دارای مساحت یک واحد مربع می‌باشد. و مربع بزرگتری AMNC که در شکل آن را مشاهده می‌کنید نظر به مربع کوچک ABCD دارای مساحت بیشتر است که مساحت آن 2 واحد مربع است، بنابراین از دریافت فورمول مساحت مربع می‌دانیم که هر ضلع مربع بزرگ مساوی به $\sqrt{2}$ واحد می‌باشد.

هرگاه نقطه 0 را مرکز قرار داده به شعاع $\sqrt{2}$ که یک ضلع مربع بزرگ می‌باشد یک قوس را طوری رسم نماییم که محور اعداد را در یک نقطه قطع کند، نقطه تقاطع با محور اعداد، موقعیت $\sqrt{2}$ را مشخص می‌کند.

همان طوری که اعداد ناطق دارای معکوس جمعی می‌باشند، اعداد غیر ناطق نیز معکوس جمعی دارند؛ طور مثال: معکوس جمعی $\sqrt{2}$ ، $(-\sqrt{2})$ است که به طرف سمت چپ صفر روی محور اعداد نشان داده شده است. هر نقطه خط اعداد به یک عدد حقیقی و برعکس هر عدد حقیقی به یک نقطه محور اعداد مطابقت می‌کند.

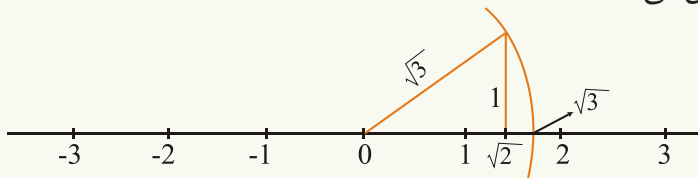


تعریف

اتحاد ست‌های اعداد ناطق و غیر ناطق را به نام ست اعداد حقیقی یاد می‌کنند و ست اعداد حقیقی را به IR نشان می‌دهند. $IR = Q \cup Q'$

مثال: $\sqrt{3}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

حل: از نقطه $\sqrt{2}$ به اندازه یک واحد به سمت بالا حرکت می‌نماییم نقطه به دست آمده را به 0 وصل می‌نماییم. نقطه 0 را مرکز گرفته یک قوس رسم می‌کنیم که محور اعداد را در یک نقطه قطع کند نقطه به دست آمده موقعیت $\sqrt{3}$ را بالای محور اعداد مشخص می‌کند.



تمرین

1- کدام یک از اعداد زیر غیر ناطق اند:

a) $\sqrt{16}$, b) $-\sqrt{5}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $\sqrt{37}$

2- سه عدد ناطق و سه عدد غیر ناطق را بنویسید.

3- در باره $\sqrt{15}$ چي فکر می کنید، عدد ناطق است یا غیر ناطق؟

4- موقعیت $\sqrt{5}$ و $1+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.

5- کدام یک از اعداد $8+2\sqrt{2}$, $3+\sqrt{4}$ ، ناطق و کدام آن‌ها غیر ناطق است؟

6- در مورد اعداد $\sqrt{144}$ و $\sqrt{5}, \sqrt{31}, \sqrt{36}$ چه فکر می کنید؟ ناطق اند و یا غیر ناطق؟

خواص اعداد حقیقی

آیا خاصیت تبدیلی، اتحادی و توزیعی در اعداد حقیقی وجود دارد؟

$$\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \times (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) + (\sqrt{2} \times \sqrt{5})$$

$$\sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}$$



فعالیت

• قیمت‌های تقریبی افاده‌های جذری زیر را با استفاده از جدول دریافت کنید:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = ? \quad \sqrt{3} + \sqrt{2} = ?$$

$$\sqrt{2} + 2 = ? \quad 2 + \sqrt{2} = ?$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{1} = ? \quad \sqrt{1} + \sqrt{3} = ?$$

$$\sqrt{3} + 1 = ? \quad 1 + \sqrt{3} = ?$$

عدد	قیمت تقریبی
$\sqrt{2}$	1.41
$\sqrt{3}$	1.73
$\sqrt{5}$	2.23

• آیا خاصیت تبدیلی عملیه جمع، در ست اعداد حقیقی صدق می‌کند یا خیر؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

$$a + b = b + a$$

سؤال: آیا خاصیت تبدیلی عملیه ضرب در اعداد حقیقی نیز صدق می‌کند؟ با چند مثال واضح سازید.

فعالیت

- یک مستطیل به طول 6 واحد و عرض 3 واحد رسم نمایید. مساحت این مستطیل چند است؟
- مستطیل دیگر را رسم نموده که طول آن 6 واحد و عرض آن 2 واحد باشد مساحت این مستطیل چقدر است؟
- این دو مستطیل را کنار هم قرار داده و بگویید مساحت مستطیل بزرگ به دست آمده مساوی به چند است؟
- مساحت مستطیل بزرگ چه رابطه با مجموع مساحت‌های دو مستطیل کوچک دارد؟

$$6(3+2) = (6 \cdot 3) + (6 \cdot 2)$$

از فعالیت فوق نتیجه می‌شود که برای هر عدد حقیقی a, b, c داریم:
 $a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$

این خاصیت به نام خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع یاد می‌گردد.

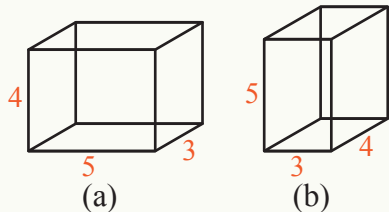
مثال: طرف راست افاده $\sqrt{3} \times (\sqrt{2} + \sqrt{5})$ را با در نظر داشت خاصیت اعداد حقیقی بنویسید.

$$\sqrt{3} \times (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = (\sqrt{3} \times \sqrt{2}) + (\sqrt{3} \times \sqrt{5})$$

حل:

فعالیت

اشکال مقابل را در نظر بگیرید.



- حجم مکعب مستطیل شکل a مساوی به چند است؟
- حجم مکعب مستطیل شکل b مساوی به چند است؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم:

برای هر عدد حقیقی a ، b و c داریم که: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

این خاصیت اتحادی تحت عملیه ضرب است.

مثال: با استفاده از خاصیت اعداد حقیقی افاده $\sqrt{2} \times (\sqrt{3} \times \sqrt{5})$ را در نظر گرفته طرف راست آن را بنویسید.

حل:

$$\sqrt{2} \times (\sqrt{3} \times \sqrt{5}) = (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) \times \sqrt{5}$$

آیا در اعداد حقیقی خاصیت اتحادی تحت عملیه جمع وجود دارد؟ با چند مثال واضح سازید.

یادداشت:

1- شما به یاد دارید که:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

روابط فوق برای هر a از ست اعداد حقیقی هم صدق می‌کند.

2- از این به بعد علامت (x) را به علامت (\cdot) می‌توانید نشان دهید.

تمرین

مساوات‌های زیر را در نظر گرفته خاصیت‌های مربوط را در مقابل آن‌ها بنویسید.

a- $\sqrt{5}(2+3) = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

b- $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

c- $\sqrt{3} \times (\sqrt{2} \times \sqrt{3}) = (\sqrt{3} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{3}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

d- $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

e- $\sqrt{3} + (\sqrt{5} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3} + \sqrt{5}) + \sqrt{2}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

طریقه عمومی استخراج جذر مربع تقریبی

$$\sqrt{125} = ?$$

$$\sqrt[3]{8} = ?$$

دریافت جذر مربع اعداد را به طریقه تجزیه می‌دانید.

- آیا می‌توان جذر مربع تمام اعداد را به طریقه تجزیه دریافت کرد؟
- آیا جذر سوم یک عدد را به جز از طریقه تجزیه به کدام طریقه دیگر دریافت کرده می‌توانید؟

- a) 21 b) 12 c) 7

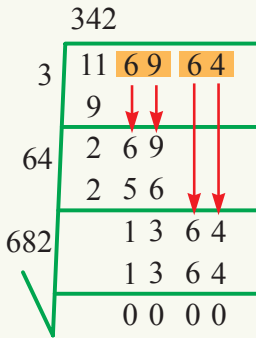
- دریافت جذر مربع (جذر دوم) اعداد را به طریقه تجزیه می‌دانید، مثال: $\sqrt{25}$ چند است.
- جذر مکعب (جذر سوم)، اعداد را دریافت کرده می‌توانید، مثال: $\sqrt[3]{27}$ چند است؟
- آیا برای پیدا کردن جذر مربع اعداد به جز از طریقه تجزیه کدام طریقه دیگر وجود دارد؟

دریافت جذر مربع اعداد را به شکل عمومی برای هر عدد مثبت در صنف هفتم خواندید به منظور یاد آوری مثال‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 2 \overline{) 625} \\ \underline{4} \\ 225 \\ \underline{225} \\ 000 \end{array}$$

مثال 1: جذر مربع عدد 625 را دریافت می‌کنیم.
حل: عدد 625 را تحت علامت جذر می‌نویسیم.

مثال 2: جذر مربع عدد 116964 را دریافت می کنیم.



حل:

$$\sqrt{116964} = 342$$

سؤال:

1 - مراحل دریافت جذر مربع یک عدد را توضیح دهید.

2 - جذر مربع اعداد زیر را دریافت کنید.

- a) 1024 b) 5329 c) 1127

بعد از حل در جز C دیده می شود که 1127 جذر مربع مکمل ندارد .
 آیا جذر مربع تقریبی اعداد را به شکل عمومی محاسبه کرده می توانید؟
 برای محاسبه جذر مربع تقریبی یک عدد از روش عمومی کار گرفته برای این که
 بتوانیم جذر مربع تقریبی را به دست آوریم فعالیت زیر را انجام دهید:

فعالیت

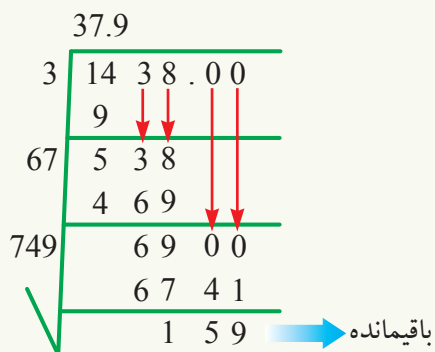
عدد	1.2	2.03	0.3	1.23	1.360
مربع عدد	1.44	5.1209			

• با در نظر داشت جدول فوق چه رابطه بین تعداد ارقام اعشاری عدد و تعداد ارقام

اعشاری مربع آن وجود دارد؟

• با داشتن تعداد ارقام اعشاری جذر مربع یک عدد، چگونه می‌توانیم تعداد ارقام اعشاری آن عدد را مشخص کنیم؟

همان طوری که در فعالیت بالا تعداد ارقام اعشاری جذر مربع، نصف تعداد رقم‌های اعشاری مربع آن است از این قاعده برای استخراج جذر مربع تقریبی استفاده می‌کنیم.

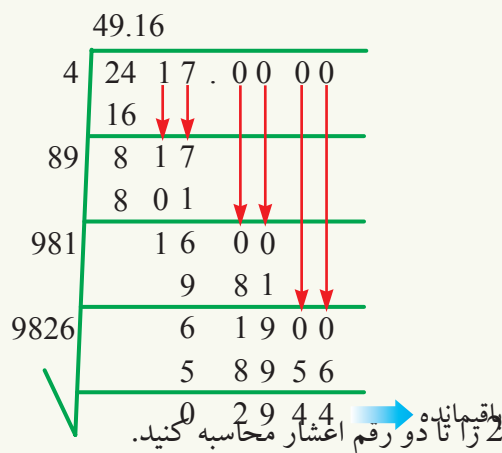


مثال 1: می‌خواهیم جذر مربع عدد 1438 را تا یک رقم اعشار محاسبه کنیم.

در نتیجه: $\sqrt{1438} \approx 37.9$

سؤال: آیا $1438.00 = 1438$ است؟ چرا 1438 را به شکل 1438.00

می‌نویسیم.



مثال 2: 49.16 مربع تقریبی عدد $\sqrt{2417}$ عدد 2417 را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید.

در نتیجه
در مثال‌های فوق می‌بینیم که تعداد ارقام اعشاری باقیمانده مساوی به تعداد ارقام
اصلی عددی است که می‌خواهیم جذر مربع آن را پیدا کنیم.

تمرین

- 1- جذر مربع اعداد زیر را تا یک رقم اعشار محاسبه کنید:
- a) 814 b) 74 c) 427
- 2- جذر مربع اعداد زیر را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید:
- a) 94752 b) 5039 c) 418

قیمت تقریبی جذر مربع به طریقه اوسط

$$\sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

• آیا گفته می‌توانید که $\sqrt{81}$ چند است؟

• آیا گفته می‌توانید که $\sqrt{\frac{25}{16}}$ چند است؟

شما می‌دانید هر عددی که در نفس خود ضرب شود حاصل ضرب به دست آمده به نام مربع عدد اولی یاد می‌شود، ولی جذر مربع تمام اعداد مثبت را مانند: $\sqrt{30}, \sqrt{10}, \sqrt{5}$ به شکل کسری یا نسبتی ارائه کرده نمی‌توانیم.

از این رو قیمت جذر مربع بعضی از اعداد به شکل تقریبی ارائه می‌شود. در این جا می‌خواهیم قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ را دریافت کنیم.

سؤال: عدد 5 بین مربعات کدام دو عدد قرار دارد؟
 $\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

با در نظر داشت این که جذر مربع 5 بین 2 و 3 قرار دارد می‌توان گفت که جذر مربع عدد 5 به گونه تقریبی مساوی به قیمت وسطی 2 و 3 است، یعنی: $\frac{2+3}{2} = 2.5$

برای پیدا کردن قیمت دقیق‌تر $\sqrt{5}$ جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

عدد	مربع
2	4
2.5	6.25
3	9

عدد 5 بین مربع 2 و 2.5
به عباره دیگر $\sqrt{5}$ بین 2 و 2.25 قرار دارد

با در نظر داشت این که عدد 5 بین 4 و 6.25 قرار دارد می‌توان گفت که قیمت تقریبی

عدد	مربع
2	4
2.25	5.0625
2.5	6.25

$\sqrt{5}$ قیمت وسطی 2 و 2.25 است. $\frac{2+2.25}{2} = \frac{4.25}{2} = 2.125$

جدول مقابل را تکمیل کنید.

بدر نظر داشت جدول فوق گفته می‌توانید $\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟
 دیده می‌شود که قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ با در نظر داشت این دو مرحله عبارت از 2.25 بوده پس نوشته کرده می‌توانیم که: $\sqrt{5} \approx 2.25$
 هر قدر که به روش فوق عملیه‌های بالا را تکرار نماییم به $\sqrt{5}$ بیشتر نزدیک می‌شویم.



در نتیجه می‌توانیم جذر تقریبی اعداد را با استفاده از روش فوق دریافت نماییم.

مثال: جذر مربع تقریبی $\sqrt{10}$ را دریافت کنید.

حل: با استفاده از روش فوق، قیمت تقریبی اولی $\sqrt{10}$ می‌تواند قیمت وسطی اعداد 3 و 4 باشد.

$$9 < 10 < 16, \quad 3 < \sqrt{10} < 4, \quad \frac{3+4}{2} = 3.5$$

خلاصه، عملیه فوق را در جدول زیر ملاحظه می‌کنید.

عدد	مربع
3	9
3.5	12.25
4	16

$\sqrt{10}$ بین 3 و 3.5

از جدول فوق، نتیجه می‌گیریم که: $\sqrt{10} \approx 3.5$

با در نظر داشت اینکه عدد 10 بین 9 و 12.25 قرار دارد می‌توان گفت که قیمت تقریبی $\sqrt{10}$ ، قیمت وسطی 3 و 3.5 است.

$$\frac{3+3.5}{2} = \frac{6.5}{2} = 3.25$$

برای دریافت قیمت دقیق‌تر $\sqrt{10}$ جدول زیر را در نظر می‌گیریم.

عدد	مربع
3	9
3.25	10.5625
3.5	12.25

$\sqrt{10}$ بین 3 و 3.25

تمرین

در نتیجه: $\sqrt{10} \approx 3.25$

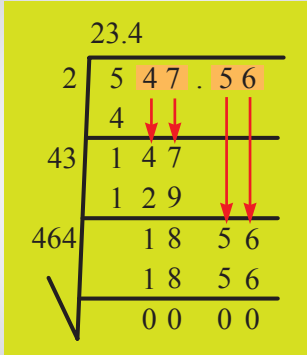
1- صحت هر یک از غیر تساوی‌های زیر را نشان دهید:

a) $3 < \sqrt{12} < 4$

b) $7.1 < \sqrt{15} < 7.2$

2- با استفاده از روش قیمت وسطی جذر مربع تقریبی اعداد زیر را محاسبه کنید.

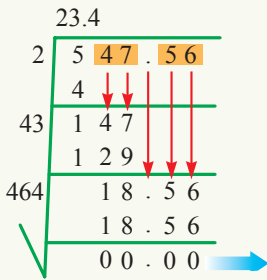
جذر مربع اعداد اعشاریه دار



اگر یک عدد اعشاریه دار را مربع کنیم، تعداد رقم‌های بعد از اعشاری آن جفت است. برای دریافت جذر مربع اعداد اعشاریه دار که تعداد رقم‌های بعد از اعشاری آن طاق باشد، چه باید انجام دهیم؟

مثال: جذر مربع عدد 547.56 را محاسبه کنید.

حل: برای دریافت جذر مربع عدد 547.56 قسمت صحیح آن را از راست به چپ و قسمت اعشاری آن را برعکس از چپ به راست دو دو خانه جدا نموده و سپس با استفاده از طریقه عمومی دریافت جذر مربع، جذر عدد را استخراج می‌نماییم.



در نتیجه: $\sqrt{547.56} = 23.4$

سؤال: چرا در عدد 547.56 تنها یک رقم اعشار داریم؟

- عدد 381.291 چند رقم اعشاری دارد؟

- برای پیدا کردن جذر مربع این عدد در قدم اول چه باید کرد؟

- جذر مربع آن را دریافت کنید.

- قبل از جذر گرفتن حدس زده می‌توانید جذر مربع این عدد چند رقم اعشاری دارد؟

- باقیمانده جذر گرفته شده، چند رقم اعشاری باید داشته باشد؟

در گذشته ما در عملیات چهارگانه به خاطر صحت حل درست سوال، جواب را امتحان

می‌کردیم بنا براین در جذر اعداد اعشاریه دار نیز این عمل را انجام می‌دهیم.

فعالیت

عملیه‌های تقسیم زیر را در نظر بگیرید.

$$a: \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ 10 & 2 \\ 3 & \end{array} \rightarrow 5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 13 \quad \checkmark$$

$$b: \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ 5 & 1 \\ \hline & 8 \end{array} \rightarrow 5 \times 1 + 8 = 5 + 8 = 13 \quad \times$$

با در نظر داشت عملیات جزء a و b شرایط درست بودن عمل تقسیم را شرح دهید.

سؤال: چطور می توان اطمینان حاصل کرد که عملیه جذر گرفتن درست است؟

مثال: جذر مربع عدد 149 را دریافت و درست بودن آن را امتحان می کنیم.

حل:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 1 \overline{) 149} \\ \underline{1} \\ 049 \\ \underline{044} \\ 05 \end{array}$$

امتحان: $(12 \times 12) + 5 = 144 + 5 = 149$

سؤال: چرا 12 را ضرب 12 می کنیم؟

آیا برای امتحان درست بودن جذر فقط اجرای این عملیه کافی است؟

اگر شاگرد به طور اشتباه عوض جذر 149 (12) عدد 11 ضرب 11 و باقیمانده؛ یعنی 28 را جمع آن کند مساوی به عدد اصلی

می شود. $(11 \times 11) + 28 = 149$

آیا می توانیم جواب آن را درست قبول کنیم؟

از مثال فوق نتیجه می گیریم که برای امتحان کردن عملیه جذر مربع شرط دیگری

هم لازم است دو چند جذر مربع عدد $149 (2 \times 12)$ جمع (1) بزرگ تر از باقیمانده؛

یعنی $5 < 2 \times 12 + 1$ می باشد.

سؤال: با در نظر داشت فعالیت فوق نشان دهید که چرا جواب 11 اشتباه بود؟

برای امتحان کردن جذر مربع شرایط زیر باید در نظر گرفته شود:

1- حاصل ضرب جذر مربع در خودش جمع باقیمانده باید مساوی به عدد اصلی باشد.

2- دو چند جذر مربع یک عدد، جمع یک (1) باید بزرگ تر از باقیمانده باشد.

تمرین

جذر مربع اعداد زیر را دریافت نموده و امتحان کنید:

1) $780.81 = ?$ 2) $6721 = ?$ 3) $973 = ?$ 4) $692.916 = ?$

جمع و تفریق اعداد جذردار

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - \sqrt{3} = ?$$

$$x\sqrt[n]{a} + y\sqrt[n]{a} = ?$$

شما می دانید که در ست اعداد نسبتی برای هر a می توانیم بنویسیم:

$$3a + 2a = (3 + 2)a = 5a$$

$$3a - 2a = (3 - 2)a = a$$

آیا اعداد جذردار را با هم جمع و تفریق کرده می توانید؟

تساوی های زیر را در نظر بگیرید.

$$2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = (2 + 4)\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$2 \times \sqrt{13} + 3 \times \sqrt{13} = (2 + 3) \times \sqrt{13} = 5 \times \sqrt{13}$$

برای آسانی $5 \times \sqrt{13}$ را به شکل $5\sqrt{13}$ می نویسیم. برای دریافت حاصل جمع از خاصیت های اعداد حقیقی استفاده می کنیم. **سؤال:** آیا برای تفریق اعداد حقیقی از روش جمع استفاده کرده می توانیم؟

فعالیت

در مساوات دوم بجای 5 ، $(7-2)$ را قرار دهید. مشابه به روش فوق محاسبه را انجام دهید.

جمع و تفریق اعداد جذری در صورتی امکان دارد. که درجه جذر و عدد تحت جذر یکسان باشند. ضرایب حدود متشابه جذور را با هم جمع یا از هم تفریق می کنیم. به صورت عموم:

$$x\sqrt[n]{a} \pm y\sqrt[n]{a} = (x \pm y)\sqrt[n]{a}$$

سؤال: گفته می توانید که جذرهای مشابه کدام ها اند؟ آیا $\sqrt{10}$ و $\sqrt{5}$ با هم مشابه اند؟

$$\text{مثال 1: } 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = ?$$

حل: چون اعداد تحت جذر و درجه جذور با هم مساوی اند.

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

بنابراین:

$$18\sqrt{12} - 16\sqrt{12} = ?$$

مثال 2:

$$18\sqrt{12} - 16\sqrt{12} = (18 - 16)\sqrt{12} = 2\sqrt{12}$$

حل:

$$8\sqrt{48} - 10\sqrt{48} - 3\sqrt{48} = ?$$

مثال 3:

$$= (8 - 10)\sqrt{48} - 3\sqrt{48}$$

حل:

$$= -2\sqrt{48} - 3\sqrt{48}$$

در مرحله اول نتیجه دو حد را به دست آورده بعد نتیجه

$$= (-2 - 3)\sqrt{48} = -5\sqrt{48}$$

را با حد سوم جمع می‌کنیم.

فعالیت

- قیمت $\sqrt{9+16}$ و $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ را به دست آورید، این قیمت‌ها را با هم مقایسه کنید؟
- قیمت‌های $\sqrt{100-36}$ و $\sqrt{100} - \sqrt{36}$ را به دست آورده این دو قیمت را با هم مقایسه کنید.

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود، که:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

تمرین

1- کدام اعداد جذری را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق نمود؟

a) $4\sqrt[3]{2} + 3\sqrt{2}$

b) $5\sqrt{4} + 3\sqrt{4}$

c) $\sqrt{5} \times \sqrt{36} + \sqrt{5} \times \sqrt{36}$

d) $\sqrt{27} + 3\sqrt{3}$

2- حاصل جمع و حاصل تفریق اعداد جذر دار زیر را به دست آورید:

a) $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 9\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} - 3\sqrt{50}$

c) $\sqrt{81} + \sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt{5} \times \sqrt{36} + \sqrt{5} \times \sqrt{36}$

ضرب و تقسیم اعداد جذری

$$\sqrt{\frac{36 \times 9}{16}} = \frac{\sqrt{36} \times \sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{6 \times 3}{4} = \frac{9}{2}$$

آیا اعداد جذردار را ضرب و تقسیم کرده می‌توانید؟

فعالیت

• جذر اعداد زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{36 \times 9} = \sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{36} \times \sqrt{9} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

$$\sqrt{25 \times 36} = \sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{25} \times \sqrt{36} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

$$\sqrt{4 \times 25} = \sqrt{100} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

$$\sqrt{4 \times 9} = \sqrt{\quad} = \dots\dots\dots$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \dots\dots \times \dots\dots =$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم:

برای هر عدد حقیقی a و b بزرگتر از صفر داریم: $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

مثال 1:

حل:

$$\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{20 \times 5} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sqrt{0.5} \times \sqrt{0.5} = \sqrt{0.5 \times 0.5} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

با انجام عملیه‌ها بالای جذور، سعی می‌کنیم که افاده ساده‌تری را به دست آوریم. این عمل را ساده کردن جذرها می‌نامند.

$$\sqrt{75} = ?$$

مثال 2:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5 \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

حل:

$$\sqrt{64a^2} = ?$$

مثال 3: این افاده را ساده کنید:

$$\sqrt{64a^2} = \sqrt{64} \times \sqrt{a^2}$$

حل:

$$\sqrt{8^2} \times \sqrt{a^2} = 8a$$

مثال 4: می‌خواهیم افاده‌های جذری زیر را با هم ضرب نماییم:

$$(2\sqrt{6})(5 - \sqrt{3})$$

حل:

$$= (2\sqrt{6} \times 5) - (2\sqrt{6} \times \sqrt{3})$$

$$= 10\sqrt{6} - 2\sqrt{18} = 10\sqrt{6} - 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$= 10\sqrt{6} - 2\sqrt{9} \times \sqrt{2} = 10\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$$

آیا می‌توانید مشابه به قاعده ضرب جذرها، برای تقسیم نیز قاعده را دریافت کنید؟

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{\frac{16}{100}} = \sqrt{16 \times 0.01} = \sqrt{16} \times \sqrt{0.01} = 4 \times 0.1 = 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}$$

اگر به جای 16، a و به جای 100، b بنویسیم، پس داریم که: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ ، $b \neq 0$

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = ?$$

مثال 5:

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \sqrt{\frac{9 \times 4}{49}} = \frac{\sqrt{9} \times \sqrt{4}}{\sqrt{49}} = \frac{3 \times 2}{7} = \frac{6}{7}$$

حل:

تمرین

1- افاده‌های زیر را ساده کنید:

a) $\sqrt{144a^2}$ b) $\sqrt{169a^2}$ c) $\sqrt{0.09}$ d) $\sqrt{6} \times \sqrt{27}$

2- افاده‌های زیر را ساده کنید:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = ?$ b) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}} = ?$ c) $\sqrt{\frac{81a^4}{c^2}} = ?$



قوانین اعداد توان دار ضرب اعداد توان دار:

در لابراتوارها از میکروسکوپها برای بزرگ شدن اجسام استفاده می کنند هر میکروسکوپ دو عدسیه دارد که یک عدسیه آن نزدیک به چشم و دیگری نزدیک جسم قرار دارد. عدسیه نزدیک جسم، اندازه را 2^2 برابر و عدسیه نزدیک چشم، تصویر را 2^3 برابر بزرگ می سازد. تصویر جسم چند برابر بزرگ می شود؟

در صنف گذشته توان و قوانین مربوطه آن را برای اعداد طبیعی مورد مطالعه قرار دادیم در این بخش می خواهیم برای اعداد حقیقی آن را مورد مطالعه قرار دهیم.

فعالیت

• جاهای خالی را با اعداد مناسب طاقث دار پر نمایید.

$$5^6 = 5^2 \times 5^4 = 5^3 \times \dots = 5^4 \times \dots = \dots \times 5^1$$

$$\dots = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^8 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \dots = \left(\frac{2}{5}\right)^9 \times \dots$$

$$a^5 = a^4 \times \dots = \dots \times a^2 = \dots \times a^3$$

از فعالیت بالا، نتیجه می گیریم: که هرگاه m و n اعداد تام و a یک عدد حقیقی باشد.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

داریم که:

اگر در ضرب اعداد توان دار قاعده ها مساوی و توانها مختلف باشند. در این صورت از قاعده های مساوی یکی را انتخاب نموده و توانها را باهم جمع می نمایم.

$$2^3 \times 2^4 = ?$$

مثال:

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

حل:

سوال:

با یک مثال عددی واضح سازید که $(-a)^n = -a^n$ همیشه درست نیست.

فعالیت

تساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$(14^9)^4 = (14^9) \times (14^9) \times (14^9) \times (14^9) = (14)^{9+9+9+9} = 14^{4 \times 9}$$

جاهای خالی را با اعداد مناسب طاق‌دار پر نمایید.

$$(2^3)^4 = 2^3 \times \dots \times \dots \times \dots = 2^{3+\dots+3+3} = 2^{3 \times \dots}$$

$$(a^n)^4 = a^n \times \dots \times \dots \times \dots = a^{n+\dots+\dots+\dots} = a^{\dots \times 4}$$

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم برای یک عدد حقیقی a و دو عدد تام n و m داریم:

$$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$$

اگر یک افاده توان دار به یک نمای دیگر رفع شود در این حالت نماها را با هم ضرب می‌نماییم. که به نام قانون نما در یاد می‌شود.

$$(2^{-2})^3 = (2^{-2})(2^{-2})(2^{-2}) = (2)^{-2-2-2} = 2^{-2 \times 3} = (2)^{-6}$$

مثال:

تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$3^2 \times 4^2 = (3 \times 3)(4 \times 4) = (3 \times 4)(3 \times 4) = (3 \times 4)^2 = (12)^2$$

$$6^3 \times 5^3 = (6 \times 6 \times 6)(5 \times 5 \times 5) = (6 \times 5)(6 \times 5)(6 \times 5) = (6 \times 5)^3 = (30)^3$$

مساوات فوق به صورت عموم برای تمام اعداد حقیقی a , b , و n یک عدد تام برقرار

$$\text{است. } (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

اگر در ضرب اعداد توان دار قاعده‌ها مختلف و توان‌ها مساوی باشند، پس قاعده‌ها را با هم ضرب و از توان‌های مساوی یکی را می‌نویسیم.

$$4^3 \times 5^3 = ?$$

مثال:

$$4^3 \times 5^3 = (4 \times 5)^3 = 20^3$$

حل:

تمرین

با استفاده از قانون ضرب سؤال‌های زیر را به شکل یک توان بنویسید.

$$1) 6^2 \times 6^3 = ? \quad 2) (0.2)^2 \times (0.2)^2 = ? \quad 3) \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = ? \quad 4) \left(\frac{1}{4}\right)^{-7} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = ?$$

$$5) 5^4 \times 5 = ? \quad 6) 27 \times 5^3 = ? \quad 7) (4^{-2})^7 = ? \quad 8) a^5 \times b^5 \times c^5 = ?$$

$$9) 2^3 \times 5^3 = ? \quad 10) 81 \times a^2 = ? \quad 11) 2^{-1} \times 3^{-1} = ? \quad 12) (10^2)^3 = ?$$

تقسیم اعداد توان دار



آیا تا به حال عکس خود را به اندازه $\frac{1}{2}$ کوچک کرده‌اید؟ برای این کار از کدام عمل ریاضی استفاده می‌کنیم؟

برای ضرب اعداد توان دار توانستیم رابطه بین توان و قاعده را دریافت کنیم آیا می‌توانید به صورت مشابه در رابطه تقسیم دو عدد توان دار رابطه را دریافت کنید؟

فعالیت

$$3^5 \div 3^4 = \frac{3^5}{3^4} = \frac{3^{\square} \times 3^4}{3^4} = 3^1 = 3^{5-\square}$$

• خانه‌های خالی را پر نمایید.

- چه رابطه بین توان مقسوم، توان مقسوم علیه و توان خارج قسمت وجود دارد؟
- آیا این رابطه برای تقسیم همه اعداد توان دار با قاعده مساوی صدق می‌نماید؟

به صورت عموم هرگاه a یک عدد حقیقی خلاف صفر، n و m اعداد تام باشند در

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{این صورت داریم:}$$

در تقسیم دو عدد توان دار که قاعده‌های آن‌ها با هم مساوی باشند از قاعده‌های مساوی یکی را گرفته و از توان مقسوم توان مقسوم علیه را تفریق توان‌ها می‌کنیم حاصل تفریق توان‌ها عبارت از توان قاعده مطلوب است.

مثال: عملیه‌های تقسیم زیر را انجام دهید:

a) $5^3 \div 5^3$ b) $5^{-7} \div 5^{-1}$

a) $\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

b) $5^{-7} \div 5^{-1} = 5^{-7-(-1)} = 5^{-7+1} = 5^{-6}$

حل:

فعالیت

• جاهای خالی را با اعداد مناسب پر نمایید.

$$12^3 \div 4^3 = \frac{12^3}{4^3} = \frac{\square \times 12}{4 \times \square \times 4} = \left(\frac{\square}{4}\right) \times \left(\frac{12}{\square}\right) \times \left(\frac{12}{4}\right) = \left(\frac{12}{4}\right)^3 = 3^3$$

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که: به صورت عموم برای هر اعداد حقیقی a و b که

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad b \neq 0 \text{ و } n \text{ عدد تام باشند داریم:}$$

در تقسیم اعداد توان‌دار اگر قاعده‌ها مختلف و توان‌ها مساوی باشند، قاعده مقسوم را بر قاعده مقسوم علیه تقسیم و از توان‌ها مساوی یکی را به حیث توان حاصل تقسیم می‌نویسیم.

a) $25^4 \div 5^4 = ?$

b) $3^2 \div 10^2 = ?$

مثال:

حل: نظر به قانون تقسیم طاقت می‌توان نوشت:

a) $25^4 \div 5^4 = (25 \div 5)^4 = ?$

b) $3^2 \div 10^2 = (3 \div 10)^2 = (0.3)^3$

اگر در تقسیم دو عدد توان‌دار قاعده‌ها و توان‌ها در مقسوم و مقسوم علیه با هم فرق داشته باشند برای پیدا کردن حاصل تقسیم هر کدام را جداگانه به توان رفع می‌سازیم بعد از آن تقسیم می‌کنیم.

یادداشت: قوانین فوق در صورتی که m و n اعداد حقیقی باشند نیز صحت دارد.

تمرین

1- با استفاده از قانون تقسیم سؤالات زیر را حل نمایید:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(\frac{1}{2}\right)^3 = ?$

2) $13^7 \div 13^8 = ?$

3) $\frac{12^6}{12^5} = ?$

4) $\frac{7^5}{7^3} = ?$

5) $\frac{8^5}{8^3} = ?$

6) $6^3 \div 2^3 = ?$

$a^m - a^n \neq a^{m-n}$

2- با مثال واضح سازید که:

$(a-b)^n \neq a^n - b^n$

توان صفر و توان منفی

$$2^3 = ?$$

$$2^0 = ?$$

$$2^{-1} = ?$$

2^3 را محاسبه کنید.

آیا 2^0 را می توان محاسبه کرد؟
آیا اعداد را به توان صفر نوشته
می توانیم؟
آیا اعداد را به توان عدد منفی
نوشته کرده می توانیم؟

فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان دار	$2^4 \div 2$	$2^3 \div 2$	$2^2 \div 2$	$2^1 \div 2$
حاصل	8			

- چه رابطه بین توان های سطر اول جدول وجود دارد؟
- چه رابطه بین اعداد سطر دوم جدول می یابید؟
- سطر اول را ادامه دهید و عدد توان دار بعدی را 2^0 قرار دهید. با توجه به رابطه که بین اعدادی توان دار سطر دوم وجود دارد، چه عددی را برای 2^0 در سطر دوم دریافت کرده می توانید؟
- جدول بالا را برای عدد 3 تکرار کنید.
- جدول زیر را برای عدد $a \neq 0$ تکمیل کنید.

عدد توان دار	$a^4 \div a$	$a^3 \div a$	$a^2 \div a$	$a^1 \div a$
حاصل	a^3			

- سطر اول را ادامه داده عدد توان دار بعدی را a^0 قرار دهید. با توجه به رابطه یی که بین اعداد سطر دوم وجود دارد. چه عددی را برای a^0 در سطر دوم دریافت کرده می توانید؟

از فعالیت بالا نتیجه می گیریم که برای هر عدد حقیقی a خلاف صفر ($a \neq 0$) داریم:

$$a^0 = 1$$

فعالیت

• جدول زیر را در نظر بگیرید:

اعداد توان دار	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}
حاصل	27	9	3	1	

- چه رابطه را بین اعداد سطر اول و سطر دوم جدول می‌یابید؟
- سطر اول را ادامه داده عدد توان دار بعدی را 3^{-2} قرار دهید.
- اکنون با در نظر داشت رابطه‌ی که بین اعداد سطر دومی پیدا کرده اید، چه اعدادی را برای 3^{-1} و 3^{-2} دریافت می‌کنید؟
- برای عدد $a \neq 0$ جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه اعدادی را برای 3^{-2} و a^{-2} پیدا کرده می‌توانید؟

از فعالیت فوق، نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد حقیقی a خلاف صفر و n یک عدد تام داریم که:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال: افاده‌های $(1.3)^{-3}$ و $(-15)^{-21}$ را به شکل توان مثبت بنویسید:

حل: $(1.3)^{-3} = \frac{1}{(1.3)^3}$ ، $(-15)^{-21} = \frac{1}{(-15)^{21}}$

تمرین

1- افاده‌های زیر را به توان مثبت بنویسید:

a) 5^{-2} b) $(\sqrt{7})^{-5}$ c) $(\frac{1}{3})^{-3}$ d) $(2\pi)^{-3}$

2- هر یک از افاده‌های زیر را به صورت یک افاده با توان منفی بنویسید:

a) 0.0001 b) $\frac{1}{b^2}$ c) $\frac{1}{6^4}$ d) $\frac{1}{3^{11}}$

توان‌های کسری و قوانین آن

$$\frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^1 = a$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

شما قوانین توان‌های تام را پیش از این خواندید، آیا می‌توانید قوانین فوق را بالای توان‌های کسری نیز تطبیق کنید؟

فعالیت

- آیا $\sqrt{16}$ و $\sqrt{-16}$ با هم مساوی اند؟
- $\sqrt[3]{-8}$ و $\sqrt[3]{8}$ مساوی به چند است؟
- آیا \sqrt{a} را به شکل توان می‌توان نوشت؟ $\sqrt[n]{a}$ را به شکل توان بنویسید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

اعداد منفی در ست اعداد حقیقی جذرمربع ندارند. هر عدد چه مثبت، چه منفی باشد، جذر مکعب دارد.

به طور عموم یک عدد جذر دار را به شکل $\sqrt[n]{a}$ می‌نویسند.

و این قسم خوانده می‌شود (جذر n ام a).

مقصد از جذر n ام یک عدد عبارت از عددی است که هرگاه آن عدد (عدد تحت جذر) به توان n بلند برده شود، عدد تحت جذر حاصل می‌شود.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

توان عدد تحت جذر
درجه جذر

به یاد داشته باشید: اگر توان یک عدد تحت جذر و درجه جذر با هم مساوی باشند؛

پس:

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

فعالیت

• جاهای خالی را پر کنید.

$$a^{\frac{1}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} = (1 + \quad)a^{\frac{1}{3}} = 3\sqrt[3]{a}, \quad 3a^{\frac{1}{5}} - a^{\frac{1}{5}} = (\quad - 1)a^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot \sqrt[5]{a}$$

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم:

I: هرگاه قاعده‌ها مشابه و توان‌های کسری مساوی باشند برای هر $a \in \mathbb{R}$ طوری که

$$ma^{\frac{1}{n}} \pm ba^{\frac{1}{n}} = (m \pm b)a^{\frac{1}{n}} = (m \pm b)\sqrt[n]{a} \quad \text{می‌توانیم بنویسیم:} \quad a \neq 0$$

$$2(15)^{\frac{1}{3}} + 3(15)^{\frac{1}{3}} - (15)^{\frac{1}{3}} = (2 + 3 - 1)(15)^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{15} \quad \text{مثال:}$$

II: هرگاه در عملیه تقسیم قاعده‌ها مساوی و توان‌های کسری مختلف باشند برای

$$\frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}} \quad \text{هر } a \in \mathbb{R} \text{ طوری که } a \neq 0 \text{ باشد، داریم:}$$

$$\frac{5^{\frac{3}{4}}}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{5}$$

مثال:

III: هرگاه در عملیه ضرب قاعده‌ها مختلف و توان‌های کسری مساوی باشند برای

هر عدد حقیقی a, b, c و خلاف صفر می‌توان نوشت:

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{abc}$$

$$(7)^{\frac{-5}{8}} \cdot (6)^{\frac{-5}{8}} \cdot (9)^{\frac{-5}{8}} = (7 \cdot 6 \cdot 9)^{\frac{-5}{8}} = \sqrt[8]{(7 \cdot 6 \cdot 9)^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[8]{(7 \cdot 6 \cdot 9)^5}} \quad \text{مثال:}$$

$$(a^n)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \quad \text{IV}$$

$$(a^4)^{\frac{1}{2}} = (a)^{\frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2}} = (a)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{a} \quad \text{مثال:}$$

ناطق سازی یا گویا کردن کسرها

$$\sqrt{2} \approx ?$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx ?$$

چطور می‌توانیم که مخرج کسر $(\frac{1}{\sqrt{2}})$ را از شکل جذری بکشیم؟

کار کردن با کسرهایی که در مخرج آن‌ها جذر نباشد، آسانتر است. اگر در مخرج کسر عدد جذری موجود باشد، این گونه اعداد کسری را طوری می‌نویسیم که در مخرج کسر، جذر از بین برود؛ ولی چگونه باید این کار را انجام داد؟

فعالیت

• خانه‌های خالی را با اعداد مناسب پر نمایید.

$$\sqrt{3} \times \square = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \times \square = 2$$

$$\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15 \times \square}{\sqrt{5} \times \square} = \frac{15 \square}{5} = 3\sqrt{5}$$

با استفاده از فعالیت بالا دیده می‌شود که برای از بین بردن جذر مربع در مخرج یک

کسر صورت و مخرج کسر را در مخرج آن ضرب می‌نماییم.

مثال: آیا می‌توانیم در عدد $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جذر مربع را از مخرج آن حذف کنیم؟

حل: برای این صورت مخرج را ضرب $\sqrt{2}$ می‌نماییم.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

فعالیت

• جاهای خالی را پر کنید.

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^{\square}} = \square$$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\square^3} = \square$$

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{\square^{\square}} = 2$$

$$\sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{\square} = \sqrt[3]{\square^3} = \square$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4}} = \frac{6 \times \square}{\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{6\sqrt[3]{\square}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\square \sqrt[3]{2}}{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

از فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم که برای از بین بردن جذر سوم از مخرج یک کسر، باید صورت و مخرج را در جذر سوم عدد ضرب کنیم تا زیر علامت جذر، توان 3 ایجاد شود.

مثال: کسرهای زیر را ناطق سازید:

a) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

b) $\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$

حل:

$$a) \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \times \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$$

$$b) \frac{5}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5 \times \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5} = \sqrt[3]{5^2}$$

تمرین

1- کسرهای زیر را ناطق سازید:

1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

3) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

4) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$

5) $\frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$

6) $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

نکات مهم فصل اول

• اعداد حقیقی:

- 1- اتحاد ست اعداد ناطق و غیر ناطق را به نام ست اعداد حقیقی یاد می کنند.
- 2- هر نقطه خط اعداد به عدد حقیقی و به گونه معکوس هر عدد حقیقی به یک نقطه، روی خط اعداد مطابقت می کند.

• خواص اعداد حقیقی

- 1- خاصیت تبدیلی عملیه های جمع و ضرب
- 2- خاصیت اتحادی عملیه های جمع و ضرب
- 3- خاصیت توزیعی عملیه ضرب بالای جمع

• جذر مربع تقریبی اعداد:

- 1 - استخراج جذر مربع تقریبی اعداد تام و جذر اعداد اعشاریه دار به طریقه عمومی
- 1- قیمت تقریبی جذر مربع به طریقه اوسط

• ضرب و تقسیم جذرها

- 1- ضرب جذرها $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
 - 2- تقسیم جذرها $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- در اعداد جذر دار تنها جذرهای مشابه؛ یعنی جذرهای که درجه جذر و اعداد تحت جذر آنها با هم یکسان باشند را با هم جمع و تفریق کرده می توانیم.

• اعداد توان دار و قواعد آن

- 1- $a^0 = 1$ ، $a \neq 0$ و یک عدد حقیقی ، $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ، $a \neq 0$ و یک عدد حقیقی باشد
- 3- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ، $a \neq 0$ و یک عدد حقیقی باشد.
- 4- ضرب اعداد توان دار $(a^m)^n = a^{m \times n}$ ، $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ، $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- 5- تقسیم اعداد توان دار $b \neq 0$ ، $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ و $a \neq 0$ ، $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

• ناطق یا گویا ساختن کسرها

برای ناطق ساختن یا گویا ساختن یک کسر جذر، مخرج را رفع می نمایم.

I. مساوات و افاده‌های زیر را به دقت خوانده، جاهای خالی را با اعداد و کلمات مناسب پر نمایید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots -1$$

$$a^{-8} \div a^{-1} = \dots\dots\dots -2$$

$$5^9 \times \dots\dots\dots = (5 \times 7)^9 -3$$

-4 عدد π یک عدد $\dots\dots\dots$ است.

II. عبارت‌های زیر را به دقت خوانده اگر درست است حرف (ص) و اگر غلط است حرف (غ) را پیش روی عبارت بگذارید:

-1 () اتحاد اعداد نسبتی و اعداد تام را به نام ست اعداد حقیقی یاد می‌کنند.

-2 () خاصیت توزیعی ضرب بالای عملیۀ جمع در اعداد حقیقی درست است.

-3 () $\sqrt{3}$ عدد غیر ناطق است.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad () -4$$

III. برای سؤال‌های زیر چهار جواب داده شده است جواب درست را دریافت و دور

آن را حلقه نمایید:

$$\frac{4^7}{4^5} = ? -1$$

- a) 4^0 b) 4^2 c) 4^{-1} d) 4^1

$$(6y^3z^2)^2 = ? -2$$

- a) $36y^6z^4$ b) $36y^3z^4$ c) $36y^6z^2$ d) هیچ کدام

$$\sqrt{81 \times 9} = ? -3$$

- a) 27 b) $\frac{1}{27}$ c) 24 d) 25

$$\sqrt{\frac{49a^4}{144b^4}} = ? -4$$

$$a) \frac{8a^2}{12b^2}$$

$$b) \frac{7a^2}{12}$$

$$c) \frac{7a}{12b^2}$$

$$d) \frac{7a^2}{12b^2}$$

5- کدام دو عدد افاده‌های جذری متشابه اند؟

$$a) 2\sqrt{3} \quad , \quad 3\sqrt{2}$$

$$b) 5\sqrt{2} \quad , \quad 3\sqrt{2}$$

$$c) 5\sqrt{3} \quad , \quad 2\sqrt{5}$$

$$d) 6\sqrt{3} \quad , \quad \sqrt[3]{3}$$

IV. سؤال‌های زیر را حل نمایید:

$$6\sqrt{125a^2} + \sqrt{5a^2} = ? -1$$

2- قیمت تقریبی $\sqrt{0.5}$ را حساب کنید.

3- افاده‌های زیر را ساده سازید:

$$a) (-25a^2b)^3 = ?$$

$$b) (-4a \times 2a)^2 = ?$$

$$c) (-2^4x)^3$$

4- جذر مربع 2475 را دریافت و امتحان نمایید.

5- افاده‌های زیر را ساده سازید:

$$(625a^2b^2)^6 \quad , \quad (-10^3)^5 \quad , \quad (-4q^2p^3)^4$$

6- افاده‌های زیر را به شکل توان مثبت بنویسید:

$$(27)^{-7} \quad , \quad (9x^2)^{-4} \quad , \quad (6ab)^{-6}$$

7- افاده‌های زیر را به شکل توان منفی بنویسید:

$$\frac{1}{(36)^2} \quad , \quad \frac{26}{(16)^6} \quad , \quad \frac{-ab}{(cd)^4}$$

8- افاده‌های زیر را ساده سازید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \quad , \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \quad , \quad \sqrt{144} \times \sqrt{169}$$

$$(-6)^3 \times (-6)^{-5} \quad , \quad (13a^2)^6 \quad , \quad \left\{\left(\frac{1}{4}xy\right)^2\right\}^6$$

9- افاده‌های زیر را با هم ضرب نمایید:

a) $(3\sqrt{8} + 2)(\sqrt{2} - 3\sqrt{7})$

b) $(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

10- با دو مثال عددی نشان دهید که: $a^m + a^n \neq a^{m+n}$

11- با دو مثال عددی نشان دهید که: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

12- با دو مثال نشان دهید که: $a^m - a^n \neq a^{m-n}$

13- با دو مثال عددی نشان دهید که: $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

14- افاده‌های زیر را ساده و به شکل جذر بنویسید:

a) $5(25)^{\frac{1}{7}} + 7(25)^{\frac{1}{7}} + 4(25)^{\frac{1}{7}} = ?$

b) $36(15)^{\frac{6}{7}} - 17(15)^{\frac{6}{7}} = ?$

c) $\frac{(7)^{\frac{3}{5}}}{(7)^{\frac{3}{5}}} = ?$

d) $\frac{(17)^{\frac{2}{9}}}{(7)^{\frac{2}{3}}} = ?$

e) $(17^{\frac{3}{8}})^{\frac{1}{2}} = ?$

f) $(19^{\frac{5}{7}})^{\frac{2}{3}} = ?$

فصل دوم

محاسبات مالی





甘肃
KANSU UNIVERSITY
KANSU UNIVERSITY

甘肃
KANSU UNIVERSITY

甘肃
KANSU UNIVERSITY

نسبت Ratio



برای مالیکول آب فورمول کیمیاوی آنرا بنویسید، نسبت اتم‌های هیدروجن و اکسیجن در یک مالیکول آب چند است؟

فعالیت

یک مالیکول آب از دو اتم هیدروجن و یک اتم اکسیجن ترکیب شده است. در جدول زیر نسبت هیدروجن و اکسیجن را بنویسید.

مالیکول آب	1	2	3	4	5
نسبت هیدروجن و اکسیجن	$\frac{2}{1} = 2$				$\frac{10}{5} = 2$

• آیا نسبت هیدروجن بر اکسیجن برای مالیکول‌های مختلف آب ثابت است.

مثال: اگر عرض یک اتاق 3 متر و طول آن 5 متر باشد نسبت عرض و طول آن چند است؟

حل:

$$\frac{3 \text{ متر}}{5 \text{ متر}} = \frac{3}{5} \text{ یا } 3 \div 5$$

فعالیت

- مستطیلی به طول 6cm و عرض 3cm رسم، محیط و مساحت آن را دریافت کنید.
- مستطیل دیگری به طول 4cm و عرض 2cm رسم کنید که نسبت طول مستطیل اولی بر طول مستطیل دومی و عرض مستطیل اولی بر عرض مستطیل دومی را پیدا کنید.
- محیط و مساحت مستطیل دوم را دریافت کنید.
- نسبت محیط مستطیل اول بر محیط مستطیل دوم چند است؟

- نسبت مساحت مستطیل اول بر مساحت مستطیل دوم چند است؟
- چه رابطه‌ی بین این نسبت‌ها دریافت کرده می‌توانید؟

تعریف

نسبت بین دو کمیت و یا دو مقدار همجنس عبارت از آن عددی است که نشان می‌دهد کمیت اول چند برابر کمیت دوم و یا کمیت دوم چندم حصه کمیت اول است و یا کمیت دوم چند مرتبه شامل کمیت اول است.

نسبت دو عدد را به طور معمول با علامت‌های خط کسری (—) ، (\div) یا به $(:)$ نشان می‌دهند.

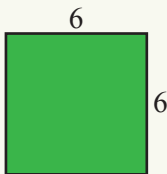
مثال: نسبت 5 بر 3 را به صورت $5 \div 3$ ، $\frac{5}{3}$ یا $5:3$ نیز می‌توان نشان داد.

تمرین

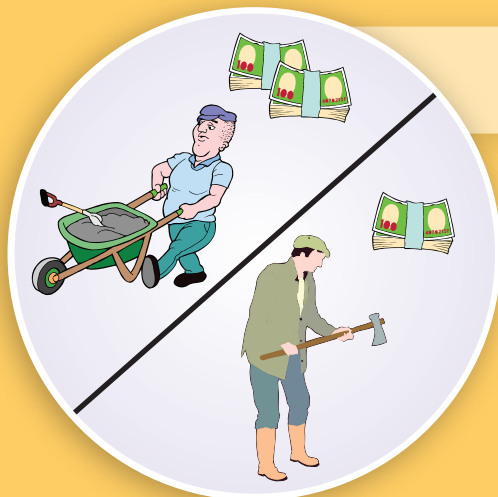
1- نسبت 4 بر 7 حصه یک دایره را با نسبت 16 بر 28 حصه یک دایره دیگر مقایسه کنید.

2- اگر تعداد گروه اول شاگردان یک صنف 25 نفر و تعداد گروه دوم آن 40 نفر باشد نسبت تعداد شاگردان گروه دوم بر گروه اول را دریابید.

3- مربعی را طوری رسم کنید که نسبت طول یک ضلع آن با طول یک ضلع مربع رسم شده زیر برابر $\frac{1}{2}$ باشد. نسبت محیط مربع دوم بر محیط مربع اول و نسبت مساحت مربع دوم بر مساحت مربع اول را پیدا کنید.



تقسیم به اجزای متناسب Proportional division



دو برادر به طور مشترک یک ساختمان را اعمار می کنند. اگر یکی آن بیشتر از دیگری کار کرده باشد. آیا فکر می کنید به یک اندازه دست مزد به آن ها داده شود؟
چطور می توان تعیین کرد که به هر کدام چقدر پول باید پرداخته شود؟

فعالیت

سه تن از شاگردان یک صنف روزی تصمیم گرفتند که بین خود میله کنند یکی از شاگردان گفت من سه دانه تخم مرغ و چهار دانه سیب می آورم. دو شاگرد دیگر گفتند ما هم همین چیزها را می آوریم، یعنی تصمیم گرفتند که در مقابل هر سه تخم مرغ، چهار سیب تهیه کنند.

تخم مرغ	3	6	9
سیب	4		
مجموع تخم مرغ و سیب	7		

- جدول مقابل را تکمیل کنید.
- نسبت تعداد تخم های مرغ بر مجموع تعداد تخم های مرغ و سیب ها را در هر یکی از حالت های فوق پیدا کنید.
- چه رابطه بین نسبت های آن ها وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که دو مقدار وقتی با هم متناسب اند که نسبت هر مقدار بر مجموع تعداد آن دو مقدار همیشه عدد ثابت باشد. از این نتیجه گیری می توانیم در حل مسائل استفاده کنیم.

فعالیت

	مقدار نسبی	مقدار واقعی
طول	4	
عرض	3	
محیط		280
مساحت		

طول و عرض یک قطعه زمین مستطیل شکل، به نسبت 4 بر 3 هستند. اگر محیط این زمین 280 متر باشد. مساحت آن چند متر مربع است؟
برای جواب به این سؤال جدول مقابل را تکمیل کنید.

برای تقسیم کردن یک عدد به نسبت‌های داده شده نخست حاصل جمع نسبت‌های داده شده را به دست می‌آوریم. بعد از آن عدد مفروض را به این مجموع تقسیم نموده و خارج قسمت حاصله را به هر یک از نسبت‌های داده شده ضرب می‌نماییم اعدادی که حاصل می‌شوند، حاصل تقسیم عدد مورد نظر به نسبت‌های داده شده است.

مثال: مبلغ 27000 افغانی را می‌خواهیم بین احمد و مسعود به نسبت 2 بر 3 تقسیم کنیم. نخست جدول زیر را تکمیل می‌کنیم:

احمد	مسعود	مجموع
2	3	5
x	y	27000

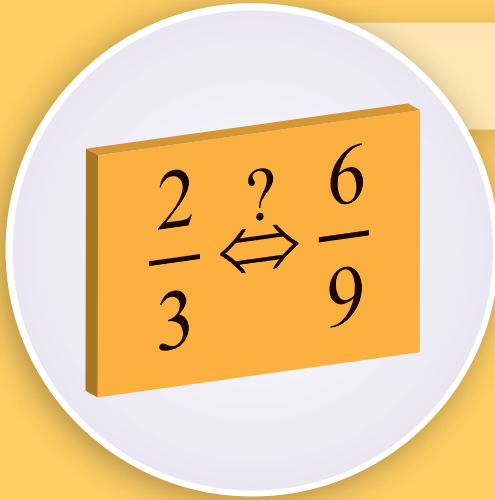
$$x = \frac{27000}{5} \times 2 = 5400 \times 2 = 10800 \text{ حصهٔ احمد}$$

$$y = \frac{27000}{5} \times 3 = 5400 \times 3 = 16200 \text{ حصهٔ مسعود}$$

تمرین

- 1- اگر نسبت دو عدد $\frac{3}{5}$ و عدد دوم آن 25 باشد، عدد اول را معلوم کنید.
- 2- دو نفر به طور مشترک کار می‌کنند که مجموع پول‌های شان 280 افغانی و نسبت بین پول‌های شان $\frac{3}{4}$ است. آیا دریافت کرده می‌توانید که نفر اول و دوم هر کدام چند افغانی گرفته‌اند؟
- 3- در قطعه خط \overline{AB} که طول آن 32cm است. نقطه M را طوری تعیین نمایید که قطعه خط مذکور را به نسبت $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$ تقسیم کند. طول قطعه خط‌های AM و BM را دریافت کنید.
- 4- 321,3 سیر گندم را بالای سه نفر دهقان به نسبت 5,7,9 تقسیم کنید.

تناسب Proportion



- در نسبت $\frac{3}{5}$ چند عدد می بینید؟
- چه رابطه بین نسبت های $\frac{2}{3}$ و $\frac{6}{9}$ وجود دارد؟
- آیا می توانید یک نسبت دیگری را بنویسید که با نسبت های فوق مساوی باشد؟

فعالیت

نسبت تعداد پینسل پاک ها و قلم ها 3 بر 4 است.
با در نظر داشت نسبت تعداد پینسل پاک ها بر تعداد قلم ها، جدول زیر را تکمیل کنید:

تعداد پینسل پاک ها	3	6
تعداد قلم ها	4	
نسبت		

- نسبت تعداد پینسل پاک ها بر تعداد قلم ها را در هر یکی از حالت های داده شده با هم مقایسه کنید.
- در مساوات نسبت های فوق؛ یعنی $3:4=6:8$ حاصل ضرب کدام جوهره از اعداد با هم مساوی است. چرا؟

چهار عدد وقتی یک تناسب را تشکیل می دهند که نسبت عدد اول و دوم مساوی به نسبت عدد سوم و چهارم باشد.

مثال: در نسبت های مقابل نسبت های مساوی را نشان دهید:
 $\frac{5}{8}, \frac{9}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

حل: اگر صورت و مخرج نسبت $\frac{3}{6}$ را اختصار کنیم یعنی صورت و مخرج آن را به 3 تقسیم نماییم $\frac{1}{2}$ به دست می آید؛ پس گفته می توانیم که هر دو نسبت با هم مساوی اند.

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

و در نسبت‌های داده شده هیچ نسبتی را پیدا کرده نمی‌توانیم که با $\frac{5}{8}$ مساوی باشد. یعنی بین بعضی از نسبت‌ها رابطه مساوات به وجود آمده نمی‌تواند.

تعریف

تساوی دو نسبت را تناسب گویند؛ مثال: $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ یک تناسب است که از نسبت‌های $\frac{5}{8}$ و $\frac{10}{16}$ به دست آمده است.

تناسب فوق را به شکل زیر هم نوشته کرده می‌توانیم:

$$5 : 8 = 10 : 16$$

در این جا صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام طرفین و مخرج نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام وسطین تناسب یاد می‌نمایند.

$$5 : 8 = 10 : 16$$

طرفین ← → وسطین

تمرین

1- در نسبت‌های زیر کدام جوړه نسبت‌ها با هم یک تناسب را تشکیل می‌دهند.

a) $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{30}$ c) $\frac{7}{3}$, $\frac{35}{15}$

b) $\frac{2}{5}$, $\frac{40}{100}$ d) $\frac{49}{35}$, $\frac{7}{5}$

2- سه حد یک تناسب داده شده است، حد دیگر آن را دریافت کنید:

a) $\frac{2}{6} = \frac{5}{\square}$

b) $\frac{14}{8} = \frac{7}{\square}$

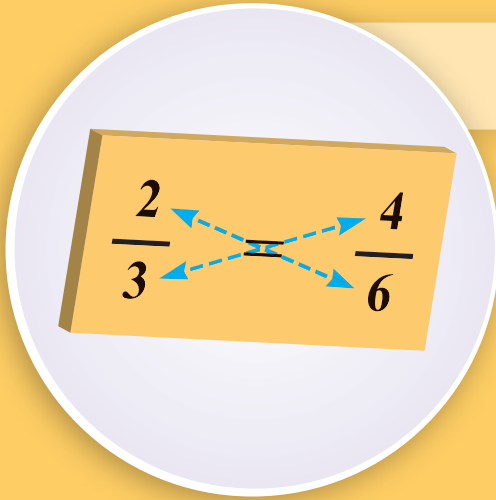
c) $\frac{1}{3} = \frac{2}{\square}$

d) $\frac{\square}{9} = \frac{3}{27}$

e) $\frac{\square}{8} = \frac{6}{12}$

f) $\frac{\square}{14} = \frac{21}{7}$

خواص تناسب Properties of proportion



- چهار عدد را طوری انتخاب کنید که یک تناسب را تشکیل دهد.
- در تناسب تشکیل شده چه رابطه بین اعداد دریافت کرده می‌توانید؟

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	a . d	b . c
4	12	2	6	$\frac{4}{12}$			
5	20		8		$\frac{2}{8}$	40	

- در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، (b, a) و (d, c) چه نام دارند؟
- برای تمام قیمت‌های جدول در تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حاصل ضرب $a \cdot b$ و $b \cdot c$ را باهم مقایسه کنید.

به صورت عموم گفته می‌توانیم:

خاصیت اول: در دو نسبت مساوی که یک تناسب را تشکیل می‌دهند، حاصل ضرب طرفین مساوی به حاصل ضرب وسطین است.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

مثال: با استفاده از خاصیت موجود بین طرفین و وسطین در یک تناسب حد نامعلوم را پیدا کنید.

$$\frac{2}{5} = \frac{\square}{12}$$

$$2 \times 12 = 5 \times \square$$

$$\square = 24 \div 5 = 4.8$$

حل:

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{d}{b}$	$\frac{c}{a}$
3	4	6	8	$\frac{3}{4}$					
9	12	21	28			$\frac{9}{21}$			

برای تمام قیمت‌های جدول نسبت‌های $(\frac{a}{c}, \frac{b}{d})$ ، $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ و $(\frac{d}{b}, \frac{c}{a})$ را ببینید که هر جوره از

نسبت‌ها، تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟
به صورت عموم می‌توان گفت:

خاصیت دوم: اگر در یک تناسب جاهای وسطین را تبدیل کنیم: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

دست می‌آید.

خاصیت سوم: هرگاه در یک تناسب جاهای طرفین را تبدیل نماییم، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ تناسب جدید تشکیل می‌شود.

مثال: نسبت طول و عرض یک مستطیل $\frac{4}{3}$ است. اگر طول و عرض این مستطیل را 2 برابر کنیم. نسبت طول و عرض مستطیل جدید چقدر است؟ آیا نسبت طول و عرض هر دو مستطیل یک تناسب را تشکیل می‌دهد؟

حل: نسبت طول و عرض مستطیل جدید $\frac{8}{6}$ است. $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} \Rightarrow 4 \times 6 = 8 \times 3$

برای این که بدانیم آیا نسبت‌های $\frac{8}{6}$ و $\frac{4}{3}$ یک تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟ باید حاصل ضرب طرفین مساوی به حاصل ضرب وسطین شود.

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{d}{c}$
2	3	8	12	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
6	9	10	15		$\frac{10}{15}$		

نسبت‌های $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ و $(\frac{d}{c}, \frac{b}{a})$ را برای تمام اعداد جدول ببینید که تناسب را می‌سازد یا خیر؟

به صورت عموم گفته می‌توانیم:

خاصیت چهارم: اگر دو نسبت یک تناسب را تشکیل دهد، معکوس آن‌ها نیز یک تناسب را تشکیل می‌دهد.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+b}{b}$	$\frac{c+d}{d}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{c-d}{d}$
6	9	12	18	$\frac{6}{9}$		$\frac{6+9}{9}$			
12	18	24	36		$\frac{24}{36}$				

برای تمام قیمت‌های جدول نسبت‌های $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ ، $(\frac{a+b}{b}, \frac{c+d}{d})$ و $(\frac{a-b}{b}, \frac{c-d}{d})$ را ببینید که هر جوره از نسبت‌ها تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟

به صورت عموم می‌گوییم:

خاصیت پنجم: هر گاه دو نسبت یک تناسب را تشکیل دهد و صورت هر نسبت را با مخرج جمع و حاصل آن را بر مخرج اولی آن بنویسیم یک تناسب جدید حاصل می‌شود.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

خاصیت ششم: هر گاه در یک تناسب از صورت هر نسبت مخرج را تفریق و حاصل را بر مخرج اولی آن بنویسیم یک تناسب جدید حاصل می‌شود.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+c}{b+d}$
1	2	7	14		$\frac{7}{14}$	
3	4	6	8			$\frac{3+6}{4+8}$

برای تمام قیمت‌های جدول نسبت‌های $(\frac{a}{b}, \frac{c}{d})$ ، $(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d})$ و $(\frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d})$ را ببینید که هر جوره از نسبت‌ها، تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟

به صورت عموم می‌گوییم:

خاصیت هفتم: اگر در یک تناسب صورت‌ها را با هم جمع نموده در صورت و مخرج‌ها را با هم جمع نموده در مخرج بنویسیم. نسبت جدید با هر نسبت تناسب داده شده مساوی است و تناسب‌های جدید را تشکیل می‌دهند.

مثال:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{3+6}{4+8} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12} \Rightarrow 3 \times 12 = 4 \times 9$$

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12} \Rightarrow 6 \times 12 = 9 \times 8$$

تمرین

1- تناسب‌های زیر را با در نظر داشت قیمت‌های داده شده به شکل عددی بنویسید:

• اگر $a = 10$ ، $b = 5$ ، $c = 30$ و $d = 15$ باشد: $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d}$

• اگر $a = 8$ ، $b = 9$ ، $c = 32$ و $d = 36$ باشد: $\frac{b}{a+b} = \frac{d}{c+d}$

2- اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد با استفاده از خاصیت‌های تناسب چطور می‌توانید که تناسب $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ را به دست آورید؟



انواع تناسب 1- تناسب مستقیم Direct proportion

به خاطر تهیه کارهای دستی، نگران صنف به هر یک از شاگردان 2 بسته کاغذ رنگه داد؛ اگر صنف هشتم 20 نفر شاگرد داشته باشد، چند بسته کاغذ رنگه ضرورت است، تا برای همه شاگردان برسد؟

فعالیت

جدول‌های زیر را با در نظر داشت قیمت‌های داده شده یک کیلو گرام و ده کیلو گرام بوره تکمیل کنید.

مقدار	1 کیلو گرام	2 کیلو گرام	3 کیلو گرام	4 کیلو گرام	5 کیلو گرام
قیمت	50 افغانی				

مقدار	10 کیلو گرام	9 کیلو گرام	8 کیلو گرام	7 کیلو گرام	6 کیلو گرام
قیمت	500 افغانی				

- با زیاد شدن مقدار بوره، قیمت آن چگونه تغییر می کند؟
- با کم شدن مقدار بوره قیمت آن چگونه تغییر می کند؟
- چه رابطه بین مقدار و قیمت بوره وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:

قیمت بوره با مقدار آن رابطه مستقیم دارد؛ یعنی هر قدر مقدار بوره زیاد شود قیمت آن نیز زیاد می شود و هر قدر مقدار بوره کم شود قیمت آن هم کم می شود.

تعریف

اگر در یک تناسب با زیاد شدن و یا کم شدن یک مقدار به ترتیب سبب زیاد شدن و یا کم شدن مقدار دیگر شود، این نوع تناسب را تناسب مستقیم می‌نامند، یعنی مقدارهای متذکره با یکدیگر مستقماً متناسب اند.

مثال: اگر قیمت 8 قوطی گوگرد 4 افغانی باشد قیمت 62 قوطی گوگرد چند افغانی خواهد بود؟

حل: اگر قیمت 62 قوطی گوگرد m افغانی باشد. چون تعداد قوطی‌های گوگرد به طور مستقیم متناسب به قیمت آن است، پس این یک تناسب مستقیم است.

گوگرد	قیمت
8	4
62	m

$$\frac{8}{62} = \frac{4}{m}$$

$$m = \frac{4 \times 62}{8} = 31 \text{ افغانی}$$

تمرین

- 1- مزد 12 نفر کارگر 480 افغانی است. مزد 10 نفر کارگر را معلوم کنید (مزد همه کارگران برابر است).
- 2- اگر یک نفر کارگر در 5 روز 1500 افغانی مزد بگیرد، مزد 18 روزه او چند افغانی می‌شود؟
- 3- برای خریدن 3 متر تکه 330 افغانی ضرورت است. برای خریدن 15 متر تکه چند افغانی به کار خواهد بود؟

2- تناسب معکوس Indirect proportion



• بعد از پاک کاری صنف، نگران خواست که صنف را منظم بسازد. اگر یک شاگرد صنف را در 60 دقیقه منظم کند 6 نفر شاگرد در چند دقیقه می توانند صنف را منظم کنند؟

فعالیت

اگر یک رنگمال یک اتاق را در چهار روز رنگ کند، پس برای رنگمالی یک اتاق در مدت یک یا دو روز چند کارگر ضرورت است؟
برای جواب سؤال، جدول زیر را با در نظر داشت قیمت‌های داده شده تکمیل کنید:

کار اجرا شده به روز	4 روز	2 روز	1 روز
تعداد کارگر	1		

- با کم شدن تعداد روز، تعداد کارگران زیاد می‌شود یا کم؟
- برای رسیدن به انجام کار میان تعداد روزها و کارگران چه رابطه وجود دارد؟

تعریف

اگر در یک تناسب با زیاد شدن یک مقدار، مقدار دیگری کم و یا با کم شدن یک مقدار، مقدار دیگر زیاد شود؛ این نوع تناسب به نام تناسب معکوس یاد می‌شود؛ یعنی بین کمیت اولی و دومی رابطه معکوس وجود دارد.

مثال: یک مسجد را 20 نفر در 15 روز ترمیم می کنند، اگر بخواهند که این مسجد را در 10 روز ترمیم کنند. برای آن چند نفر کارگر ضرورت است؟

حل: تناسب معکوس است، زیرا برای روزهای کم تعداد زیاد کارگران ضرورت است.

نفر	$\frac{1}{\text{روز}}$
20	$\frac{1}{15}$
m	$\frac{1}{10}$

$$\frac{20}{m} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{15}, \quad \frac{20}{m} = \frac{10}{15}, \quad m = \frac{20 \times 15}{10} = 30$$

تمرین

1- چهار نل، یک حوض را در 8 ساعت پر می کند، 5 نل، این حوض را در چند ساعت پر خواهد کرد؟ قطرهای نل ها با هم مساوی اند.

2- یک موتور با سرعت 50 کیلومتر فی ساعت حرکت نموده و فاصله بین دو شهر را در 3 ساعت طی می کند. اگر سرعت موتور دیگری 75 کیلومتر فی ساعت باشد، فاصله بین دو شهر را در چند ساعت طی می کند؟

تناسب مرکب compound proportion

$$\frac{5}{3} = \frac{25}{15} = \frac{30}{18}$$

تناسب به چند نوع است؟
یک تناسب می‌تواند تنها مستقیم و
یا معکوس باشد؟
آیا تناسبی وجود دارد که هم‌زمان
هم مستقیم و هم معکوس باشد؟

فعالیت



به اندازه دو قاشق چای خوری، شربت را در یک گilas آب مطابق شکل، حل کرده ایم که نسبت هر گilas آب و شربت 1 بر 2 است. جک شکل مقابل گنجایش 2 گilas آب را دارد. مطابق شکل 4 قاشق چای خوری شربت را در آن حل کرده ایم. آیا شیرینی آب گilas و جک به یک اندازه خواهد بود؟
جدول زیر را تکمیل کنید:

تعداد گilas ها	1	2	3	4
تعداد قاشق ها	2		6	

- نسبت تعداد گilas های آب بر تعداد قاشق‌های شربت را بنویسید.
- چه رابطه بین این نسبت‌ها وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که هر قدر تعداد گilas های آب بیشتر یا کمتر شود، تعداد قاشق چای خوری شربت نیز متناسب به آن تغییر می‌کند، تا نسبت $\frac{1}{2}$ ثابت بماند؛ بنا بر آن جدول فوق یک جدول تناسب است.

یادداشت: جهت تیر به طرف بالا تناسب مستقیم و جهت تیر به طرف پایین تناسب معکوس را نشان می‌دهد.

مثال 1: 5 نفر کارگر برای 4 روز کار 80000 افغانی مزد می گیرند. 8 نفر برای 6 روز کار چند افغانی مزد خواهند گرفت؟
حل: چون رابطه بین نسبت ها مستقیم است. جدول زیر را تشکیل می دهیم.

مزد	روز	تعداد نفر
80000	4	5
x	6	8

$$\frac{80000}{x} = \frac{4 \times 5}{6 \times 8}, \quad \frac{80000}{x} = \frac{5}{12}$$

$$x = 192000$$

مثال 2: اگر 10 نفر، کانالی را به طول 12 متر در 8 روز حفر نمایند، 5 نفر کانال مشابه را که طول آن 15 متر باشد در چند روز حفر کرده می توانند؟

حل: متحول مطلوب؛ یعنی تعداد روز ها با تعداد نفرها تناسب معکوس و با طول کانال تناسب مستقیم دارد. پس داریم:

روز	طول	تعداد نفر
8	12	10
x	15	5

$$\frac{8}{x} = \frac{12 \times 5}{15 \times 10}, \quad x = \frac{8 \times 15 \times 10}{12 \times 5}$$

$$x = 20$$

تعریف

تساوی زیادتیر از دو نسبت را تناسب مرکب گویند در تناسب مرکب صورت نسبت اول و مخرج های نسبت های دیگر را به نام طرفین و مخرج نسبت اول و صورت های نسبت های دیگر را به نام وسطین تناسب یاد می کنند.

$$\frac{2}{3} \begin{matrix} \rightarrow 6 \\ \rightarrow 9 \end{matrix} = \frac{6}{9} = \frac{18}{27} \begin{matrix} \rightarrow 18 \\ \rightarrow 27 \end{matrix}$$

مثال:
 وسطین $\rightarrow 18$
 طرفین $\rightarrow 27$

تمرین

1- تعداد 24 نفر دهقان با کار روزانه 8 ساعت زمینی را به وسعت 2000 متر مربع در ظرف 20 روز بیل می زنند، اگر 40 نفر دهقان روزانه 12 ساعت کار کنند، زمینی به وسعت 3000 متر مربع را در چند روز بیل زده می توانند؟
 2- اگر برای انتقال 4200 کیلو گرام گندم به فاصله 810 کیلو متر 500 افغانی ضرورت باشد؛ پس برای حمل و نقل 6000 کیلو گرام گندم به فاصله 630 کیلو متر چند افغانی ضرورت خواهد بود؟

$$\frac{15}{100} = \frac{11}{x}$$

$$x = ?$$

تیم والیبال یک مکتب از 15 بازی انجام شده در منطقه، 11 بازی را برنده شده است؛ اما تیم والیبال مکتب دیگر از 12 بازی انجام شده در 10 بازی برنده شده به نظر شما برد کلی کدام مکتب بیشتر است؟

فعالیت

تیل	آب
80	20
100	x

اگر در 80 لیتر تیل، 20 لیتر آب مخلوط شده باشد؛ پس در 100 لیتر آن، چند لیتر آب مخلوط است؟

- با در نظر داشت قیمت‌های جدول، تناسب را تشکیل دهید.
- با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین قیمت X را دریافت کنید.
- آیا گفته می‌توانید که در 100 لیتر تیل، چند فیصد آب وجود دارد؟

مثال 1: شخصی 45000 افغانی را در بانک گذاشت و بعد از مدتی 900 افغانی مفاد کرد. شخص مذکور از سرمایه اصلی خود چند فیصد مفاد گرفته است؟
حل: با استفاده از تناسب می‌توان نوشت:

سرمایه	نفع
45000	900
100	x

$$\frac{45000}{100} = \frac{900}{x}$$

با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین:

$$x = \frac{900 \times 100}{45000} = \frac{90000}{45000} = \frac{90}{45} = 2\%$$
 از حل مثال فهمیده می‌شود که در هر 100 افغانی شخص مذکور 2 افغانی یا 2% مفاد کرده است.

مثال 2: در امتحان کانکور پوهنتون از جمله 320 نفر فارغ التحصیل لسیه حبیبیه 256 نفر کامیاب و از جمله 400 نفر فارغ التحصیل لسیه غازی به تعداد 300 نفر کامیاب گردیده‌اند. گفته می‌توانید که کدام یک از مکاتب نامبرده در امتحان به فیصدی بیشتر موفق بوده‌اند؟ فیصدی کامیابی شاگردان را دریافت نمایید.

حل:

کامیاب	فارغ التحصیل
256	320
x	100

$$\frac{256}{x} = \frac{320}{100}, \quad x = \frac{256 \times 100}{320} = \frac{2560}{32} = 80\%$$

فیصدی کامیابی لسیه حبیبیه

کامیاب	فارغ التحصیل
300	400
x	100

$$\frac{300}{x} = \frac{400}{100}, \quad x = \frac{300 \times 100}{400} = \frac{300}{4} = 75\%$$

فیصدی کامیابی لسیه غازی

پس، گفته می‌توانیم که لسیه حبیبیه در امتحان کانکور نسبت به لسیه غازی موفق‌تر بوده است.

تعریف

فیصد، طرز ارائه برای کسرهایی است که مخرج آن‌ها 100 باشند. برای نمایش فیصد از علامت % استفاده می‌شود.

تمرین

- 1- یک دکاندار در یک ماه دو مرتبه مال وارد نموده است. مرتبه اول به سرمایه 25000 افغانی، مبلغ 800 افغانی مفاد نموده و مرتبه دوم از سرمایه 10000 افغانی، مبلغ 330 افغانی مفاد نموده است. مفاد دکاندار مذکور به تناسب سرمایه در کدام مرتبه بیشتر بوده دریافت کنید.
- 2- عبدالرحیم در مضمون ریاضی از 75 نمره 60 نمره به دست آورده است. فیصدی نمره عبدالرحیم را در مضمون ریاضی به دست آورید.
- 3- از مساوات زیر کدام آن‌ها صحیح می‌باشد؟ آن‌هایی که غلط‌اند، نسبت صحیح آن‌را بنویسید.

$$50\% = \frac{1}{2}, \quad \frac{111}{1000} = 11\%, \quad \frac{21}{100} = 21\%, \quad 4\% = \frac{4}{100}, \quad 30\% = \frac{30}{50}$$



اگر قیمت یک مجموعه به صورت کل داده شده باشد، چگونه می‌توانید قیمت یک دانه آن را دریافت کنید؟
اگر قیمت یک دانه قلم داده شده باشد، آیا قیمت چند دانه آن را پیدا کرده می‌توانید؟

فعالیت

نسبت تعداد پیراهن‌ها بر تعداد روزهای که یک خیاط می‌دوزد $\frac{28}{4}$ است؛ یعنی این خیاط 28 پیراهن را در 4 روز می‌دوزد، چند پیراهن را در یک روز خواهد دوخت؟
با در نظر داشت متن فوق جدول داده شده زیر را تکمیل کنید:

تعداد پیراهن	28	x
روز	4	1
نسبت		

- با استفاده از جدول فوق، تناسب را تشکیل دهید.
- با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین قیمت X را دریافت کنید.

پس گفته می‌توانیم: اگر قیمت چندین شی داده شده باشد، ما می‌توانیم قیمت یک دانه آن را دریافت کنیم.

مثال 1: قیمت یک بیرل تیل (200 لیتر) مبلغ 40000 افغانی است. قیمت یک لیتر آن را معلوم کنید.

تیل	افغانی
200	40000
1	x

$$\frac{200}{1} = \frac{40000}{x}$$

$$200x = 40000$$

$$x = \frac{40000}{200}, \quad x = 200$$

مثال 2: یک درجن قلم پنسل (12 دانه) به مبلغ 60 افغانی خریده شده است. قیمت 7 دانه پنسل چند افغانی می‌شود؟

حل: نخست قیمت یک دانه قلم را دریافت می‌کنیم.

تعداد قلم پنسل	افغانی
12	60
1	x

$$\frac{12}{1} = \frac{60}{x}$$

$$12x = 60$$

$$x = \frac{60}{12}, \quad x = \text{افغانی } 5$$

پس قیمت 7 دانه آن عبارت است از:

$$\text{افغانی } 5 \cdot 7 = 35$$

در اکثر معاملات تجارتي خرید و فروش اشيا و اجناس به صورت درجن و يا ست صورت مي‌گيرد. بعضي اوقات ضرورت مي‌افتد تا قيمت يك و يا چند دانه آن را معلوم كنيم. براي اجراي اين عمل از طريقه استفاده به عمل مي‌آيد كه به نام احديت ياد مي‌شود و چنين تعريف مي‌شود:

تعريف

احديت يك طريق محاسبه تناسب مستقيم بوده؛ طوري كه نخست قيمت يك واحد را از نسبت مربوط، دريافت و بعد ضرب مقدار داده شده مي‌نمايم.

تمرين

- 1- قيمت 2 متر تکه 300 افغانی است، نخست قیمت یک متر آن را دریافت کنید و سپس بگوئید قیمت 17 متر تکه چند افغانی می‌شود؟
- 2- مصرف انتقال 60 كيلوگرام جنس در يك فاصله، 2400 افغانی می‌شود. نخست قیمت انتقال يك كيلوگرام آن را دریافت کنید و سپس بگوئید قیمت مصرف انتقال 35 كيلوگرام آن چند افغانی خواهد شد؟

Discount



بعضی اوقات به مغازه ها رفته باشید و این اعلانات را دیده یا شنیده باشید. 10% تخفیف در قیمت لباس های بهاری. 50% تخفیف در فروش سیم کارت. 15% تخفیف در اجناس برقی.

فعالیت

یک شاگرد برای خرید کتاب داستان، به کتاب فروشی مراجعه می کند. قیمت یک جلد کتاب 60 افغانی است و شاگرد مذکور 55 افغانی دارد. کتاب فروش، کتاب مورد نظر را به 55 افغانی بالای آن شاگرد به فروش می رساند.

- شاگرد، کتاب را چند افغانی ارزان تر از قیمت اصلی آن خریداری نموده است؟
- چند فیصد پول کتاب را از قیمت اصلی آن کمتر پرداخته است؟
- اگر این فیصد، در قیمت اصلی کتاب ضرب گردد، چه عددی را نشان می دهد؟

پس می توان گفت: به همان اندازه که شاگرد کتاب را کمتر از قیمت اصلی آن خریده است، تخفیف کتاب نامیده می شود.

مثال 1: ماشین آب میوه که به 4000 افغانی خریده شده است با تخفیف 8% به فروش می رسد. قیمت فروش را معلوم کنید.

قیمت	تخفیف
100	8
4000	x

حل:

$$320 \text{ افغانی} = 4000 \times \frac{8}{100} = 40 \times 8 = \text{تخفیف } (x)$$

$$3680 \text{ افغانی} = 4000 - 320 = \text{قیمت فروش}$$

مثال 2: شخصی یک جنس را که قیمت اصلی آن 3000 افغانی است، بعد از تخفیف به 2895 افغانی خرید. معلوم کنید که خریدار جنس را به چند فیصد تخفیف گرفته است؟
حل: نخست تمام تخفیف را به دست می آوریم:

$$3000 - 2895 = 105$$

تمام تخفیف 105 افغانی است. حالا به کمک تناسب تخفیف آن را در 100 افغانی معلوم می کنیم.

قیمت	تخفیف
3000	105
100	x

$$\text{تخفیف } (x) = 100 \times \frac{105}{3000} = \frac{10500}{3000} = 3.5\%$$

$$x = 3.5\%$$

تعریف

پولی را که تاجران برای مشتریان خویش از حیث رقابت و جلب مشتری، از قیمت اصلی آن کم می نمایند به نام تخفیف یاد می شود. تخفیف از روی صد را نظر به قیمت اصلی به نام تخفیف فیصدی یاد می کنند.

تمرین

- 1- قیمت اصلی یک بایسکل 5000 افغانی است. هرگاه فروشنده به مشتری خویش 2% تخفیف بدهد قیمت فعلی بایسکل را معلوم کنید.
- 2- قیمت اصلی یک بخاری گازی 8000 افغانی است، نسبت ضرورت، دکاندار آن را به قیمت 7600 افغانی به فروش می رساند. مقدار تخفیف و فیصدی تخفیف آن را معلوم کنید.
- 3- قیمت یک جاروب برقی 5730 افغانی است و به تخفیف 3% به فروش می رسد. قیمت فروش را معلوم کنید.



ربح ساده و مرکب

Simple and compound Intrest

یک دکاندار 1000 افغانی را در یک بانک گذاشت. بعد از یک سال پول خود را دوباره از بانک گرفت مقدار پول آن 1100 افغانی شده بود. از متصدی بانک پرسید که 100 افغانی اضافه شده چیست؟

تعریف

مفادی که از یک سرمایه در یک مدت معین به نرخ معین از قرار فیصدی معین حاصل می گردد به نام ربح ساده یا Simple Intrest یاد می گردد. چون ربح ساده به طور مستقیم متناسب به سرمایه و نرخ معین می باشد. یعنی:

$$p = A \cdot R \cdot T$$

در این جا P سرمایه، R نرخ به فیصد و T مدت به سال را نشان می دهد.

مثال 1: ربح 5600 افغانی از قرار نرخ 8% پس از مدت یک سال چند افغانی می شود؟
حل:

$$\text{سرمایه (A)} = 5600$$

$$\text{نرخ (R)} = 8\% = \frac{8}{100} \quad \text{ربح } P = A \cdot R \cdot T = 5600 \times \frac{8}{100} = 56 \times 8 = 448 \text{ افغانی}$$

$$\text{مدت (T)} = \text{یکسال}$$

مثال 2: ربح سرمایه 156000 افغانی را به نرخ 13% در مدت 7 ماه حساب کنید.
حل:

$$\text{سرمایه (A)} = 156000$$

$$\text{نرخ (R)} = 13\% = \frac{13}{100} \quad \text{ربح } P = A \cdot R \cdot T = 156000 \times \frac{13}{100} \times \frac{7}{12} = 11830$$

$$\text{مدت (T)} = \text{سال } \frac{7}{12} = \text{ماه } 7$$

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید.

مقدار پول اصلی	مقدار پول بعد از 1 سال	مقدار پول بعد از 2 سال	مقدار پول بعد از 3 سال	مقدار پول بعد از 4 سال
1000	1100	1210	1331	1464,1

- تفاوت بین مفاد هر سال، نسبت به سال قبلی را در یک جدول نشان دهید.
- تفاوت‌های موجود مقدار ثابت دارند یا خیر؟
- نسبت بین مفاد هر سال نظر به سال قبل را در یک جدول نشان دهید.
- آیا این نسبت‌ها ثابت‌اند یا خیر؟

تعریف

اگر مفاد یک سرمایه به اصل مقدار سرمایه علاوه گردیده و دوباره به مفاد گذاشته شود سرمایه جدید با مفادی که به دست می‌آید، ربح مرکب نامیده می‌شود که از رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$P = A(1+r)^n$$

در این جا P سرمایه جدید با مفاد، A سرمایه اولی، r نرخ به فیصد n مدت به سال را نشان می‌دهد.

مثال: سرمایه 2000000 افغانی با ربح مرکب سالانه 10% در بانک گذاشته می‌شود. بعد از گذشت 5 سال سرمایه مذکور چند افغانی می‌شود؟

حل: قیمت‌ها را در فورمول وضع می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} A = 2000000 \\ r = 10\% \\ n = 5 \\ P = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} P = 2000000 \left(1 + \frac{1}{10}\right)^5 = 2000000(1.1)^5 \\ P = 2000000 \times 1.61051 = 3221000 \\ P = 3221000 \end{array}$$

تمرین

1- احمد 4000 افغانی از قرار نرخ 8% در حساب خود پس انداز کرده است، پس از پایان سال، بانک چقدر مفاد برایش خواهد داد؟

2- مقدار 15000 افغانی از قرار نرخ 10% در مدت 3 سال چند افغانی می‌شود؟

نکات مهم فصل دوم

• نسبت

نسبت بین دو مقدار هم جنس عبارت از عددی است که نشان می دهد مقدار اول چند برابر مقدار دوم است.

• تقسیم به اجزای متناسبه

برای تقسیم یک عدد به نسبت های داده شده نخست حاصل جمع نسبت های داده شده را به دست می آوریم و بعد از آن، عدد مفروض را به این مجموع نسبت ها تقسیم نموده و خارج قسمت را ضرب هر یک از نسبت های داده شده می نماییم. اعدادی که حاصل می شوند حاصل تقسیم عدد مورد نظر به نسبت های داده شده است.

• تناسب

مساوات دو نسبت را تناسب گویند.

• خواص تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad -1$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad -2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad -3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad -4$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad -5$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad -6$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad -7$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad -8$$

• اقسام تناسب

- 1- تناسب مستقیم: اگر در یک تناسب زیاد شدن و یا کم شدن مقدار یک کمیت به ترتیب سبب زیاد شدن و یا کم شدن مقدار کمیت دیگر شود، این تناسب را تناسب مستقیم می‌نامند.
- 2- تناسب معکوس: اگر در یک تناسب با زیاد شدن مقدار یک کمیت، مقدار دیگری کم و یا با کم شدن مقدار یک کمیت، مقدار دیگر زیاد شود این تناسب به نام تناسب معکوس یاد می‌شود.

• تناسب مرکب

تساوی زیادتر از دو نسبت را تناسب مرکب می‌نامند.

• فیصد

فیصد طرز ارائه برای کسرهایی است که مخرج آن 100 باشند.

• احدیت

یک طریقه محاسبه تناسب مستقیم بوده طوری که نخست قیمت یک واحد آن را از نسبت مربوط دریافت و سپس ضرب مقدار داده شده می‌نماییم.

• تخفیف

پولی را که تاجران از حیث رقابت و جلب مشتری از قیمت اصلی آن کم می‌نمایند، به نام تخفیف یاد می‌شود.

• ربح

- ربح ساده: مفادی که از یک سرمایه در یک مدت معین به نرخ معین از قرار فیصدی معین حاصل می‌گردد به نام ربح ساده یاد می‌گردد.

$$P = A \cdot R \cdot T$$

- ربح مرکب: هرگاه مفاد یک سرمایه به اصل مقدار سرمایه علاوه گردیده و دوباره به مفاد گذشته شود سرمایه جدید با مفادی که از سرمایه جدید به دست می‌آید ربح مرکب نامیده می‌شود.
• در زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، دور جواب صحیح را حلقه بکشید.

$$P = A(1 + r)^n$$

تمرینات عمومی

1- نسبت دو کمیت عبارت از یک عددی است که:

(a) منفی باشد (b) مثبت باشد (c) بدون واحد باشد (d) هیچ کدام

2- علامت فیصد عبارت است از:

(a) \times (b) \div (c) + (d) %

• جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

- 1- در هر تناسب صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام و مخرج نسبت اول و صورت‌های نسبت‌های دوم را به نام یاد می‌کنند.
- 2- در تناسب مستقیم هر دو مقدار هم زمان یا می‌شوند.
- 3- مفادی که از یک سرمایه در یک معین به یک معین از قرار فیصدی معین حاصل می‌گردد به نام ساده یاد می‌شود.
- 4- کسری که مخرج آن است به نام یاد می‌شود.

• در زیر یک تعداد جملات داده شده است در مقابل جمله صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله غلط حرف (غ) بگذارید:

- 1- () در یک تناسب، صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام طرفین، مخرج نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام وسطین تناسب یاد می‌کنند.
- 2- () هرگاه نفع یک سرمایه دوباره به اصل سرمایه علاوه و به مفاد گذاشته شود سرمایه جدیدی که به دست می‌آید به نام ربح ساده یاد می‌شود.
- 3- () فیصد کسری است که مخرج آن 100 باشد.
- 4- () تخفیف، تناسب مستقیمی است که نخست قیمت یک واحد آن را از نسبت مربوطه دریافت و سپس ضرب مقدار داده شده می‌نماییم.
- 5- () مساوات دو تناسب را نسبت گویند.

سؤال‌های زیر را حل کنید:

- 1- تعداد شاگردان دو مکتب به ترتیب 720 و 810 نفر اند. نسبت بین شاگردان هر دو مکتب را به دست آورید.
- 2- در یک باغ 45 اصله درخت سیب، 30 اصله درخت ناک و 75 اصله درخت انار است. نسبت بین دو نوع درخت را پیدا کنید.
- 3- برای خریدن سه متر تکه، 450 افغانی ضرورت است. برای خریدن 15 متر تکه چند افغانی به کار خواهد بود؟
- 4- یک رستوران را 27 نفر در 20 روز اعمار می کنند؛ اگر بخواهیم این رستوران در 15 روز اعمار گردد؛ در چند نفر لازم است؟
- 5- تعداد داخله یک صنف لیسه عالی ملالی 50 دختر است. معلم آن‌ها می خواهد آن‌ها را به دو گروه طوری تقسیم کند که نسبت بین آن‌ها $\frac{2}{3}$ شود، تعداد هر گروه را معلوم کنید.
- 6- زمینی به مساحت $1200m^2$ را 14 نفر به شرط این که روزانه سه ساعت کار کنند در هشت روز بیل می زنند، زمینی دیگری که به مساحت $1500m^2$ توسط ده نفر روز شش ساعت کار کنند در چند روز بیل خواهند زد؟
- 7- اداره یک لیسه از یک کتاب فروشی به مبلغ 2560 افغانی کتاب خریداری نموده است. برای این که کتاب فروش خریدار مذکور را برای آینده مشتری خود بسازد. 5 فیصد پول کمتر از قیمت اصلی آن اخذ می کند معلوم کنید که اداره لیسه چند افغانی به کتاب فروش داده است؟
- 8- مجموعه سرمایه‌های دو تاجر که طور مشترک با هم تجارت می کنند 2540000 افغانی و نسبت سرمایه‌های آن‌ها $\frac{3}{5}$ است. سرمایه هر کدام آن‌ها را معلوم کنید.
- 9- سرمایه 12000 افغانی با ربح مرکب سالانه 6 فیصد در بانک گذاشته می شود بعد از گذشت 4 سال، سرمایه مذکور چند افغانی می شود؟
- 10- هر گاه نفوس یک قریه یک سال قبل 600 نفر، احصائیه گیری شده باشد و جمعیت قریه سالانه 3 فیصد زیاد شده باشد، نفوس فعلی قریه چند نفر است؟
- 11- مفاد 4800 افغانی از قرار نرخ 9 فیصد در مدت یک سال چند افغانی می شود؟

فصل سوم

مشابہت‌ها





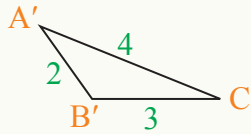
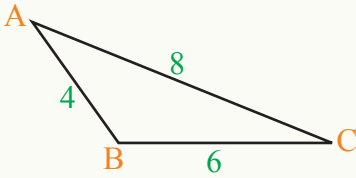
اشکال متشابه



آیا اشکال همانند را به اندازه‌های مختلف دیده‌اید؟
در اطراف ما اشکالی وجود دارند که اندازه‌های شان مساوی نبوده؛ اما هم شکل می‌باشند؛ مثال: تصویر تاق ظفر پغمان که یکی از آن‌ها بزرگ و دیگری کوچک است؛ ولی از نظر شکل آن‌ها را باهم مشابه می‌بینیم.

فعالیت

دو مثلث زیر را در نظر بگیرید:

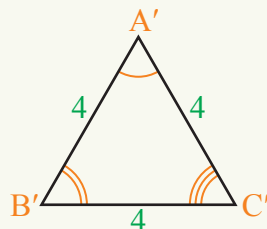
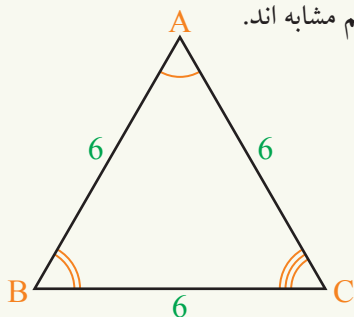


- آیا فکر می‌کنید که این دو مثلث با هم مشابه اند؟
- در مثلث‌های بالا ضلع‌های متناسب و زاویه‌های مساوی آن‌ها را مشخص کنید.
- زاویه‌های مساوی را توسط نقاله اندازه گرفته و باهم مقایسه کنید.
- نسبت‌های اضلاع متناسب را حساب نمایید.

فعالیت فوق به ما نشان می‌دهد که:

در اشکال مشابه زوایای مقابل اضلاع متناسب یک به یک با هم انطباق پذیر اند و نسبت اضلاع متناسب دارای مقدار ثابت بوده که این مقدار ثابت را نسبت تشابه می‌گویند. هر گاه دو شکل باهم چنین رابطه داشته باشند، مشابه اند. اشکال مشابه را به علامت (\sim) نمایش می‌دهیم.

مثال: نشان می‌دهیم که دو مثلث متساوی الاضلاع با هم مشابه اند.



حل: تمام زوایای هر دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\hat{A} \cong \hat{A}' , \hat{B} \cong \hat{B}' , \hat{C} \cong \hat{C}'$$

تناسب بین اضلاع وجود دارد.

تمرین

پس:

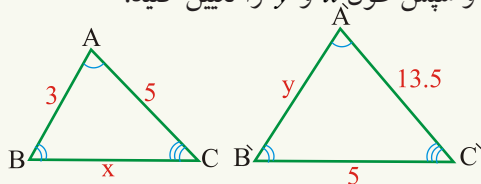
$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

1- کدام یک از جمله‌های زیر همیشه درست نیست، برای هر یک مثال دهید.

- دو مربع همیشه باهم مشابه اند.
- دو مثلث همیشه باهم مشابه اند.
- دو مستطیل همیشه باهم مشابه اند.
- دو مثلث متساوی الساقین همیشه باهم مشابه اند.
- دو لوزی همیشه باهم مشابه اند.

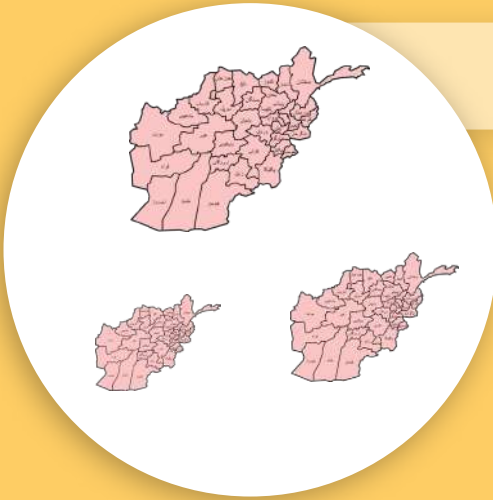
2- مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند. زاویه‌های آن‌ها مشخص شده است.

نسبت بین ضلع‌های مقابل آن‌ها را بنویسید و سپس طول x و y را تعیین کنید:



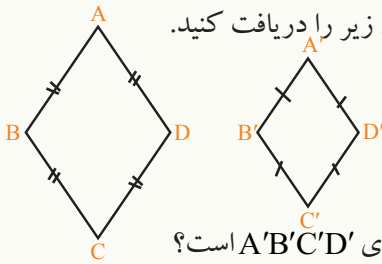
3- دو پنج ضلعی مشابه رسم کنید.

آیا دو نقشه زیر نقشه بالا به یک اندازه کوچک شده‌اند؟



فعالیت

با در نظر داشت شکل و استفاده از خط کش نسبت‌های زیر را دریافت کنید.



$$\frac{AB}{A'B'} = \square \quad \frac{BC}{B'C'} = \square$$

$$\frac{CD}{C'D'} = \square \quad \frac{AD}{A'D'} = \square$$

• اضلاع لوزی ABCD بالترتیب چند برابر اضلاع لوزی A'B'C'D' است؟

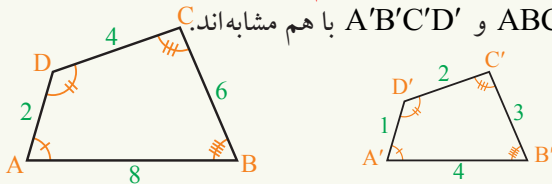
• زاویه‌های ABCD و A'B'C'D' را اندازه بگیرید. چه رابطه میان آن‌ها وجود دارد؟

فعالیت فوق دیدیم که نسبت اضلاع متناسب در دو شکل همواره ثابت و باهم مساوی می‌باشند و زاویه‌های مقابل اضلاع متناسب باهم مساوی اند؛ پس دو شکل با هم مشابه اند در نتیجه می‌توانیم که:

چند ضلعی‌ها در صورتی با هم مشابه‌اند که دارای خواص زیر باشند:

- 1- تعداد رأس‌های‌شان با هم مساوی باشند.
- 2- تمام زوایا در مضلعات مشابه باید یک به یک با هم انطباق پذیر باشند.
- 3- اضلاعی که در مقابل زوایای مساوی قرار دارند باید با هم متناسب باشند.

مثال: نشان می‌دهیم که دو مضلع ABCD و A'B'C'D' با هم مشابه‌اند.



حل: با استفاده از نقاله در شکل دیده می شود که:

$$\hat{A} \cong \hat{A'}, \hat{B} \cong \hat{B'}, \hat{C} \cong \hat{C'}, \hat{D} \cong \hat{D'} \quad 1- \text{زاویه ها با هم انطباق پذیر اند.}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = 2 \quad 2- \text{تناسب بین اضلاع وجود دارد.}$$

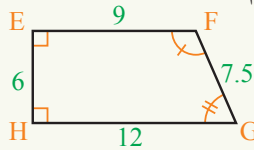
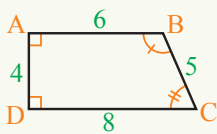
$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

پس دو شکل با هم مشابه اند.

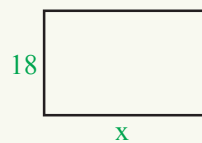
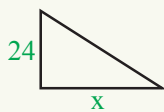
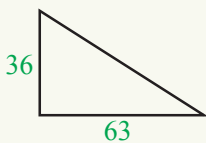
در مثال فوق نسبت تشابه بین اضلاع 2 می باشد؛ یعنی اضلاع مضلع ABCD دو برابر اضلاع مضلع A'B'C'D' می باشد. $ABCD \sim A'B'C'D'$
سؤال: اضلاع مضلع A'B'C'D' چند برابر اضلاع مضلع ABCD است؟

تمرین

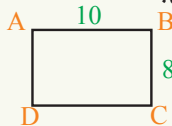
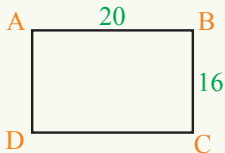
1- نشان دهید که اشکال زیر با هم مشابه اند:



2- هر جوره اشکالی که در کنار هم رسم شده باهم مشابه اند. طول مجهولی که با X نشانی شده است حساب کنید:



3- در شکل زیر نشان دهید که در دو مستطیل مشابه، نسبت طول و عرض مستطیل اول مساوی به نسبت طول و عرض مستطیل دوم می باشد.



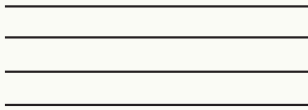
4- آیا تمام اشکال انطباق پذیر با هم مشابه اند؟ در این صورت، ضریب تشابه چند است؟ با یک مثال نشان دهید:

خطوط موازی



فاصله میان خطوط ریل با هم چه رابطه دارند؟

فعالیت

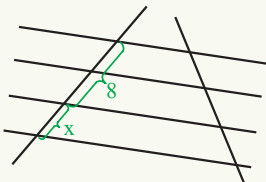


- چهار خط موازی مقابل را در نظر بگیرید.
 - خط عمودی بر این چهار قطعه خط رسم کنید.
 - قطعه خط‌هایی را که بین خطوط موازی توسط خط قاطع ایجاد شده است اندازه بگیرید.
 - یک خط دیگر رسم کنید که این چهار خط موازی را قطع کند.
 - قطعه خط‌هایی را که توسط این قاطع و خطوط موازی به دست آمده اند اندازه بگیرید و بگویید که باهم چه رابطه دارند؟
 - یک قاطع کیفی دیگر رسم کنید و فعالیت بالا را انجام دهید.
- از فعالیت فوق می‌توان تعریف زیر را بیان کرد:

تعریف

اگر چند خط موازی که فاصله‌ها بین شان مساوی باشند توسط یک خط مستقیم قاطع، قطع گردند، خطوط موازی بر روی خط قاطع قطعات مساوی را جدا می‌کنند.

مثال: در شکل زیر خطوط موازی به فاصله‌های مساوی داده شده، فاصله x را به دست آورید.



حل: چون مجموع دو قطعه خط ایجاد شده بین خطوط موازی توسط قاطع دو برابر (8 واحد) است؛ پس طول هر قطعه چهار واحد می‌شود. چون x مساوی به هر یک از این قطعات است؛ پس: $x = 4$ می‌باشد

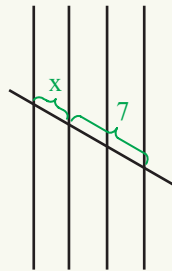
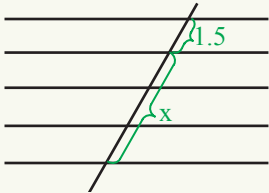
فعالیت

- 1- قطعه خط کیفی AB را رسم کنید.
- 2- در نقطه A یک خط مستقیم کیفی AX را طوری رسم کنید که با خط AB زاویه حاده بسازد.
- 3- روی نیم خط AX از نقطه A شروع کرده و 5 واحد مساوی پی هم جدا کنید. این نقاط را M, N, P, Q و C بنامید.
- 4- نقطه C را به B وصل کنید.
- 5- حال از نقاط M, N, P, Q خطوط موازی با خط مستقیم BC رسم کنید:
- 6- پنج قطعه خطوط ایجاد شده باهم چه رابطه دارند؟

از خاصیت خطوط موازی با فاصله‌های مساوی برای تقسیم یک قطعه خط به قسمت‌های مساوی می‌توان استفاده کرد.

تمرین

- 1- در هر یک از شکل‌های زیر خطوط موازی به فاصله‌های مساوی داده شده‌اند، قیمت x را به دست آورید.



- 2- دو قطعه خط رسم کنید؛ سپس یکی از آن‌ها را به سه قسمت و دیگری را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید.
- 3- قطعه خطی را به طول 12cm رسم نموده و سپس آن را به 8 قسمت مساوی تقسیم کنید.

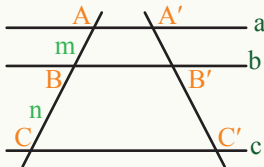


قضیه تالس (Thales)

تعمیری را که در شکل می بینید چند طبقه دارد؟
آیا فاصله های طبقه ها با هم مساوی اند؟

فعالیت

- سه خط موازی a ، b و c را طوری رسم کنید که هم فاصله نباشند.
- دو قاطع را (یک دیگر خود را قطع نکند) رسم کنید که خطوط موازی را به ترتیب در نقاط A ، B ، C و A' ، B' ، C' قطع کنند.
- نسبت های زیر را دریافت کنید:



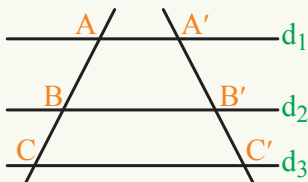
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = ?$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = ?$$

- قاطع کیفی دیگری را رسم نموده و نسبت قطعه خط های ایجاد شده را دریافت کنید.

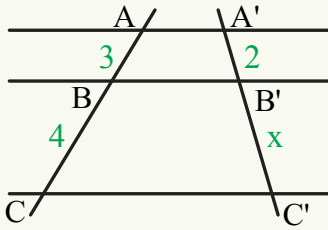
تالس ریاضی دان یونانی (548 - 624 قبل از میلاد) نتیجه فعالیت فوق را به شکل زیر بیان کرد:

قضیه تالس: هرگاه دو یا چندین قطعه خط موازی توسط دو خط قاطع قطع گردند، بر روی آن ها قطعات متناسب جدا می کنند.



طبق شکل زیر d_1 ، d_2 و d_3 سه خط مستقیم موازی اند.

$$\text{پس: } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$



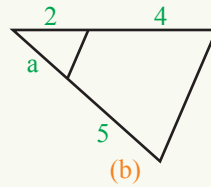
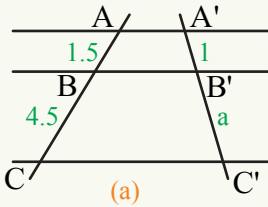
مثال: در شکل مقابل قیمت x را حساب کنید:
حل:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2}{x}$$

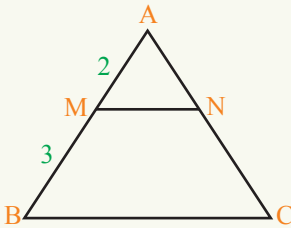
$$x = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

تمرین

1- در هر یک از اشکال زیر قیمت a را دریافت کنید.



2- شکل مقابل را در نظر گرفته نسبت‌های زیر را بنویسید.



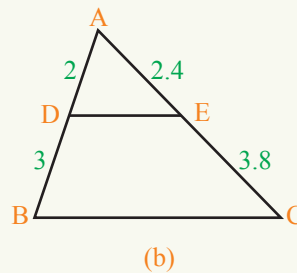
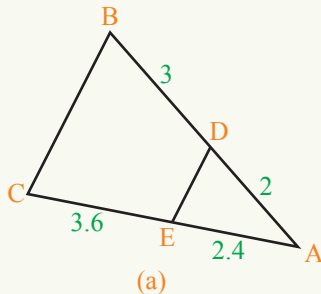
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = ?$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = ?$$

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = ?$$

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = ?$$

3- در کدام شکل زیر \overline{DE} موازی با \overline{BC} است؟





قضیه تالس در مثلث

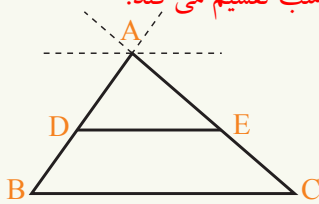
آیا می‌توانید خطوط موازی را در مثلث ببینید؟

فعالیت

- یک مثلث کیفی رسم نموده یک نقطه را روی یکی از اضلاع آن در نظر بگیرید.
- از این نقطه خطی موازی با یک ضلع مثلث رسم نمایید که ضلع دیگر مثلث را قطع کند، مثلث ایجاد شده را نامگذاری کنید.
- نسبت هر ضلع مثلث ایجاد شده را بر اضلاع متناسب مثلث اولیه بنویسید. این نسبت‌ها چه رابطه با هم دارند؟

با انجام فعالیت بالا قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه 1: هرگاه از یک نقطه یک ضلع مثلث یک خط طوری رسم شود که با یک ضلع مثلث موازی باشد پس دو ضلع دیگر مثلث را به گونه متناسب تقسیم می‌کند.



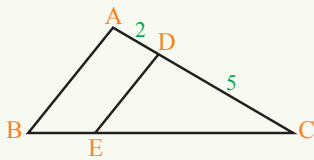
$$\overline{DE} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

قضیه 2: اگر در مثلث ABC شکل فوق نقطه D بالای ضلع AB و نقطه E بالای ضلع AC

طوری واقع باشد که $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ وجود داشته باشد پس در نتیجه $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ است.

این رابطه را به عنوان معکوس قضیه تالس می‌شناسیم.

مثال 1: در شکل زیر $AB \parallel DE$ و $\frac{CD}{DA} = \frac{5}{2}$ است. نسبت $\frac{CE}{EB}$ مساوی به چند است؟

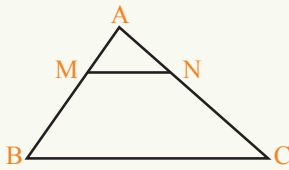


حل: چون $AB \parallel DE$ است.

تناسب بین اضلاع وجود دارد، و نظر به قضیه تالس

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA} = \frac{5}{2} \quad \text{پس}$$

مثال 2: در مثلث ABC روی ضلع AB و AC دو نقطه M و N را طوری انتخاب کنید



که $AN = \frac{1}{3}AC$ ، $AM = \frac{1}{3}AB$ باشد.

آیا MN با BC موازی شده می تواند؟

حل: از روابط فوق می توان نوشت: $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$ ، $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$

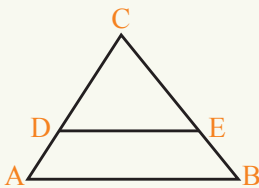
از مقایسه روابط بالا داریم:

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

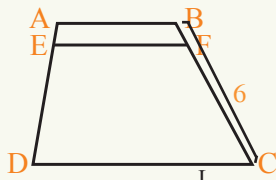
چون تناسب بین اضلاع وجود دارد نظر به معکوس قضیه تالس می توان نوشت:

$$MN \parallel BC$$

تمرین



1- در شکل مقابل $DE \parallel AB$ و $AC = 12\text{cm}$ ، $BC = 15\text{cm}$ و $EB = 5\text{cm}$ است طول های DC، AD و EC را معلوم کنید.



2- در ذوزنقه ABCD، $EF \parallel CD$ و $AE = \frac{1}{7}ED$ ، $BC = 6$ است. BF و FC را دریابید.



3- قریه L در یک سوی رودخانه و پایه های انتقال برق در سوی دیگر رودخانه واقع است. با در نظر داشت فاصله های داده شده در شکل، طول سیم مورد ضرورت را برای برق رسانی به قریه، یعنی طول JL را محاسبه کنید.

حالت‌های تشابه مثلث‌ها حالت اول



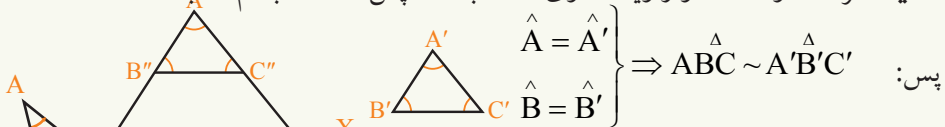
آیا می‌توانید با داشتن طول سایه احمد و درخت، ارتفاع درخت را دریافت کنید؟

فعالیت

- مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ را قسمی رسم کنید که $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ باشند.
- B'' را روی ضلع AB طوری انتخاب کنید که $\overline{A'B''} = \overline{AB''}$ باشد.
- با ترسیم یک خط از نقطه B'' زاویه را ترسیم کنید که با B' مساوی باشد و ضلع AC را در نقطه C'' قطع کند. آیا BC موازی با این خط است؟ چرا؟
- مثلث‌های $A'B'C'$ و $AB''C''$ چه رابطه با هم دارند؟
- در مثلث ABC ، $B''C'' \parallel BC$ است. رابطه تالس را بنویسید.
- آیا نتیجه گرفته می‌توانید که $\triangle AB''C'' \sim \triangle ABC$ ؟

در فعالیت فوق دیدیم که $\triangle ABC$ و $\triangle AB''C''$ بایکدیگر مشابه بوده و چون $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$ پس: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ است.

قضیه: هر گاه دو مثلث دو زاویه مساوی داشته باشند؛ پس مثلث‌ها باهم مشابه‌اند.



مثال: آیا مثلث‌های زیر باهم مشابه هستند؟

حل: از شکل دیده می‌شود که:

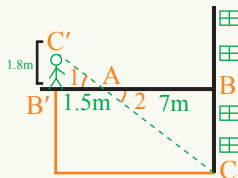
$$\hat{A} = 47^\circ, \hat{X} = 45^\circ, \hat{C} = \hat{Y} = 105^\circ, \hat{B} = 28^\circ$$

و $\hat{Z} = 30^\circ$ دیده می‌شود که زوایای دو مثلث یک به یک با هم مساوی نیستند بنابراین $\triangle ABC$ و $\triangle XYZ$ با هم مشابه نیستند.

مثال: دو قسمت مختلف یک شفاخانه به وسیله یک پل هوایی با هم ارتباط داده شده‌اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل زیر در یک انتهای آن ایستاده و شعاع دید خود را بر رأس زاویه بین خط دید و ساختمان قرار داد.

چرا دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$ با هم مشابه‌اند؟

با توجه به اندازه‌های مشخص شده در شکل، اگر طول قد محسن $1.8m$ باشد ارتفاع پل یعنی BC را به دست آورید.



حل: در شکل دیده می‌شود که: $\hat{B} = \hat{B}' = 90^\circ$

قرار مقابل به رأس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$\hat{C} = \hat{C}'$

پس:

نظر به حالت اول تشابه $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

چون مثلث‌ها متشابه‌اند؛ پس تناسب بین اضلاع آن‌ها وجود دارد.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$

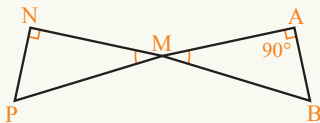
$$\frac{\overline{BC}}{1.8m} = \frac{7m}{1.5m}, \quad \overline{BC} = \frac{7m \cdot 1.8m}{1.5m} = \frac{7 \cdot 18m^2}{15m}$$

$$\overline{BC} = \frac{42}{5} m$$

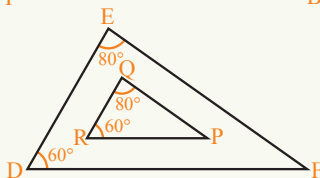
$$\overline{BC} = 8.4m$$

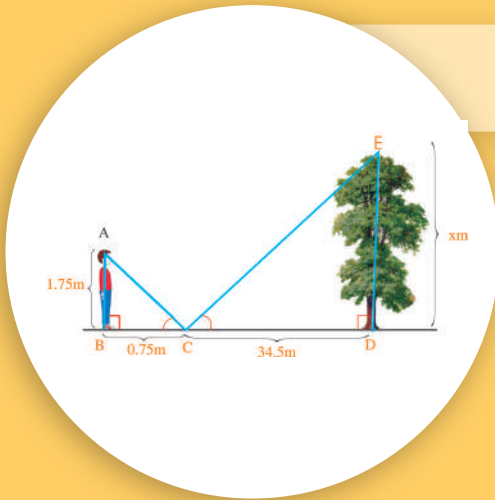
تمرین

1- در شکل مقابل ثابت کنید که: $\triangle NMP \sim \triangle MAB$



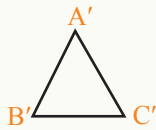
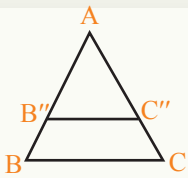
2- در شکل مقابل نشان دهید که: $\triangle RQP \sim \triangle DEF$





چگونه می توان ارتفاع درخت را محاسبه کرد؟

فعالیت



در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A} = \hat{A}'$ و

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

را در نظر بگیرید.

• نقطه B'' را روی ضلع AB طوری انتخاب

کنید که $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ شود.

• از نقطه B'' خطی موازی به ضلع BC رسم کنید و نقطه تقاطع آن را C'' بنامید.

• رابطه تالس را در $\triangle ABC$ بنویسید.

• در تناسب $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ قیمت‌های مساوی $A'B'$ و $A'C'$ را وضع نمایید.

• از تناسب $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ و $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}$ چه رابطه به دست آورده می‌توانید؟

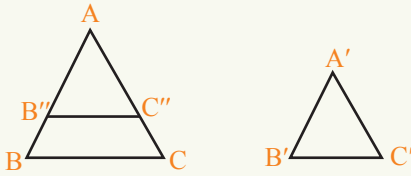
• آیا دو مثلث $A'B'C'$ و $AB''C''$ با هم انطباق پذیر اند؟ چرا؟

• دو مثلث ABC و $AB''C''$ با هم چه رابطه دارند. چرا؟

• آیا می‌توان تشابه ABC و $A'B'C'$ را نتیجه گرفت؟

در فعالیت فوق دیدیم که: $A'B'C' \cong AB''C''$ و $AB''C'' \sim \triangle ABC$ است؛ پس می‌توان

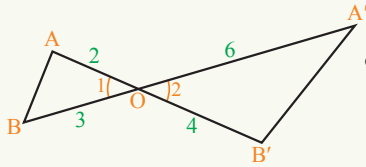
نتیجه گرفت که $ABC \sim A'B'C'$ است.



قضیه: اگر دو ضلع یک مثلث با دو ضلع مثلث دیگر متناسب و زاویهٔ ما بین این دو ضلع با هم انطباق پذیر باشند مثلث‌ها باهم مشابه اند.

اگر $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ و $\hat{A} = \hat{A}'$ باشند.

پس: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



مثال: آیا مثلث‌های $\triangle OAB$ و $\triangle OA'B'$ مشابه اند؟

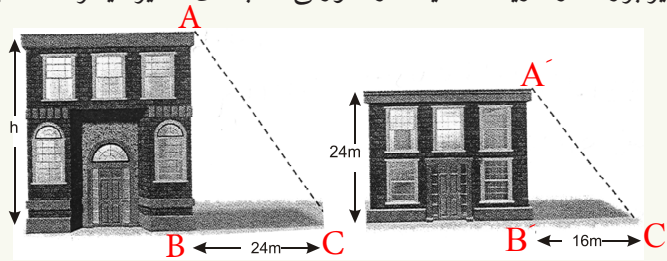
حل: در دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OA'B'$ داریم:

قرار متقابل به رأس: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{1}{2}$$

در دو مثلث نسبت اضلاع متناسب و زاویهٔ بین آن‌ها مساوی است در نتیجه $\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$

مثال: طول سایهٔ یک تعمیر 16m است، در حالی که سایهٔ تعمیر بلندتر از آن 24m است بلندی تعمیر بزرگ را دریافت کنید، در صورتی که بلندی تعمیر دیگر 24m باشد.



حل: نسبت بین اضلاع مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$

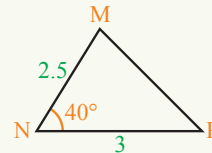
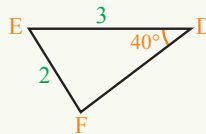
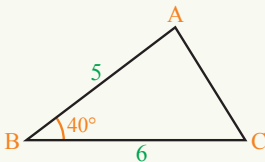
می‌توان نوشت:

$$\frac{h}{24m} = \frac{24m}{16m}$$

$$h = \frac{24m \times 24m}{16m} = 36m$$

تمرین

در اشکال زیر کدام دو مثلث با هم مشابه اند؟





اگر طول انگشت مقابل 5cm باشد
تصویر آن چه طولی دارد؟

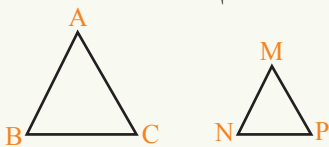
فعالیت

- مثلث ABC را طوری رسم کنید که $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 9$, و $\overline{BC} = 12$ باشد، سپس زوایای آن را اندازه کنید.
- مثلث MNP را طوری رسم کنید که: $\overline{MN} = 2$, $\overline{MP} = 3$, $\overline{NP} = 4$ واحد طول بوده؛ سپس زوایای آن را اندازه کنید.
- با در نظر داشت قیمت‌های فوق جدول زیر را تکمیل نمایید:

مثلث	اضلاع	زوایا
$\triangle ABC$	$\overline{BC} = 12, \overline{AC} = 9$ و $\overline{AB} = 6$	$\hat{A} = ?$, $\hat{B} = ?$, $\hat{C} = ?$
$\triangle MNP$	$\overline{NP} = 4$, $\overline{MP} = 3$, $\overline{MN} = 2$	$\hat{M} = ?$, $\hat{N} = ?$, $\hat{P} = ?$
نسبت بین اضلاع	$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = ?$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{NP}} = ?$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{MP}} = ?$	

در فعالیت فوق دیدیم که نسبت بین اضلاع مثلث‌ها وجود دارد و هم زوایای دو مثلث با هم

مساوی اند، بنا بر آن مثلث $\triangle ABC \sim \triangle MNP$



قضیه: اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث مشابه‌اند.

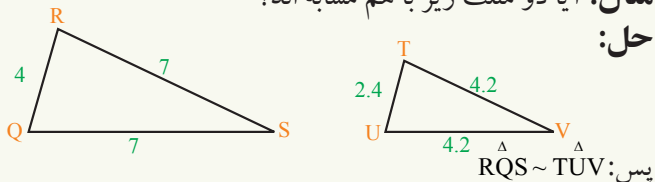
$$\frac{\overline{QR}}{\overline{UT}} = \frac{4}{2.4} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{TV}} = \frac{7}{4.2} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{UV}} = \frac{7}{4.2} = \frac{5}{3}$$

مثال: آیا دو مثلث زیر با هم مشابه اند؟

حل:



مثال: ارتفاع برج \overline{AB} را به کمک طول سایه آن \overline{AC} تعیین کنید.

حل: برای این منظور میله‌ی را عمود بر سطح زمین در جایی قرار می‌دهیم که انجام بالایی آن

یعنی نقطه N با نقاط B و C روی یک خط مستقیم قرار گیرد چون $\triangle ABC \sim \triangle CMN$ است.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

پس:

در رابطه بالا طول قطعه خط‌های MN ، MC و AC معلوم اند؛ پس به کمک رابطه بالا طول

AB را که ارتفاع برج است می‌توان طور زیر حساب کرد:

در مثلث‌های مشابه $CAB \sim CMN$ داریم:

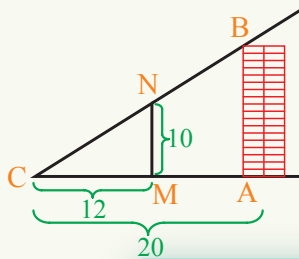
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{10} = \frac{20}{12}$$

$$12\overline{AB} = 20 \cdot 10$$

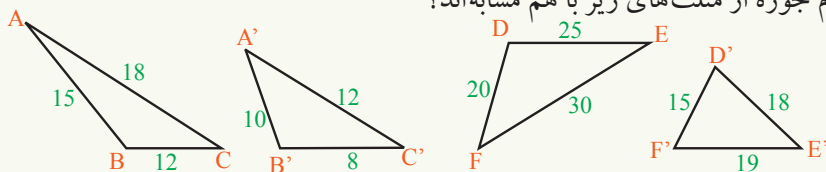
$$\overline{AB} = \frac{200}{12}$$

$$\overline{AB} = 16.6$$

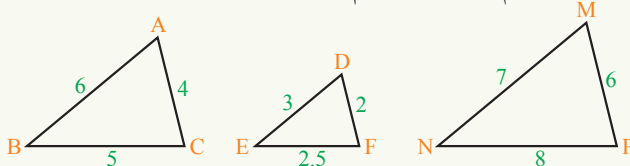


تمرین

1- کدام جوره از مثلث‌های زیر با هم مشابه‌اند؟



2- نشان دهید که در اشکال زیر کدام دو مثلث با هم متشابه‌اند؟



نکات مهم فصل سوم

- 1- اشکال متشابه عبارت از اشکالی اند که هم شکل بوده؛ اما ضروری نیست که اندازه‌های شان باهم مساوی باشند.
- 2- مضلعات وقتی با هم متشابه اند که دارای خواص زیر باشند:
 - (a) تمام زوایای مضلعات مشابه باید یک به یک با هم انطباق پذیر باشند.
 - (b) اضلاع مقابل زاویه‌های مساوی با هم متناسب باشند.
- 3- هرگاه خطوط موازی به فاصله‌های مساوی و خط قاطع بالای آن‌ها را در نظر بگیریم در این صورت یک قطعه خط، را به قطعات مساوی تقسیم کرده می‌توانیم.
- 4- با استفاده از خطوط موازی با فاصله مساوی، یک قطعه خط را به قطعات مساوی تقسیم کرده می‌توانیم.
- 5- اگر فاصله بین چند خط موازی مساوی باشند و توسط یک خط مستقیم قاطع قطع گردند روی خط قاطع قطعات مساوی را جدا می‌کنند.
- 6- هرگاه یک خط موازی به یک ضلع مثلث رسم شود دو ضلع دیگر مثلث را به گونه متناسب تقسیم می‌کند.
- 7- هرگاه یک خط از یک نقطه روی یکی از اضلاع مثلث به ضلع دیگر مثلث موازی رسم شود ضلع را به گونه متناسب تقسیم می‌کند.
- 8- دو مثلث را وقتی متشابه می‌گوییم که تمام زوایای آن‌ها یک به یک انطباق پذیر و اضلاع شان باهم متناسب باشند، یعنی اگر یکی از دو خواص آن در مثلث‌ها صدق کند مثلث‌ها متشابه اند.
- 9- مثلث‌ها در سه حالت باهم مشابه اند:
 - (a) **حالت اول:** هرگاه دو زاویه یک مثلث با دو زاویه مثلث دیگر مساوی باشند.
 - (b) **حالت دوم:** هرگاه دو ضلع یک مثلث با دو ضلع مثلث دیگر متناسب و زاویه مابین شان مساوی باشند.
 - (c) **حالت سوم:** هرگاه سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند.

تمرین عمومی

• سؤال‌های زیر را به دقت مطالعه کنید. برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب درست را انتخاب نموده و دور آن را حلقه کنید.

1- یک مثلث متساوی الاضلاع مشابه است با:

(a) مثلث مختلف الاضلاع (b) مثلث متساوی الاضلاع

(c) مثلث متساوی الساقین (d) هیچکدام

2- تمام چهار ضلعی‌های متساوی الزوایا باهم:

(a) مشابه اند (b) انطباق پذیراند (c) متوازی الاضلاع اند (d) هیچکدام

3- مثلث‌های ABC و DEF باهم مشابه‌اند. هرگاه $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ بوده و $\overline{AC} = 12\text{cm}$

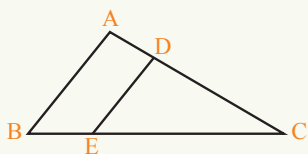
، $\overline{AB} = 9\text{cm}$ و $\overline{DE} = 3\text{cm}$ باشد، در این صورت طول \overline{DF} عبارت است از:

(a) 3cm (b) 4cm

(c) 6cm (d) 7cm

4- در شکل زیر $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ و $\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{5}{2}$ است نسبت $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$ عبارت است از:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$



5- یک مثلث ABC که اندازه ضلع‌های آن‌ها 8، 12 و 16 سانتی متر باشند با کدام یک از مثلث‌هایی زیر که اندازه ضلع‌های آن‌ها داده شده‌اند متشابه‌اند؟

(a) مثلثی که ضلع‌های آن 6، 9 و 12 سانتی متر باشد.

(b) مثلثی که ضلع‌های آن 8، 12 و 6 سانتی متر باشد.

(c) مثلثی که ضلع‌های آن 8، 9 و 12 سانتی متر باشد.

(d) مثلثی که ضلع‌های آن 16، 10 و 12 سانتی متر باشد.

• جملات زیر را به دقت خوانده در مقابل جمله صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله غلط حرف (غ) بنویسید.

1- () دو مثلث قائم‌الزاویه در صورتی با هم مشابه‌اند که طول وترهای شان مساوی باشند.

2- () تمام مستطیل‌ها باهم مشابه‌اند.

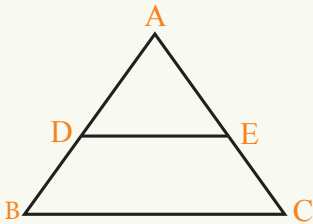
3- () اگر دو ضلع و زاویه مابین یک مثلث با دو ضلع و زاویه مابین مثلث دیگر

انطباق پذیر باشند. مثلث‌های مذکور باهم مشابه‌اند.

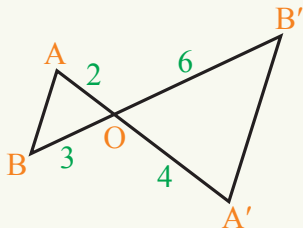
- 4- () اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، مثلث‌های مذکور مشابه اند.
- 5- () تمام مثلث‌های مشابه انطباق پذیر اند.
- 6- () تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه با هم مشابه اند.
- 7- () هرگاه یک خط به یک ضلع مثلث موازی باشد با دو ضلع دیگر آن نیز مساوی است.

- جملات زیر را به دقت خوانده جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.
- 1- اگر یک خط دو ضلع یک مثلث را متناسب تقسیم نماید به ضلع سوم آن است.
- 2- هرگاه خطوط موازی هم فاصله، قاطع‌ها را قطع کنند، بر روی آن‌ها جدا می‌کنند.
- 3- دو مثلث وقتی با هم مشابه اند که یک مثلث با دیگر انطباق پذیر باشد.
- 4- مضلع‌ات مشابه دارای اضلاع و زوایای می‌باشند.

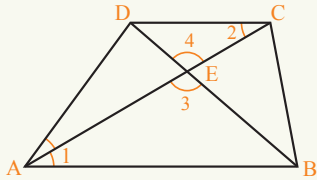
- سؤال‌های زیر را حل کنید.
- 1- در شکل زیر نقطه D وسط AB است. نسبت $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ را دریافت کنید.



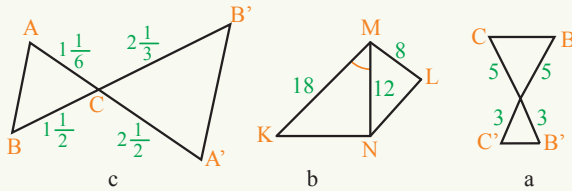
- 2- چرا دو مثلث OAB و $O'A'B'$ مشابه اند؟ تناسب بین اضلاع آن‌ها را نوشته و زاویه‌های مساوی را مشخص کنید.



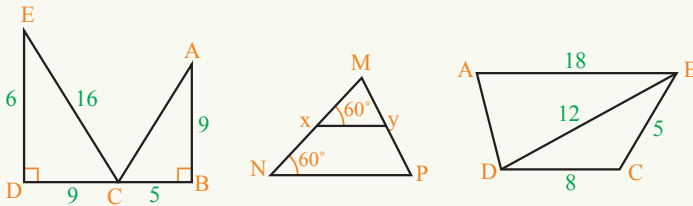
3- در ذوزنقه زیر ثبوت کنید که $\triangle ABE$ با $\triangle ECD$ مشابه اند.



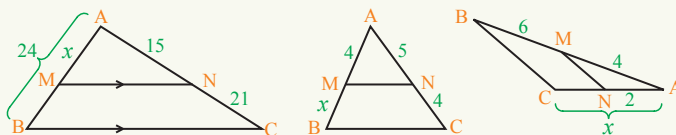
4- در هر شکل، مثلث‌ها را بررسی و تعیین کنید که کدام دو جوره مثلث‌ها و طبق کدام حالت تشابه باهم مشابه اند؟



5- به مثلث‌های زیر فکر کرده و بگویید کدام دو جوره آن‌ها با هم مشابه اند؟



6- در اشکال زیر $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ است. با استفاده از قضیه تالس x را دریافت کنید.



فصل چہارم

تناظر



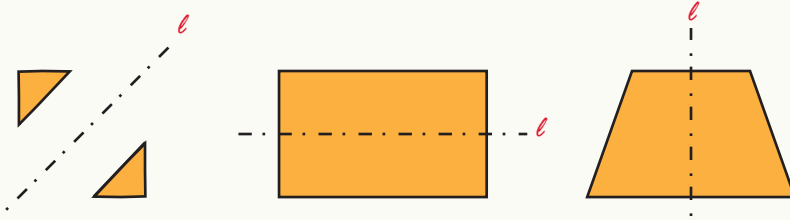




آیا تا به حال فکر کرده‌اید که اشکال
متناظر چقدر در اطراف ما و در
طبیعت وجود دارند؟

فعالیت

به شکل‌های زیر توجه کنید:

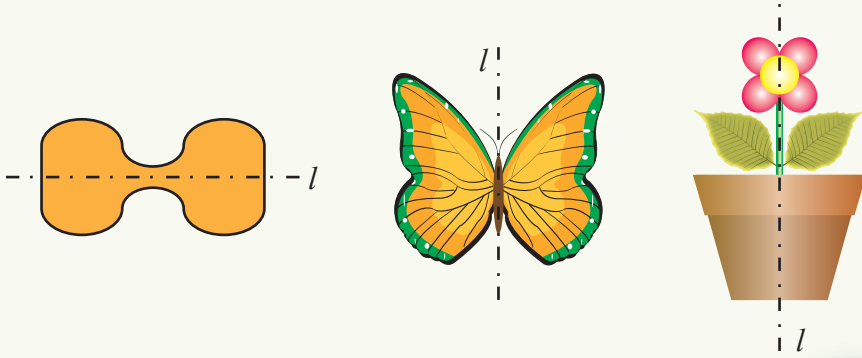


- اگر شکل‌های فوق را در امتداد خط‌ها تقسیم کنیم چه مشاهده می‌شود؟
- آیا می‌توان گفت که دو قسمت شکل که در دو طرف خط قرار می‌گیرند انطباق پذیر هستند؟
- آیا می‌توان روی شکل‌های فوق خط دیگری رسم کرد که اگر روی آن، شکل را تقسیم کنیم یکی بالای دیگری منطبق شود؟

از فعالیت فوق مشاهده شده که بعضی از شکل‌ها دارای این خاصیت هستند که اگر آن‌ها را در امتداد یک خط مستقیم تقسیم کنیم دو قسمت شکل باهمدیگر منطبق می‌شوند. در این حالت می‌گوییم شکل نسبت به خط، متناظر است.
اگر با تقسیم کردن یک شکل به امتداد یک خط، دو قسمت آن شکل بر همدیگر منطبق شوند آن شکل را نسبت به خط مستقیم متناظر گویند و خطی که روی آن، شکل تقسیم شده است،

محور تناظر نامیده می شود.

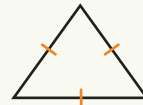
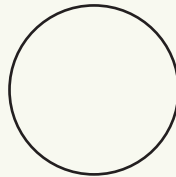
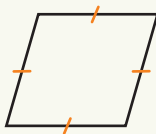
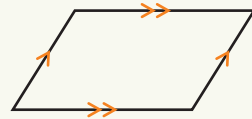
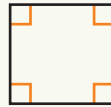
مثال: شکل های زیر نسبت به خط l (محور تناظر) متناظر هستند:



تمرین

محور تناظر هر یک از شکل های زیر را در صورت موجودیت رسم کنید و بگویید که هر کدام از این شکل ها چند محور تناظر دارند و نیز جدول زیر را تکمیل کنید.

شکل	مستطیل	مربع	متوازی الاضلاع	لوزی	دایره	مثلث های متساوی الاضلاع
تعداد محور های تناظر						

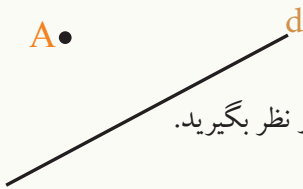


تناظر محوری



بسیاری از موجودات در طبیعت متناظر هستند، آیا می‌توانید نمونه‌های از اشکال متناظر را در طبیعت نام ببرید؟

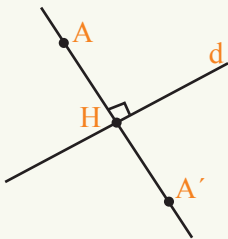
فعالیت



خط مستقیم d و نقطه A را خارج آن مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.

- از نقطه A خط عمودی بالای خط d رسم کنید.
- نقطه تقاطع آن را H نام گذاری کنید.
- AH را به اندازه خودش امتداد دهید. تا نقطه A' به دست آید.
- آیا $AH = A'H$ است. چرا؟
- آیا $A'H \perp d$ است. چرا؟
- آیا می‌توان نتیجه گرفت که d ناصف عمودی AA' است؟

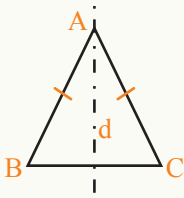
تعریف



نقطه A' را متناظر نقطه A نسبت به خط d می‌نامیم؛ اگر خط d ناصف عمودی قطعه خط واصل بین A و A' باشد؛ مانند شکل مقابل.

تناظر محوری هر شکل هندسی، شکلی است که هر نقطه آن نظر به یک نقطه شکل اولی متناظر می‌باشد.

فعالیت



در مثلث متساوی الساقین ABC خط d ناصف عمودی قاعده BC است.

• اگر مثلث را روی خط d قات کنیم آیا دو قسمت مثلث بر همدیگر منطبق می‌شوند؟

• یک نقطه مانند P روی ضلع \overline{AB} انتخاب کنید.

• از نقطه P بالای خط d عمود رسم کنید و انجام آن را H نام گذاری کنید. آن را امتداد دهید تا AC را در P' قطع کند.

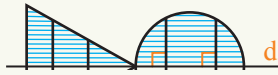
• آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{PH} = \overline{P'H}$ است؟ چرا؟

• آیا می‌توان نتیجه گرفت که خط d ناصف عمودی PP' است؟ چرا؟

• نقطه مانند Q را روی ضلع AC انتخاب کنید. و مراحل فوق را تکرار کنید.

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که متناظر هر نقطه AB نظر به محور تناظر d بالای ضلع AC قرار دارد.

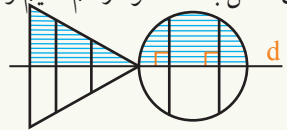
اگر یک شکل نسبت به یک خط متناظر باشد، محور تناظر آن شکل، ناصف عمودی قطعه خط‌های واصل نقاط متناظر روی شکل است.



مثال: متناظر شکل داده شده را نسبت به خط d به دست آورید.

حل: با در نظر داشت این که محور تناظر ناصف عمودی قطعه

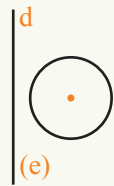
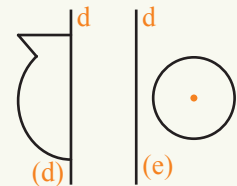
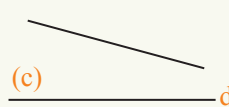
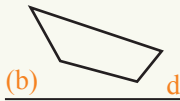
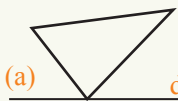
خط‌های واصل بین نقاط متناظر است؛ پس کافی است از هر نقطه روی شکل به d عمود رسم کنیم و به اندازه خودش امتداد دهیم.



از وصل کردن نقاط به دست آمده متناظر، شکل به دست می‌آید.

تمرین

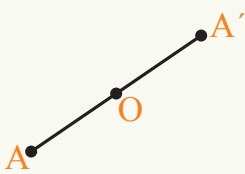
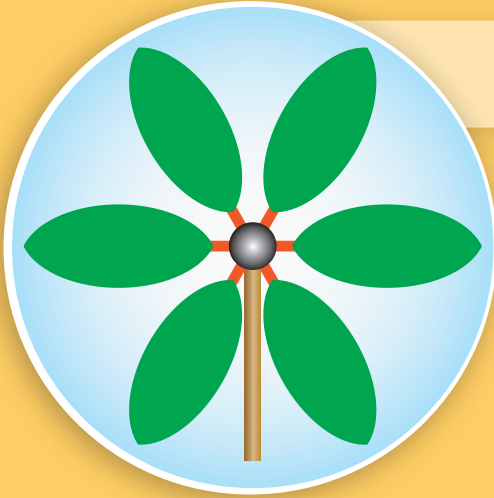
1- متناظر هر شکل را نسبت به خط d رسم کنید.



2- نشان دهید متناظر محوری یک زاویه بی‌زاویه است مساوی و مختلف‌الجهد با زاویه اولی.

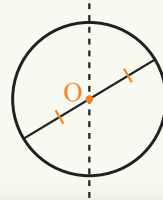
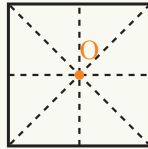
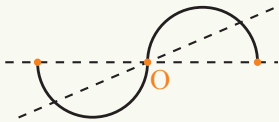
تناظر مرکزی

آیا تناظر در چرخک را مشاهده می‌نمایید؟

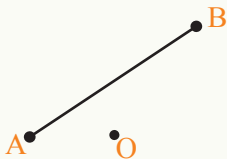


نقطه A' را متناظر نقطه A نسبت به نقطه O می‌نامیم، اگر نقطه O وسط قطعه خط AA' باشد. در این حالت نقطه O را مرکز تناظر نامیده و می‌گوییم نقاط A و A' نسبت به نقطه O متناظر اند.

همچنین اگر S یک ست نقاط و O یک نقطه باشد و هم متناظر هر نقطه S نظر به O روی S باشد، می‌گوییم S نظر به نقطه O متناظر است، در این حالت O مرکز تناظر S است و S تناظر مرکزی دارد.
مثال: شکل‌های زیر نسبت به نقطه O متناظر هستند:



فعالیت

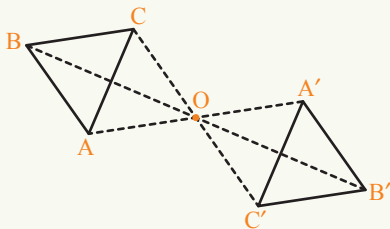


- قطعه خط AB و نقطه O را مطابق شکل در نظر بگیرید.
- نقطه A را به O وصل کنید و به اندازه خودش امتداد دهید. انجام آن را A' بنامید.
- آیا نقطه A' متناظر نقطه A نسبت به نقطه O است؟
- نقطه B را به نقطه O وصل کنید و به اندازه خودش امتداد دهید. انجام آن را B' بنامید.
- آیا نقطه B' متناظر نقطه B نسبت به نقطه O است؟

- نقاط A' و B' را توسط خط کش با هم وصل کنید.
- نقطه دلخواه P را روی قطعه خط AB انتخاب کنید.
- نقطه P را به نقطه O وصل نموده به اندازه خودش امتداد دهید. انجام آن را P' نام گذاری کنید.
- آیا نقطه P' روی قطعه خط $A'B'$ قرار می گیرد؟
- آیا قطعه خط $A'B'$ متناظر قطعه خط AB نسبت به نقطه O است؟

برای دریافت متناظر یک شکل نسبت به یک نقطه O کافی است هر نقطه شکل را به نقطه O وصل نموده و به اندازه خودش امتداد دهیم.

از وصل کردن نقاط حاصله باهم متناظر شکل نظر به نقطه O به دست می آید.

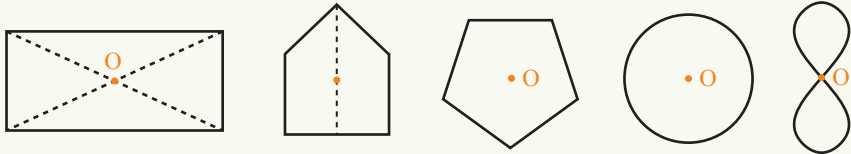


مثال: در شکل مقابل مثلث $A'B'C'$ متناظر مثلث ABC نظر به نقطه O است.

سؤال: متناظر زاویه ABC را نظر به نقطه O به دست آورید؟

تمرین

1- در کدام یک از شکل های زیر نقطه O مرکز تناظر است؟



2- متناظر شکل های زیر را نسبت به نقطه O رسم کنید:



• مفهوم تناظر و محور تناظر

اگر با قات کردن یک شکل در امتداد یک خط دو قسمت شکل با همدیگر منطبق شوند آن شکل را نسبت به خط مستقیم متناظر گویند و آن خطی که روی آن شکل قات شده است محور تناظر شکل نامیده می‌شود.

• تناظر محوری

نقطه A' را متناظر نقطه A نسبت به خط مستقیم d می‌نامیم؛ اگر خط مستقیم d ناصف عمودی قطعه خط واصل بین نقاط A و A' باشد.

• اگر نقطه A روی خط d باشد، متناظر آن نسبت به خط d خود آن نقطه است.

• اگر شکلی نسبت به یک خط متناظر باشد، محور تناظر آن شکل ناصف عمودی قطعه خط‌های واصل بین نقاط متناظر روی شکل است.

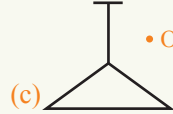
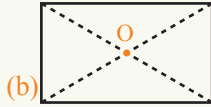
• تناظر مرکزی

اگر S یک مجموعه نقاط و O یک نقطه باشد، اگر متناظر هر نقطه S نظر به نقطه O باز هم روی S باشد، می‌گوییم مجموعه نقاط S نظر به نقطه O متناظر است، در این حالت نقطه O مرکز تناظر S است و S تناظر مرکزی دارد.

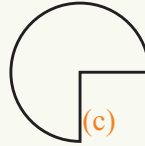
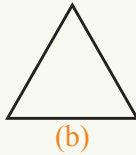
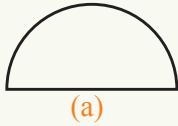
تمرین عمومی

سؤال‌های زیر را حل کنید:

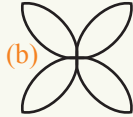
1- متناظر هر شکل را نظر به نقطه O رسم کنید.



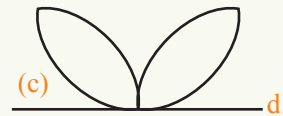
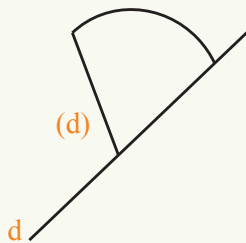
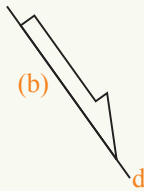
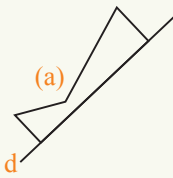
2- محور تناظر هر شکل را رسم کنید:



3- شکل‌هایی را که مرکز تناظر دارند مشخص کنید، سپس مرکز تناظر را روی هر شکل نشان دهید:



4- متناظر هر شکل را نظر به خط d دریافت کنید:



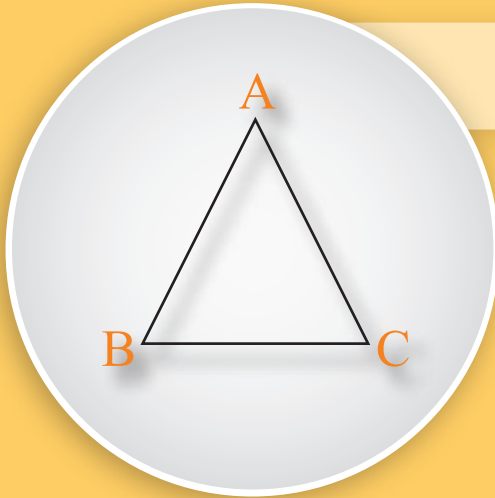
5- با دو شکل نشان دهید که اگر شکلی دو محور تناظر داشته باشد، محل تقاطع آن‌ها مرکز تناظر شکل است.



فصل پنجم
قضایای مثلث



قضایای مثلث متساوی الساقین



اضلاع مثلث ABC را اندازه بگیرید.
این مثلث چه نوع مثلث است؟
چه رابطه‌ی بین اندازه‌ی زاویه‌های این مثلث وجود دارد؟

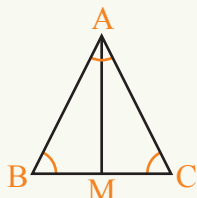
فعالیت

- مثلث ABC را طوری رسم کنید که در آن $\overline{AB} = \overline{AC}$ باشد.
- در مثلث ABC اضلاع مساوی چه نامیده می‌شوند؟
- زاویه‌های مقابل اضلاع مساوی را به کمک نقاله اندازه گیری نموده چه رابطه‌ی بین این دو زاویه می‌بینید.
- مثلث ABC به نام چه یاد می‌شود؟
- یک مثلث متساوی الساقین دیگر رسم کنید. عملیه‌ی فوق را تکرار نموده چه نتیجه می‌گیرید؟

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود که در مثلث‌های متساوی الساقین زاویه‌های مقابل ساق‌ها با هم مساوی‌اند. این مطلب را در قضیه‌ی زیر می‌توان بیان نمود:

قضیه: اگر دو ضلع یک مثلث باهم مساوی باشند، زوایای مقابل آن دو ضلع نیز با هم مساوی‌اند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می‌کنیم $\overline{AB} = \overline{AC}$ است. نقطه‌ی وسط ضلع BC را M نامگذاری نموده میانه‌ی AM را رسم می‌کنیم.
در دو مثلث ABM و ACM داریم:

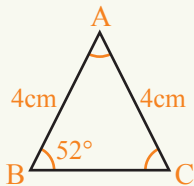


$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \text{ (فرضیه)} \\ \overline{BM} = \overline{CM} \text{ (M نقطه وسطی BC)} \\ \overline{AM} = \overline{AM} \text{ (مشترک)} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}BM = \hat{A}CM$$

با در نظر داشت تساوی سه ضلع، به این نتیجه می‌رسیم که مثلث‌های ABM و ACM انطباق پذیراند؛ بنا براین همه‌ی زوایای آن‌ها نیز یک به یک با هم مساوی می‌باشند.

$$\hat{B} = \hat{C} \text{ در نتیجه}$$

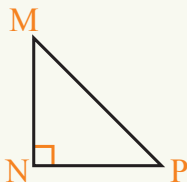
مثال 1: در مثلث ABC اگر $\overline{AB} = \overline{AC} = 4\text{cm}$ و $\hat{B} = 52^\circ$ باشند، زاویه \hat{C} چند درجه است؟



حل: چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ است، در مقابل اضلاع مساوی
 زوایای مساوی قرار دارد، در نتیجه $\hat{B} = \hat{C}$
 پس: $\hat{C} = 52^\circ$

مثال 2: در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین زوایای مقابل دو ساق چند درجه است؟
حل: در مثلث MNP ، زاویه N قائمه است.

چون $\overline{MN} = \overline{NP}$ است. با در نظر داشت قضیه فوق دو زاویه مقابل آنها باهم مساوی اند،
 یعنی: $\hat{M} = \hat{P}$

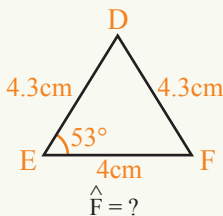
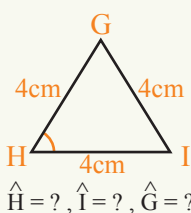


چون مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است و $\hat{N} = 90^\circ$
 در نتیجه:

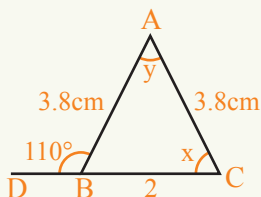
$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} + \hat{P} = 90^\circ \\ \hat{M} = \hat{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = \hat{P} = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$$

تمرین

1- در شکل‌های زیر زوایای نامعلوم را دریافت کنید.



2- در شکل زیر $\hat{A}BC$ متساوی الساقین است اگر $\hat{D}BA = 110^\circ$ باشد زوایای x و y را دریافت کنید.



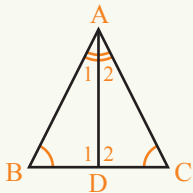
فعالیت

- مثلث ABC را طوری رسم کنید که در آن $\hat{B} = \hat{C}$ باشد.
- طول اضلاع مثلث ABC را با استفاده از خط کش اندازه گیری کنید.
- چه رابطه بین طول اضلاع این مثلث مشاهده می شود؟
- مثلث دیگری با دو زاویه مساوی رسم نموده اعمال فوق را تکرار کنید.

از فعالیت فوق مشاهده می شود، در مثلث هایی که دو زاویه مساوی دارند. اضلاع مقابل زوایای مساوی با هم مساوی اند. این مطلب را به شکل قضیه زیر، بیان می نمایم:

قضیه: اگر دو زاویه یک مثلث باهم مساوی باشند، اضلاع مقابل زوایای مذکور باهم مساوی هستند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می کنیم $\hat{B} = \hat{C}$ است ناصف الزاویه \hat{A} را رسم نموده آن را DA می نامیم.



در دو مثلث ABD و ACD داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 90^\circ \quad \text{(چرا؟)}$$

حال در دو مثلث ABD و ACD داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AD, \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ ناصف الزاویه} \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \text{ زوایای قائمه اند} \\ \overline{AD} = \overline{AD} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

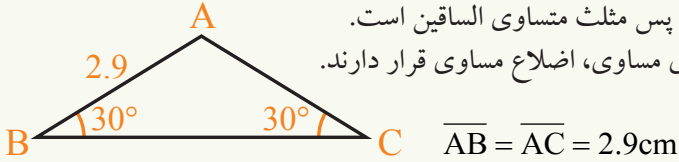
با در نظر داشت تساوی دو زاویه و ضلع بین آن‌ها، مثلث‌های ABD و ACD انطباق پذیراند؛ بنابراین اضلاع مقابل آن‌ها نیز مساوی هستند.

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

مثال: در شکل زیر $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ ، $\overline{AB} = 2.9\text{cm}$ است ضلع AC را معلوم کنید.

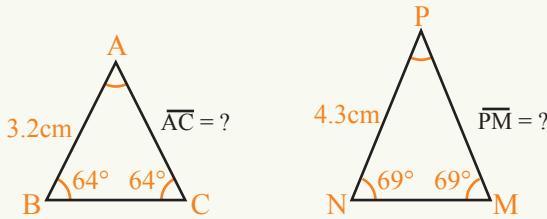
حل:

چون $\hat{B} = \hat{C}$ است، پس مثلث متساوی الساقین است.
در نتیجه، مقابل زوایای مساوی، اضلاع مساوی قرار دارند.
بنابراین:

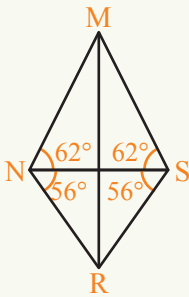


تمرین

1- در شکل های زیر اضلاع نا معلوم را دریافت کنید.



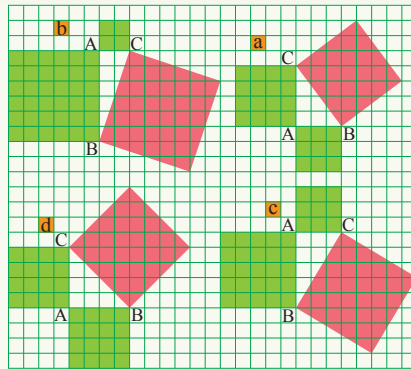
2- با توجه به اندازه زاویه ها در شکل زیر نشان دهید که دو مثلث MNR و MSR انطباق پذیر اند.



قضیه فیثاغورث Pythagorean theorem



فیثاغورث ریاضی‌دان مشهور و فیلسوف یونان باستان بود، که در سال 530 قبل از میلاد می‌زیست.



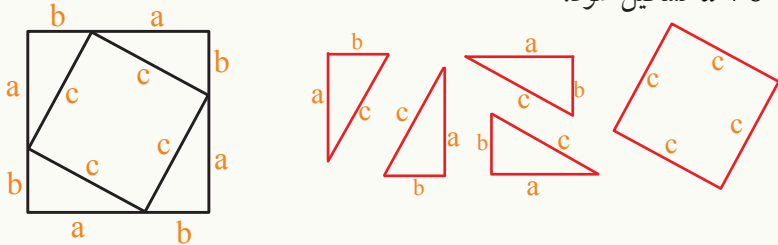
در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود که مثلث‌های ABC در رأس A قائم‌الزاویه‌اند. مساحت مربع‌ها که توسط اضلاع مثلث ABC تشکیل شده‌اند، با شمارش تعداد مربع‌های کوچک اندازه مساحت آن‌ها را تخمین کنید. مانند نمونه که در جدول زیر درج است جزء b ، c و d را تکمیل کنید.

تعداد مربع‌هایی که بالای ضلع AB قرار دارد	تعداد مربع‌هایی که بالای ضلع AC قرار دارد	مجموع مربع‌هایی که در ضلع AB و AC قرار دارد	تعداد مربع‌هایی که روی وتر BC قرار دارد	
9	16	25	25	a
			40	b
			34	c
			32	d

با توجه به اعداد مندرج در جدول چه رابطه بین مساحت مربع‌ها تشکیل شده توسط اضلاع مثلث‌های قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید؟

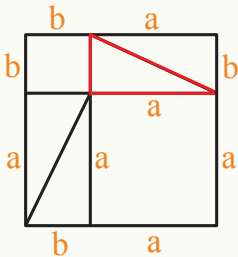
فعالیت

- مثلث قائم الزاویه به طول ضلع‌های a ، b و c مانند شکل مقابل روی کاغذ رسم و آن را قیچی کنید.
- سه مثلث انطباق پذیر با این مثلث از کاغذ تهیه کنید.
- یک مربع به طول وتر c با کاغذ تهیه کنید.
- مطابق شکل زیر چهار مثلث و مربع تهیه شده را طوری کنار هم بگذارید که مربعی به طول ضلع $a + b$ تشکیل شود.



با در نظر داشت شکل، آیا تساوی زیر درست است؟

- مساحت مربع به ضلع c + مساحت 4 مثلث قائم الزاویه انطباق پذیر = مساحت مربع به ضلع $(a + b)$
- به طور مجدد چهار مثلث قائم الزاویه انطباق پذیر به طول اضلاع a و b دو مربع به طول ضلع‌های زاویه قائمه این مثلث‌ها یعنی a و b تهیه کنید.
 - این چهار مثلث و دو مربع را مانند شکل مقابل طوری کنار هم قرار دهید، تا مربع بزرگتر به طول ضلع $(a + b)$ ساخته شود.

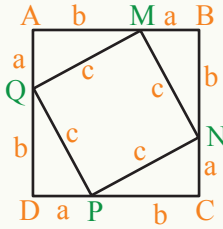


با در نظر داشت شکل بالا آیا تساوی زیر درست است.

- مساحت مربع به ضلع b + مساحت مربع به ضلع a + مساحت 4 مثلث قائم الزاویه انطباق پذیر = مساحت مربع به ضلع $a + b$
- با در نظر داشت تساوی مساحت مربع‌های به طول ضلع $a + b$ قرار شکل فوق، اگر 4 مثلث انطباق پذیر را از دو شکل فوق برداریم، باقی مانده مساحت آن‌ها نیز باید با هم برابر باشند. بنابراین می‌توان گفت: $c^2 = a^2 + b^2$ این رابطه اولین بار توسط فیثاغورث به اثبات رسیده است.
- قضیه:** در هر مثلث قائم الزاویه مساحت مربعی که توسط اندازه وتر ساخته می‌شود برابر

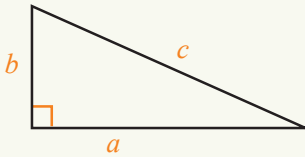
مجموع مساحت‌های دو مربعی است که توسط اندازه اضلاع زاویه قائمه آن مثلث ساخته می‌شود.

فعالیت



- در شکل مقابل مربعی به ضلع $a + b$ داریم:
- آیا چهار ضلعی $MNPQ$ یک مربع است؟ توضیح دهید.
 - مساحت مربع $ABCD$ را یک بار به طور مستقیم با استفاده از طول ضلع آن، یعنی $a + b$ محاسبه کنید.
 - مساحت مربع $ABCD$ را از مجموع مساحت‌های چهار مثلث انطباق پذیر $\triangle AMQ$ ، $\triangle MNB$ ، $\triangle NCP$ ، $\triangle DPQ$ و مربع $MNPQ$ محاسبه کنید.
- از مقایسه رابطه‌های به دست آمده در دو بخش اخیر چه نتیجه می‌گیرید؟

فعالیت فوق به عنوان قضیه فیثاغورث معروف است.



قضیه فیثاغورث:

در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساوی با مجموع مربع‌های اضلاع قائم آن می‌باشد: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\begin{aligned} S_{(ABCD)} &= (a+b)(a+b) \\ &= a(a+b) + b(a+b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \dots\dots\dots 1 \end{aligned}$$

ثبوت: با در نظر داشت شکل بالا می‌توان نوشت:
نظر به خاصیت توزیع پذیری ضرب بالای جمع می‌توان نوشت:

از طرف دیگر چون:

$$\begin{aligned} S_{(ABCD)} &= 4S_{(\triangle AMQ)} + S_{(MNPQ)} \\ &= 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 \dots\dots\dots II \end{aligned}$$

از تساوی روابط I و II نتیجه می‌شود:

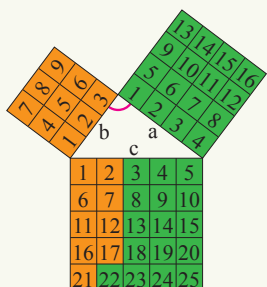
$$a^2 + b^2 + 2ab = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + c^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

مثال 1: طول اضلاع یک مثلث به ترتیب زیر داده شده‌اند:

$$a = 4 \text{ cm}, b = 3 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$$



حل: در شکل دیده می شود که بالای ضلع قائم (a) ، 16 عدد مربع که هر ضلع آن 1cm است، می باشد.
بالای ضلع قائم (b) ، 9 عدد مربع که هر ضلع آن مساوی به 1cm است، می باشد و بالای ضلع (c) ، 25 عدد مربع که هر ضلع آن نیز مساوی 1cm است، می باشد.

$$25cm^2 = 16cm^2 + 9cm^2 \quad \text{در نتیجه:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

مثال 2: در مثلث قائم الزاویه ABC اندازه ضلع AC را حساب کنید.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

$$(25)^2 = \overline{AC}^2 + (15)^2$$

$$625 = \overline{AC}^2 + 225$$

$$\overline{AC}^2 = 625 - 225$$

$$\overline{AC}^2 = 400, \quad \overline{AC} = 20cm$$

مثال 3: طول قطر مستطیلی را با داشتن اضلاع $3.5cm$ و $4.5cm$ دریافت کنید.

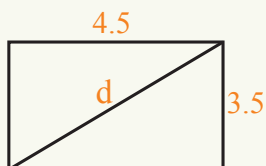
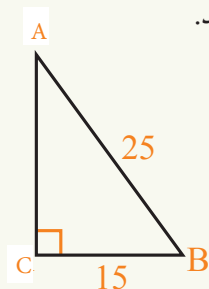
حل: طبق قضیه فیثاغورث اگر طول قطر را d بنامیم؛ داریم:

$$d^2 = (4.5cm)^2 + (3.5cm)^2$$

$$d^2 = 20.25cm^2 + 12.25cm^2$$

$$d^2 = 32.50cm^2$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{32.50cm} , d \approx 5.7cm$$



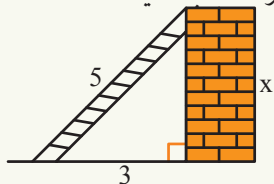
تمرین

1- طول و عرض صنف خود را به متر اندازه کنید. فاصله بین دو کنج مقابل را اول با استفاده

از قضیه فیثاغورث، بعد ذریعه متر محاسبه و نتایج را مقایسه کنید.

2- اگر طول یک ضلع مربع 4 واحد باشد قطر آن را محاسبه کنید.

3- در مثلث قائم الزاویه ABC ، $AB = 8$ ، $BC = 6$ وتر AC را حساب کنید.

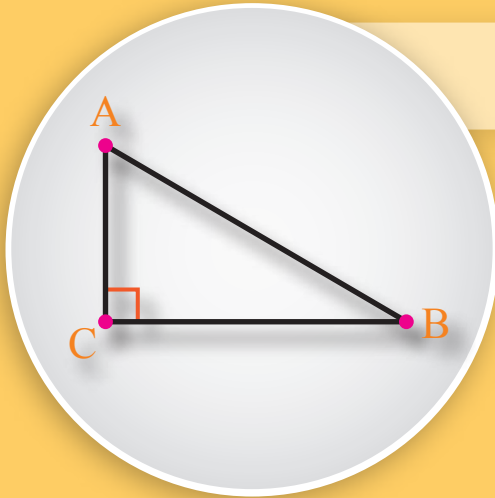


4- در شکل مقابل زینه با زمین و دیوار مثلث قائم الزاویه را

تشکیل نموده است اگر طول زینه 5m و طول یک ضلع قائم

آن 3m باشد. طول ضلع سوم آن. یعنی x را دریافت کنید.

معکوس قضیه فیثاغورث Pythagorean



در کدام حالت سه قطعه خط
کیفی یک مثلث قائم الزاویه را
ساخته می‌تواند؟

فعالیت

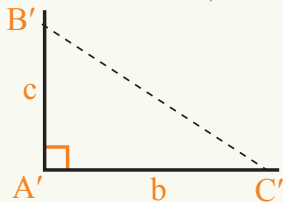
- مثلثی را به طول اضلاع 3، 4 و 5 سانتی متر رسم کنید.
- اندازه زاویه‌های این مثلث را محاسبه کنید.
- مثلث به دست آمده چه نوع مثلثی است؟
- چه رابطه‌ای بین طول اضلاع این مثلث مشاهده می‌شود.
- عملیه‌های فوق را برای مثلثی به طول اضلاع 8، 10 و 6 سانتی متر تکرار کنید.

فعالیت فوق را به عنوان معکوس قضیه فیثاغورث طور زیر می‌توان بیان کرد:

معکوس قضیه فیثاغورث:

اگر مجموع مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به مربع ضلع سوم آن باشد، آن مثلث
قائم‌الزاویه است.

ثبوت: فرض کنید برای مثلث ABC به طول اضلاع a ، b و c داریم $a^2 = b^2 + c^2$ مثلث



را به طول اضلاع b ، c طوری رسم می‌کنیم که
در رأس A' قائمه باشد، برای این کار ابتدا زاویه قائمه A' را
رسم نموده روی اضلاع آن قطعه خط‌هایی به طول b و c جدا
می‌کنیم.

آن نقاط را B' و C' نامیده و با هم وصل می‌نماییم.

طبق قضیه فیثاغورث در مثلث $A'B'C'$ داریم:

$$\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $b^2 + c^2 = a^2$ است در نتیجه:

$$\overline{B'C'}^2 = a^2$$

$$\overline{B'C'} = a$$

پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ نظر به حالت تساوی سه ضلع، انطباق پذیر هستند، در نتیجه زوایای آنها نیز یک به یک مساوی اند. چون: $\hat{A}' = 90^\circ$ پس: $\hat{A} = 90^\circ$.
یعنی: مثلث ABC قائم الزاویه است.

مثال: مثلی به طول اضلاع $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ، $\overline{AC} = \sqrt{2}$ و $\overline{BC} = \sqrt{5}$ چه نوع مثلی است؟

حل: با در نظر داشت اندازه‌های اضلاع مثلث داریم:

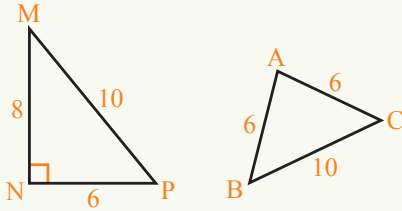
$$(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

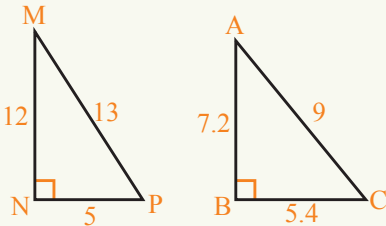
پس طبق عکس قضیه فیثاغورث مثلث ABC در رأس A قائم است.

تمرین

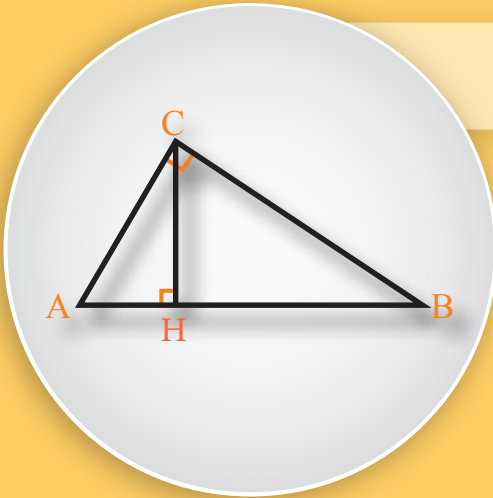
1- دو مثلث ABC و MNP داده شده‌اند. نشان دهید که کدام یکی آنها مثلث قائم الزاویه است؟



2- صحت رابطه فیثاغورث را در مثلث‌های قائم الزاویه زیر تحقیق کنید.



قضایای مثلث قائم الزاویه



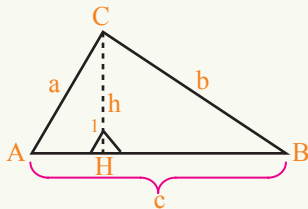
در شکل مقابل چند مثلث قائم الزاویه را می بینید؟ آیا این مثلث ها باهم مشابه اند؟

فعالیت

- مثلث قائم الزاویه ABC را رسم کنید که زاویه C آن قائمه باشد.
- از رأس C ارتفاع بالای وتر آن رسم نموده آن را CH بنامید.
- مثلث های ACH و BCH چه نوع مثلث های هستند؟
- آیا مثلث های ACH و ABC متشابه اند؟ چرا؟
- آیا مثلث های BCH و ABC متشابه اند؟ چرا؟
- آیا مثلث های ACH و BCH متشابه اند؟ چرا؟

از فعالیت فوق مشاهده می شود که ارتفاع بالای وتر یک مثلث قائم الزاویه، آن را به سه مثلث متشابه تقسیم می کند. با استفاده از این مطلب می توان برای ثبوت قضایای زیر استفاده کرد.
قضیه 1: در هر مثلث قائم الزاویه، حاصل ضرب اضلاع قائم، مساوی به حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است.

ثبوت: فرض کنید CH ارتفاع بالای وتر مثلث قائم الزاویه ABC باشد. در دو مثلث ACH و ABC داریم:



$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{H}_1 = 90^\circ \\ \hat{A} = \hat{A} \text{ زاویه مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACH$$

از تشابه دو مثلث نتیجه گیری می‌شود که مقابل زاویه‌های مساوی، اضلاع متناسب قرار دارد؛ یعنی:

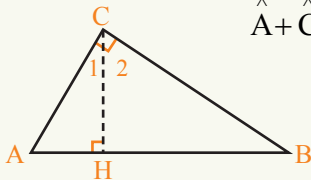
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CB}} \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{CH} \cdot \overline{AB}$$

قضیه 2: در هر مثلث قائم الزاویه مربع ارتفاع بالای وتر مساوی به حاصل ضرب دو قطعه خط ایجاد شده بالای آن وتر می‌باشد.

ثبوت: فرض کنید \overline{CH} ارتفاع بالای وتر مثلث قائم الزاویه ABC باشد.

در مثلث قائم الزاویه ABC داریم: I $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$

در مثلث قائم الزاویه ACH داریم: II $\hat{A} + \hat{C}_1 = 90^\circ$



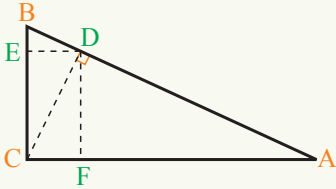
از روابط (I و II) نتیجه می‌گیریم که: $\hat{B} = \hat{C}_1$
 به همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم که: $\hat{A} = \hat{C}_2$ است. چرا؟
 در دو مثلث قائم الزاویه ACH و CBH داریم که:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C}_2 \\ \hat{C}_1 = \hat{B} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACH \sim \triangle CBH$$

از تشابه دو مثلث ACH و CBH نتیجه می‌شود که مقابل زاویه‌های مساوی اضلاع آن‌ها متناسب اند؛ یعنی:

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} \Rightarrow \overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$$

مثال 1: در شکل زیر \overline{CD} عمود بالای \overline{AB} است و چهار ضلعی $DECF$ یک مستطیل داده شده باشد، نشان دهید که مثلث BED با مثلث قائم الزاویه ABC مشابه است.



حل: در مثلث‌های BED و ACB داریم که:
زاویه مشترک $\hat{B} = \hat{B}$

چون $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ است و BC قاطع است پس زوایای یک طرف قاطع با هم مساوی اند.

یعنی: $\hat{C} = \hat{BED} = 90^\circ$

دو زاویه دو مثلث با هم مساوی شدند، بنابر آن تناسب بین اضلاع وجود دارد.
در نتیجه نظر به حالت تشابه مثلث‌ها می‌توان گفت:

$$\triangle BED \sim \triangle ACB$$

نوت: در شکل تعداد مثلث‌های متشابه تشکیل شده را حساب کنید.

مثال 2: در شکل CH ارتفاع بالای وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است. اگر $r = 4\text{cm}$ و $s = 9\text{cm}$ باشد h را دریافت کنید.

حل:

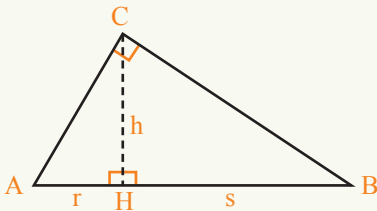
$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

$$\overline{CH}^2 = 4 \cdot 9$$

$$\overline{CH}^2 = 36$$

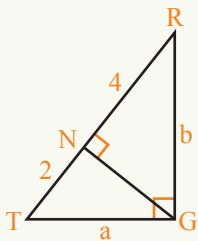
$$\sqrt{\overline{CH}^2} = \sqrt{36}$$

$$\overline{CH} = 6\text{cm}$$

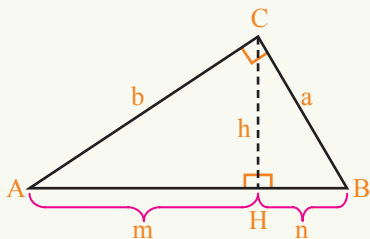


تمرین

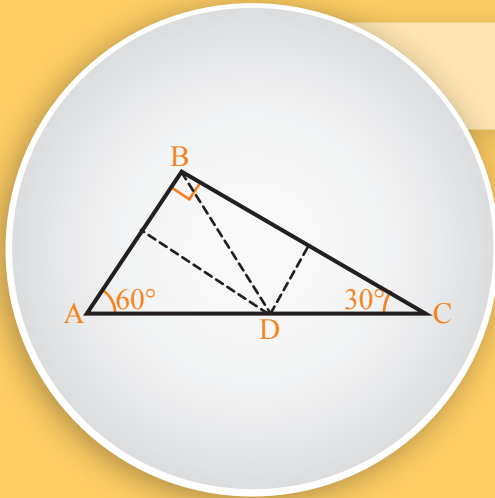
1- مثلث قائم‌الزاویه‌یی که زاویه G آن قائمه بوده، داده شده است قیمت‌های a و b را به دست آورید.



2- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، ارتفاع بالای وتر AB می‌باشد. هرگاه $m = 9$ ، $n = 3$ باشد قیمت‌های a ، b و h را دریافت کنید.

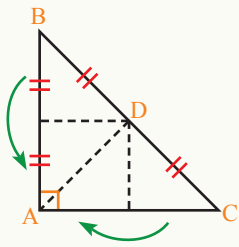


قضایا در مثلث قائم الزاویه برای زوایای 30° و 60°



در شکل مقابل آیا ضلع مقابل زاویه
 30° برابر نصف طول وتر است؟

فعالیت



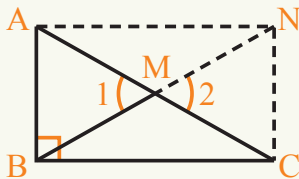
روی یک صفحه کاغذ، مثلث قائم الزاویه‌یی؛ مانند شکل زیر رسم
و آن را قیچی کنید.

- مثلث ABC را طوری قات کنید که رأس B بالای رأس A قرار گیرد.
- هم‌چنان آن را دوباره طوری قات کنید که رأس C بالای رأس A قرار گیرد.

• اگر نقطه تقاطع را D بنامیم، آیا می‌توان گفت $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$ است؟ چرا؟

نتیجه‌یی که از فعالیت فوق به طور عملی به دست می‌آید می‌توانیم به صورت قضیه زیر بیان
و ثابت نماییم:

قضیه: در هر مثلث قائم الزاویه طول میانه که از رأس قائم بالای وتر آن رسم شده باشد،
مساوی به نصف طول وتر است.



ثبوت: فرض کنید که \overline{BM} میانه وارد بر وتر مثلث ABC
باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

برای ثبوت میانه \overline{BM} را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم
تا نقطه N به دست آید.

پس: $\overline{BM} = \overline{MN}$

در دو مثلث AMB و MNC داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AM} = \overline{MC} \text{، میانه است،} \\ \overline{BM} = \overline{MN} \text{، قرار ترسیم،} \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \text{، قرار متقابل برأس،} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A}MB \cong \hat{A}MNC$$

با توجه به انطباق پذیری دو مثلث AMB و MNC نتیجه می شود که اضلاع متناسب این دو مثلث نیز انطباق پذیر اند؛ یعنی:

$$\overline{AB} = \overline{NC} \dots \dots \dots \text{I}$$

به همین ترتیب از انطباق پذیری دو مثلث AMN و BMC نتیجه می شود که:

$$\overline{AN} = \overline{BC} \dots \dots \dots \text{II}$$

چرا؟

پس از روابط (I و II) نتیجه می شود که در چهار ضلعی $ABCN$ اضلاع مقابل باهم مساوی اند، چون یک زاویه آن قائمه است، پس: $ABCN$ یک مستطیل می باشد. در مستطیل می دانیم که قطرها باهم مساوی بوده و همدیگر را نصف می کنند.

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

پس:

فعالیت

- مثلث قائم الزاویه ABC را چنان رسم کنید که اندازه زوایای حاده آن 30° و 60° باشد.
- طول وتر و اضلاع قائم آن را با خط کش اندازه گیری کنید.
- چه رابطه بین طول اضلاع این مثلث وجود دارد؟
- تجربه فوق را بایک مثلث قائم الزاویه دیگر به زوایای $30^\circ, 60^\circ$ تکرار کنید.

با استفاده از فعالیت فوق می توان قضیه زیر را بیان و ثبوت کرد:

قضیه: در مثلث قائم الزاویه اگر اندازه یک زاویه حاده آن 30° باشد، طول ضلع مقابل این زاویه نصف طول وتر است.

ثبوت: در مثلث قائم الزاویه ABC فرض کنید $\hat{A} = 30^\circ$ و $\hat{B} = 90^\circ$. می خواهیم ثابت کنیم که:

$$\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

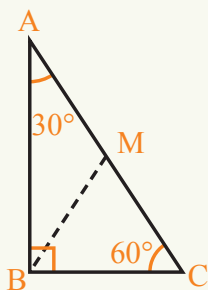
برای اثبات، میانه بالای وتر را رسم نموده آن را BM می‌نامیم طبق قضیه قبل می‌دانیم که میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

$$\text{پس: } BM = MC$$

در نتیجه: مثلث BMC متساوی الساقین است.

$$\hat{MBC} = \hat{MCB} = 60^\circ \text{ می‌گیریم}$$

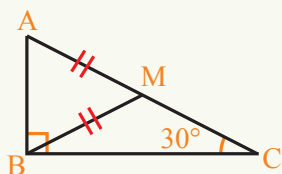
پس مثلث MBC متساوی الاضلاع است. چرا؟



بنا بر آن $\overline{BC} = \overline{MC}$

چون M نقطه وسط AC است. در نتیجه $\overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{AC}$

مثال: در شکل مقابل، اگر BM میانه وارد بر وتر مثلث ABC 3 واحد باشد، طول اضلاع مثلث را تعیین کنید.



حل: در مثلث قائم‌الزاویه می‌دانیم میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{AC} \Rightarrow 3 = \frac{1}{2} \overline{AC} \Rightarrow \overline{AC} = 6$$

از طرف دیگر می‌دانیم ضلع مقابل زاویه 30° نصف وتر است.

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6 \Rightarrow \overline{AB} = 3$$

حال با استفاده از قضیه فیثاغورث می‌توانیم اندازه ضلع سوم مثلث را محاسبه کنیم.

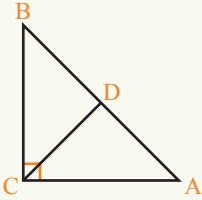
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

$$\Rightarrow 3^2 + \overline{BC}^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow 9 + \overline{BC}^2 = 36 \Rightarrow \overline{BC}^2 = 36 - 9 = 27$$

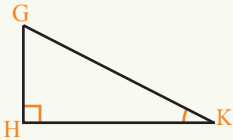
$$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

- 1- در مثلث ABC ، \hat{C} قائمه است، اگر $\overline{AB} = 16$ و \overline{CD} میانه باشد، طول \overline{CD} را دریابید.

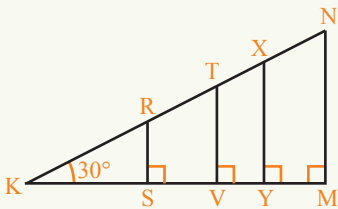


- 2- در شکل فوق اگر طول میانه $\overline{CD} = 15$ باشد \overline{AB} را دریابید.

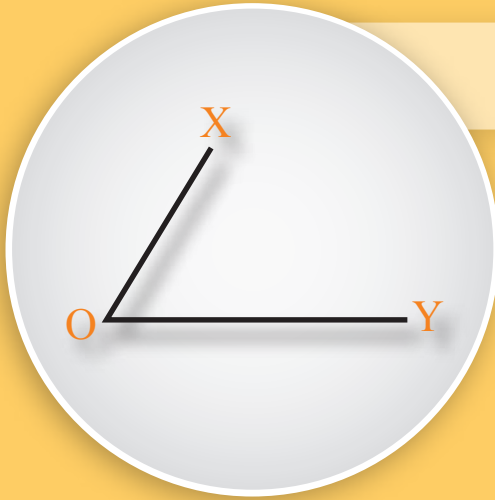
- 3- در مثلث GHK ، \hat{H} قائمه است و $\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{GK}$ ، اندازه زاویه K چقدر است؟



- 4- در مثلث KMN ، زاویه \hat{M} قائمه است و اندازه $\hat{K} = 30^\circ$ است. \overline{RS} ، \overline{TV} ، \overline{XY} بر \overline{KM} عمود اند. اگر $\overline{KN} = 16$ واحد، $\overline{KX} = 13$ واحد، $\overline{KT} = 10$ واحد و $\overline{KR} = 6$ واحد باشند در این صورت \overline{RS} ، \overline{TV} ، \overline{XY} و \overline{MN} را دریابید.



ناصف الزاویه



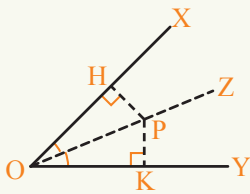
آیا تمام نقاط ناصف الزاویه از دو ضلع همان زاویه متساوی الفاصله اند؟

فعالیت

- ناصف الزاویه \widehat{xoy} را رسم کنید و آن را OZ بنامید.
- یک نقطه کیفی را روی ناصف OZ انتخاب کرده آن را P بنامید.
- از نقطه P بالای دو ضلع زاویه، یعنی OX و OY عمودها رسم کنید آن‌ها را HP و KP بنامید.
- طول HP و KP را با خط کش اندازه بگیرید. چه رابطه بین طول‌های این عمودها ملاحظه می‌شود؟

مشاهدات فعالیت فوق را می‌توان طور زیر بیان و ثبوت کرد:

قضیه: هر نقطه روی ناصف الزاویه، از دو ضلع زاویه متساوی الفاصله است.



ثبوت: فرض می‌کنیم OZ ناصف الزاویه \widehat{YOX} باشد،

می‌خواهیم نشان دهیم: $\overline{PH} = \overline{PK}$

در دو مثلث HPO و KPO داریم:

$$\widehat{H} = \widehat{K} = 90^\circ$$

$$\widehat{XOZ} = \widehat{YOZ} \quad \text{، } \widehat{OZ} \text{ ناصف الزاویه است،} \Rightarrow \widehat{OPK} \cong \widehat{OPH}$$

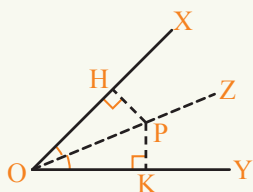
$$\overline{OP} = \overline{OP} \quad \text{، ضلع مشترک،}$$

با در نظر داشت تساوی وتر و یک زاویه حاده دو مثلث قائم الزاویه OPH و OPK نتیجه می‌گیریم که این دو مثلث انطباق پذیر اند بنا بر این:

$$\overline{PK} = \overline{PH}$$

معکوس قضیه فوق نیز صحیح است.

قضیه: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد، آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد.



ثبوت: فرض می‌کنیم نقطه P از دو ضلع OX و OY متساوی الفاصله باشد؛ یعنی: $\overline{PK} = \overline{PH}$
می‌خواهیم نشان دهیم P روی ناصف الزاویه YOX قرار دارد
یعنی:

$$\hat{XOP} = \hat{YOP}$$

برای این منظور دو مثلث قائم الزاویه HPO و KPO را در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PH} = \overline{PK} \text{ قرار فرضیه} \\ \hat{H} = \hat{K} \\ \overline{OP} = \overline{OP} \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{OPH} \cong \hat{OPK}$$

بنابر تساوی دو ضلع و یک زاویه حاده، نتیجه می‌گیریم که مثلث های OPH و OPK انطباق پذیر اند؛ بنابراین زاویه‌های دیگر آنها نیز انطباق پذیر اند.

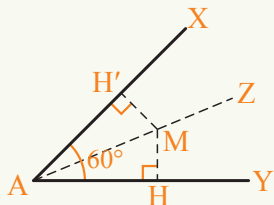
$$\hat{XOP} = \hat{YOP}$$

پس:

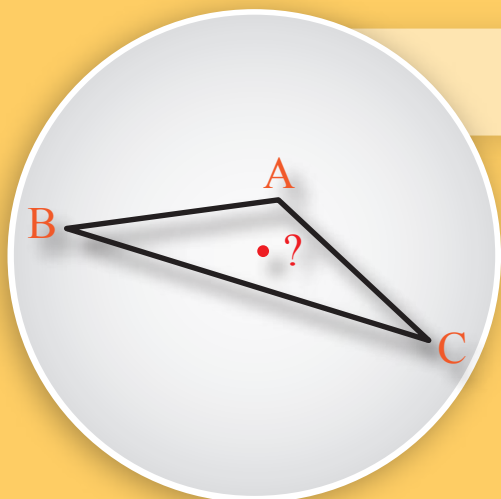
یعنی: P روی ناصف الزاویه XOY قرار دارد.

تمرین

نقطه M روی ناصف الزاویه A قرار داشته، قطعه خط MH' بالای قطعه خط AX عمود است. طول اضلاع مثلث AMH را از جنس اضلاع مربوطه به دست آورید.



ناصف الزاویه‌های داخلی مثلث



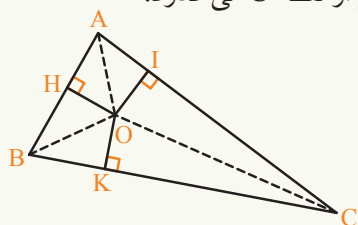
آیا می‌توان نقطه‌یی را در داخل مثلث پیدا نمود که از هر سه ضلع مثلث فاصله مساوی داشته باشد؟

فعالیت

- یک مثلث کیفی ABC رسم کنید.
- ناصف الزاویه‌های داخلی \hat{B} و \hat{C} را طوری رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه‌یی مانند O قطع کنند.
- ناصف الزاویه داخلی \hat{A} را رسم کنید.
- آیا ناصف الزاویه \hat{A} نیز از نقطه O می‌گذرد؟
- یک مثلث کیفی دیگر $A'B'C'$ را رسم کرده، فعالیت فوق را برای آن تکرار کنید. مشاهدات فعالیت فوق را می‌توان طور زیر بیان و ثبوت کرد:

قضیه: در هر مثلث ناصف الزاویه‌های داخلی یکدیگر را در یک نقطه داخلی مثلث قطع می‌کنند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می‌کنیم ناصف الزاویه‌های \hat{B} و \hat{C} یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. نشان می‌دهیم که ناصف الزاویه \hat{A} نیز از نقطه O می‌گذرد. با در نظر داشت شکل زیر داریم:



چون نقطه O روی ناصف الزاویه \hat{B} است.

پس: $\overline{OH} = \overline{OK}$I

و همچنان نقطه O روی ناصف الزاویه \hat{C} است.

پس: $\overline{OK} = \overline{OI}$II

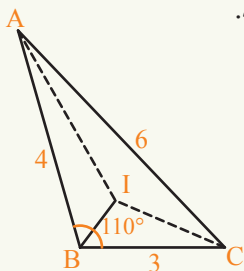
می‌دانیم وقتی یک طرف دو مساوات با هم مساوی شوند دیگر آن‌ها نیز خود به خود

مساوی می‌شوند. بنابراین از رابطه I و II نتیجه می‌گیریم: $\overline{OH} = \overline{OI}$

از طرف دیگر قرار قضیه قبل می‌دانیم هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد؛ بنابراین نقطه O روی ناصف الزاویه A قرار دارد. در نتیجه می‌توان گفت هر سه ناصف الزاویه داخلی مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

مثال: مثلث با طول اضلاع 6، 3، 4 واحد رسم کنید، نشان دهید که ناصف‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

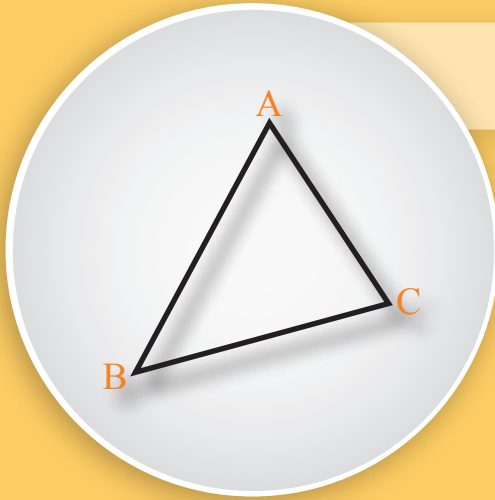
حل: مثلث ABC را در نظر گرفته از رأس‌های A ، B و C ناصف الزاویه‌ها را رسم نموده، دیده می‌شود که ناصف‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند.



تمرین

1- مثلثی با زاویه‌های $A = 20^\circ$ ، $B = 75^\circ$ ، $C = 85^\circ$ رسم کنید. نشان دهید که ناصف الزاویه‌های آن‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

ناصف عمودی در یک مثلث



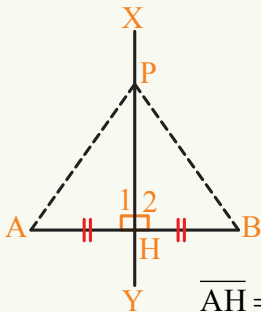
آیا ناصف عمودی یک ضلع مثلث
حتماً از رأس مقابل آن می‌گذرد؟

فعالیت

- ناصف عمودی قطعه خط AB را رسم کنید.
- یک نقطه مانند P بالای ناصف عمودی قطعه خط AB انتخاب کنید.
- دو انجام قطعه خط AB را به نقطه P وصل کنید.
- توسط خط کش طول‌های \overline{PA} و \overline{PB} را اندازه بگیرید چه رابطه باهم دارند؟
- قطعه خط دیگری مانند $A'B'$ رسم کنید و فعالیت فوق را بر آن تکرار کنید.

نتیجه مشاهده شده فوق را طور زیر می‌توان بیان و اثبات کرد.

قضیه: هر نقطه روی ناصف عمودی یک قطعه خط از دو انجام آن متساوی الفاصله‌اند.



ثبوت: فرض می‌کنیم ناصف عمودی قطعه خط AB است. می‌خواهیم نشان دهیم که هر نقطه اختیاری P روی ناصف عمودی از A و B فاصله مساوی دارد.

یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

در دو مثلث PAH و PBH داریم:

$\overline{AH} = \overline{BH}$ ، XY ناصف عمودی است،

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ ، XY ناصف عمودی است،

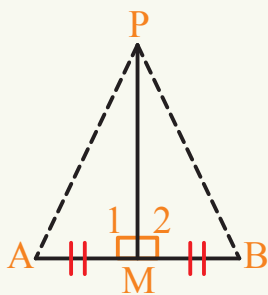
$\overline{PH} = \overline{PH}$ ، ضلع مشترک،

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AH} = \overline{BH} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \overline{PH} = \overline{PH} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PAH \cong \triangle PBH$$

چون در دو مثلث PAH و PBH دو ضلع و زاویه بین آنها مساوی اند؛ بنابراین مثلث‌ها باهم انطباق پذیر اند. در نتیجه اضلاع آنها نیز با هم مساوی اند.
یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

معکوس قضیه فوق نیز صحیح است.

قضیه: هر نقطه که از انجام‌های یک قطعه خط متساوی الفاصله باشد، آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار دارد.



ثبوت: فرض می‌کنیم نقطه P از دو انجام قطعه خط AB به فاصله مساوی قرار دارد.

یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

می‌خواهیم نشان دهیم P روی ناصف عمودی AB قرار دارد.

چون: $\overline{PB} = \overline{PA}$ است؛ پس مثلث PAB متساوی الساقین

است؛ بنابراین: $\hat{A} = \hat{B}$

وسط قطعه خط AB را M می‌نامیم.

پس: $\overline{AM} = \overline{MB}$

نقطه P را به وسط قطعه خط AB وصل نموده در دو مثلث PAM و PBM داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{PA} = \overline{PB} \\ \overline{MA} = \overline{MB} \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle PAM \cong \triangle PBM$$

در دو مثلث PAM و PBM بنا بر تساوی دو ضلع و زاویه بین آنها با هم انطباق پذیراند در نتیجه زاویه‌های آنها نیز یک به یک مساوی اند؛ یعنی:

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

چون:

$$\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$$

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$$

پس:

بنا بر این، گفته می‌توانیم که PM قطعه خط AB را به طور عمودی تنصیف کرده است؛ پس P روی ناصف عمودی AB قرار دارد.

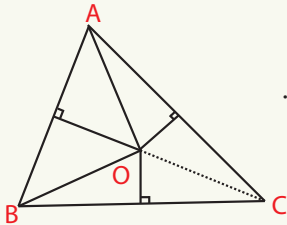
فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- ناصف‌های عمودی اضلاع \overline{AB} و \overline{AC} را رسم و نقطه تقاطع آن‌ها را نقطه O بنامید.
- ناصف عمودی ضلع \overline{BC} را رسم کنید. آیا این ناصف عمودی نیز از O می‌گذرد؟
- مثلث کیفی دیگری مانند $A'B'C'$ رسم کنید و فعالیت فوق را برای آن تکرار کنید.

مشاهدات فعالیت فوق را می‌توان طور زیر بیان و ثبوت کرد:

قضیه: در هر مثلث ناصف عمودی اضلاع آن یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

ثبوت: در مثلث ABC ناصف‌های عمودی اضلاع \overline{AB} و \overline{AC} یکدیگر را در نقطه O قطع کرده‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم که نقطه O روی ناصف عمودی ضلع \overline{BC} قرار دارد.



چون نقطه O روی ناصف عمودی \overline{AB} است.
 $\overline{OA} = \overline{OB}$I پس:

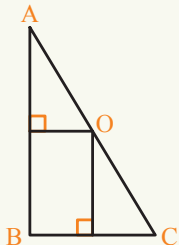
به همین قسم نقطه O روی ناصف عمودی \overline{AC} نیز قرار دارد.
 $\overline{OA} = \overline{OC}$II پس:

از مقایسه تساوی‌های I و II می‌توان نتیجه گرفت که:
 $\overline{OB} = \overline{OC}$

از طرف دیگر قرار قضیه قبل می‌دانیم هر دائمه که از انجام‌های یک قطعه خط متساوی‌الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه قرار داشته؛ بنابراین نقطه O روی ناصف عمودی ضلع \overline{BC} قرار دارد.

در نتیجه ناصف‌های عمودی اضلاع هر مثلث در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

مثال: یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید. محل تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاع آن را دریافت کنید.



حل: مثلث قائم‌الزاویه ABC و ناصف‌های عمودی آن را رسم می‌کنیم، دیده می‌شود که ناصف‌های عمودی اضلاع قائم مثلث قائم‌الزاویه در نقطه وسطی بالای وتر یکدیگر را قطع می‌کنند.

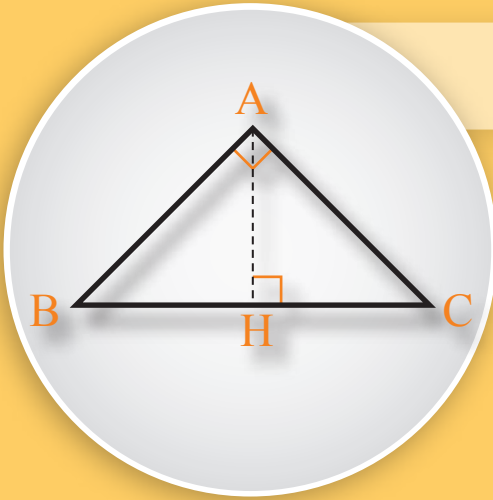
در نتیجه می‌توان گفت ناصف‌های عمودی در هر مثلث قائم‌الزاویه یکدیگر را در نقطهٔ وسطی بالای وتر قطع می‌کنند.

تمرین

1- مثلث ABC را به زاویه‌های $80^\circ, 70^\circ, 30^\circ$ رسم کنید. محل تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاع آن را دریافت کنید.

2- مثلثی به اضلاع 6، 4 و 2.5 سانتی متر رسم کنید. ناصف‌های عمودی اضلاع آن را ترسیم و محل تقاطع ناصف‌های عمودی را دریافت کنید.

ارتفاع‌های مثلث



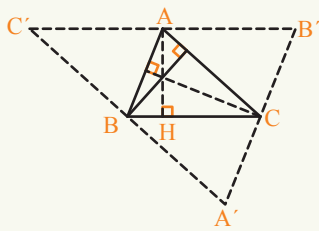
مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر
 AH ارتفاع بالای وتر مثلث باشد
 ارتفاع‌های دیگر مثلث کدام
 اند؟

فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- از رأس A ارتفاع بالای ضلع BC را رسم کنید، انجام آن را H بنامید.
- از رأس‌های مثلث ABC خطوطی موازی به اضلاع آن رسم کنید.
- مثلث حاصل شده از تقاطع، این خطوط را $A'B'C'$ نامگذاری کنید طوری که $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ ، $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$.
- آیا قطعه خط AH بر قطعه خط $B'C'$ عمود است چرا؟
- آیا چهار ضلعی $ABCB'$ متوازی الاضلاع است چرا؟
- آیا $AB' = AC'$ است؟ چرا؟
- آیا قطعه خط AH ناصف عمودی قطعه خط $B'C'$ است چرا؟

در فعالیت فوق مشاهده می‌شود که:

اگر از رأس‌های یک مثلث خطوطی موازی به اضلاع آن رسم کنیم در این صورت ارتفاع‌های
 مثلث اولیه ناصف عمودی اضلاع مثلث تشکیل شده است.
 می‌دانیم ناصف‌های عمودی اضلاع مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند؛ پس ارتفاع‌های
 مثلث، هم یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.
قضیه: در هر مثلث ارتفاع‌ها در یک نقطه متقاطع‌اند.



ثبوت: از رأس‌های مثلث ABC خطوطی را موازی به اضلاع آن رسم می‌کنیم. از تقاطع خطوط مثلث $A'B'C'$ مانند شکل مقابل تشکیل می‌شود در این حالت می‌توان نوشت:

$$\overline{A'B'} \parallel \overline{AB} \text{ و } \overline{A'C'} \parallel \overline{AC} \text{ , } \overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$$

با در نظر داشت این که اضلاع مقابل چهارضلعی $ABCB'$ موازی هستند نتیجه می‌گیریم که این چهار ضلعی یک متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین اضلاع مقابل چهار ضلعی $ABCB'$ مساوی‌اند.

$$\overline{AB'} = \overline{BC} \dots\dots\dots I$$

یعنی:

به همین ترتیب چهار ضلعی $ACBC'$ نیز متوازی‌الاضلاع است؛ در نتیجه:

$$\overline{AC'} = \overline{BC} \dots\dots\dots II$$

از روابط I و II نتیجه می‌گیریم که:

از طرف دیگر چون $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ است بنا بر این $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ است.

نظر به این که $\overline{AB'} = \overline{AC'}$ و $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$

پس: \overline{AH} ناصف عمودی $\overline{B'C'}$ است.

به همین شکل می‌توان نشان داد که ارتفاع‌های بالای اضلاع \overline{AB} و \overline{AC} نیز به ترتیب ناصف‌های عمودی اضلاع $\overline{A'B'}$ و $\overline{A'C'}$ هستند. چون ناصف‌های عمودی در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ پس ارتفاع‌ها نیز یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

تمرین

- 1- مثلث ABC را به اضلاع 5، 4 و 6 سانتی متر رسم کنید. از هر رأس بالای ضلع مقابل، ارتفاع را رسم نموده و محل تقاطع آن‌ها را در صفحه مشخص کنید.
 - 2- یک مثلث قائم‌الزاویه را رسم نموده محل تقاطع ارتفاع‌های این مثلث را مشخص کنید.
 - 3- مثلث منفرجه‌الزاویه رسم نموده محل تقاطع ارتفاع‌های آن را مشخص کنید.
- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.

میانه‌های مثلث



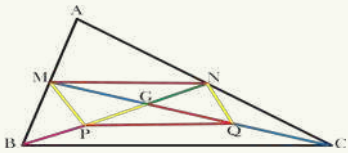
آیا فکر کرده می‌توانید هر گاه یک مثلث را روی نوک تیز یک پنسِل قرار دهید و نیفتد؟

فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- از رأس B میانه BN و از رأس C میانه CM را رسم کنید.
- نقطه تقاطع آن دو میانه را G نام‌گذاری کنید.
- طول‌های BG و GN را با خط‌کش اندازه کنید. این طول‌ها چه رابطه دارند؟
- طول‌های CG و GM را با خط‌کش اندازه کنید. این طول‌ها با هم چه رابطه دارند؟
- از رأس A میانه بالای ضلع BC رسم و انجام آن را K بنامید.
- آیا AK از نقطه G عبور می‌کند؟
- طول‌های AG و GK را با خط‌کش اندازه‌گیری نمایید و بگویید این طول‌ها با هم چه رابطه دارند؟

قضیه: میانه‌های هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع نموده و نقطه تقاطع، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می‌کند.

ثبوت: در مثلث ABC نقطه G محل تقاطع میانه‌های BN و CM است. با در نظر داشت این که قطعه خط MN وسط‌های اضلاع AB و AC را با هم وصل می‌کند. پس طبق قضیه تالس نتیجه می‌شود که:



$$\overline{BC} \parallel \overline{MN}$$

$$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC} \dots \dots \dots I$$

نقطه وسطی BG را P می‌نامیم و نقطه وسطی CG را Q می‌نامیم.

\overline{PQ} قطعه خطی است که وسط اضلاع \overline{BG} و \overline{CG} را در مثلث GBC با هم وصل می کند. بنا بر قضیه تالس در مثلث GBC می توان نتیجه گرفت که:

$$\overline{PQ} \parallel \overline{BC} \quad \text{II}$$

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{BC} \dots \dots \dots \text{II}$$

از روابط I و II نتیجه می شود که چهارضلعی $MNQP$ که دو ضلع آن موازی و مساوی اند. یک متوازی الاضلاع است.

در متوازی الاضلاع $MNQP$ قطرهای یکدیگر را تنصیف می کنند؛ بنابراین:

$$\overline{PG} = \overline{GN} \quad \text{و} \quad \overline{QG} = \overline{GM}$$

از طرف دیگر می دانیم:

$$\overline{PG} = \overline{PB} \quad \text{و} \quad \overline{QG} = \overline{QC}$$

بنا بر این:

$$\overline{PG} = \overline{GN} = \overline{PB} \quad \text{و} \quad \overline{QG} = \overline{GM} = \overline{QC}$$

در نتیجه:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1}$$

چون میانه های \overline{BN} و \overline{MC} در مثلث ABC دلخواه انتخاب شده بوده اند، پس این رابطه برای هر دو میانه دلخواه دیگر نیز درست است.

از این جا نتیجه می شود که سه میانه مثلث، یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

و نقطه تقاطع، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می کند.

نقطه تقاطع میانه ها به نام مرکز ثقل مثلث یاد می گردد.

تمرین

- 1- یک مثلث قائم الزاویه رسم نموده محل تقاطع میانه های آن را مشخص کنید.
- 2- نشان دهید که در هر مثلث متساوی الاضلاع محل تقاطع میانه ها، ناصف ها و ارتفاع ها در یک نقطه می باشند.

- 3- در مثلث ABC اگر G مرکز تقاطع میانه های \overline{AM} , \overline{BN} و \overline{CK} باشد نشان دهید که:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$

• قضایای مثلث متساوی الساقین

- اگر دو ضلع یک مثلث با هم مساوی باشند؛ پس زوایای مقابل آن دو ضلع نیز با هم مساوی اند.
- اگر دو زاویه یک مثلث با هم مساوی باشند؛ اضلاع مقابل زوایای مذکور نیز با هم مساوی هستند.

• قضیه فیثاغورث

- در هر مثلث قائم الزاویه مساحت مربعی که توسط اندازه وتر ساخته می شود برابر مجموع مساحت های دو مربعی است که توسط اندازه دو ضلع قائم آن مثلث ساخته می شود.
- در هر مثلث قائم الزاویه مربع وتر، مساوی به مجموع مربع های اضلاع قائم آن می باشد:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

• عکس قضیه فیثاغورث

- اگر مجموع مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به مربع ضلع سوم آن باشد آن مثلث قائم الزاویه است.

• قضایای مثلث قائم الزاویه

- در هر مثلث قائم الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائم مساوی به حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است.
- در هر مثلث قائم الزاویه طول میانه که از رأس قائم رسم می شود عبارت از حاصل ضرب دو ضلع قائم بالای وتر همان مثلث می باشد.
- در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاعی که از رأس قائم بالای وتر آن رسم شده، مساوی به نصف طول وتر است.
- در مثلث قائم الزاویه اگر اندازه یک زاویه حاده آن 30° باشد، طول ضلع مقابل این زاویه نصف طول وتر است.

• قضایای خطوطی که یکدیگر را در یک نقطه داخل مثلث قطع می کنند

- هر نقطه روی ناصف الزاویه از دو ضلع زاویه متساوی الفاصله است.
- هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد.
- در هر مثلث ناصف الزاویه های داخلی یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
- هر نقطه روی ناصف عمودی یک قطعه خط از دو انجام آن متساوی الفاصله اند.
- هر نقطه که از انجام های یک قطعه خط متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار دارد.
- در هر مثلث ناصف عمودی اضلاع آن یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
- در هر مثلث ارتفاعات در یک نقطه متقاطع اند.
- میانه های هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند و نقطه تقاطع میانه ها، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می کنند.

تمرین عمومی

برای سؤال‌های زیر چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

- 1- در مثلث منفرج‌الزاویه محل تقاطع هر سه ناصف عمودی در کجا است؟
 (a) در داخل مثلث
 (b) در خارج مثلث
 (c) بالای ضلع بزرگ
 (d) هیچ کدام
- 2- مثلثی به اضلاع 8، 4 و 5 واحد طول مفروض است، سه ارتفاع این مثلث یکدیگر را:
 (a) در داخل مثلث قطع می‌کنند
 (b) در خارج مثلث قطع می‌کنند
 (c) روی ضلع به طول 5 متقاطع اند.
 (d) در رأس مقابل بزرگترین ضلع قطع می‌کنند.
- 3- در مثلث قائم‌الزاویه طول ضلع مقابل زاویه 30° عبارت است از:
 (a) نصف وتر
 (b) مساوی به وتر
 (c) 1 بر 3 وتر
 (d) 1 بر چهارم وتر
- 4- هرگاه در مثلث قائم‌الزاویه اندازه اضلاع قائم 3 و 2 واحد باشند، طول وتر عبارت است از:

- (a) $\sqrt{13}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) 3 (d) 2

5- در مثلث متساوی الساقین یک زاویه قاعده آن مساوی به 65° است.

زاویه قاعده دیگر آن عبارت است از:

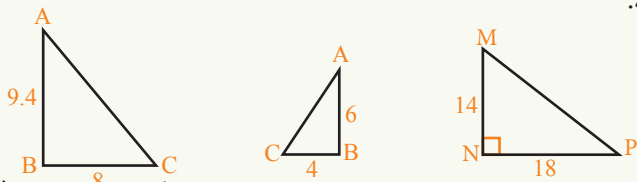
- (a) 50° (b) 65° (c) 70° (d) 45°

در عبارات زیر جاهای خالی را با کلمات مناسب پر نمایید.

- 1- در هر مثلث قائم‌الزاویه حاصل ضرب اضلاع قائم مساوی به وتر و ارتفاع آن مثلث است.
- 2- در هر مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع بالای عبارت از بالای آن وتر می‌باشد.
- 3- در مثلث قائم‌الزاویه طول زاویه 30° مساوی به وتر آن است.
- 4- در مثلث منفرج‌الزاویه ارتفاعات یکدیگر را قطع می‌کنند.
- 5- اگر طول اضلاع یک مثلث به ترتیب 3cm، 4cm و 5cm باشند. مثلث مذکور است.
- 6- هرگاه در یک مثلث دو ضلع آن با هم مساوی باشد آن با هم مساوی است.

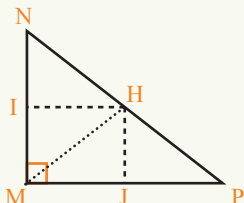
سؤالات زیر را حل نمایید.

1- در اشکال زیر مثلث‌های قائم‌الزاویه داده شده‌اند، وترهای مثلث‌ها را به تقریب کمتر از 0.1 حساب کنید.



2- مثلث ABC را طوری رسم کنید که $BC = 6$ ، $\angle ABC = 80^\circ$ و $\angle ACB = 80^\circ$ باشد، بعد از آن ناصف‌های مثلث‌های مذکور را رسم کنید.

3- مثلث MNP قائم به رأس M را در نظر بگیرید. ارتفاع \overline{MH} را در مثلث مذکور رسم نموده نقاط I و J وسط \overline{MN} و \overline{MP} می‌باشند.



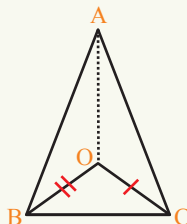
(a) ثبوت کنید که مثلث‌های MJH و MIH متساوی‌الساقین با قاعده مشترک \overline{MH} می‌باشد.

(b) ثبوت کنید که \overline{IJ} ناصف عمودی \overline{MH} است.

(c) ثبوت کنید \overline{HI} و \overline{HJ} بر همدیگر عمود می‌باشند.

4- در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، $\overline{AB} = \overline{AC}$ بوده، اگر \overline{OB} و \overline{OC} ناصف‌الزاویه‌های \hat{B} و \hat{C} باشند، ثبوت کنید که:

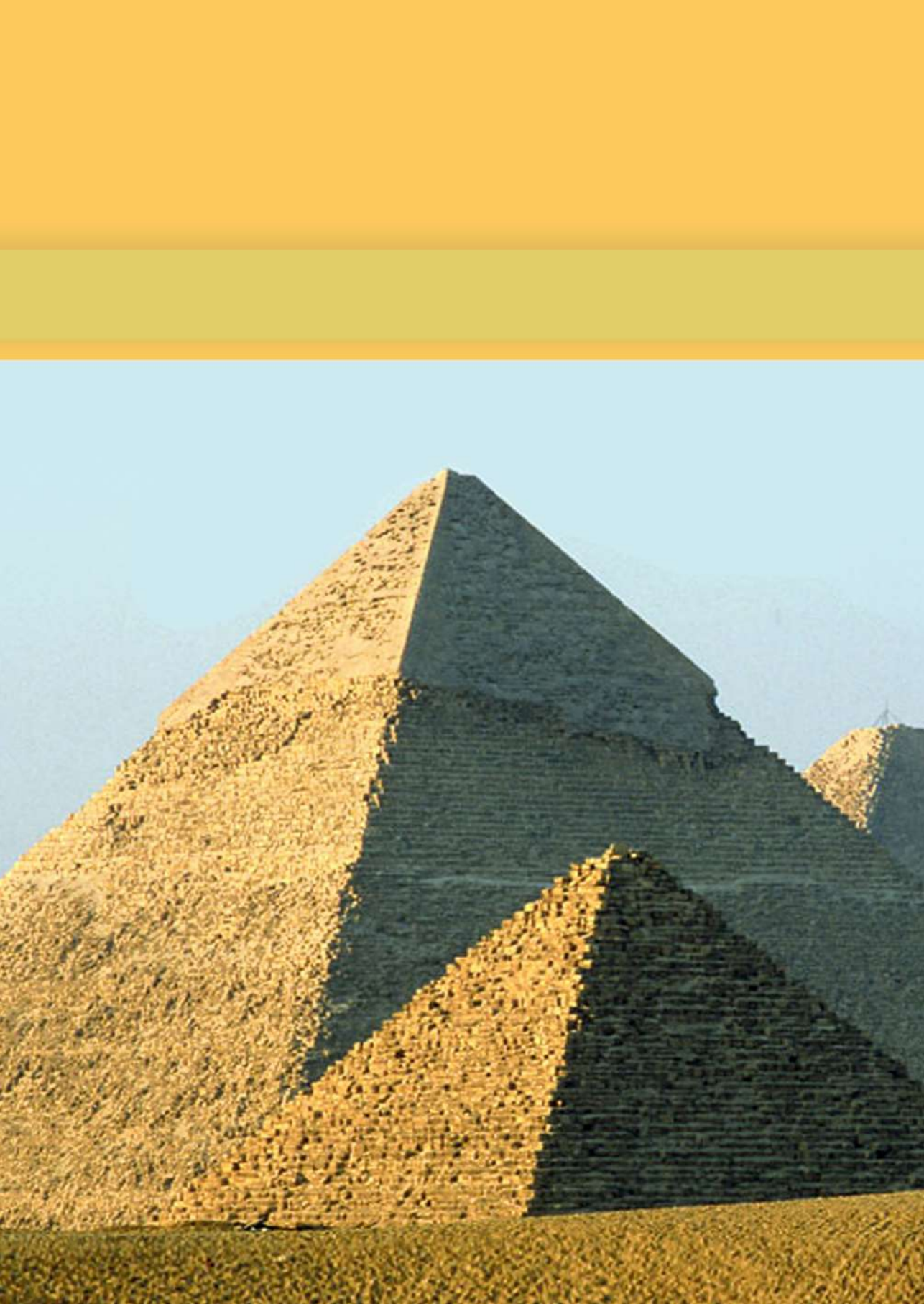
(a) $\overline{OB} = \overline{OC}$ (b) \overline{OA} ناصف‌الزاویه \hat{A} است.



فصل ششم

مساحت و احجام

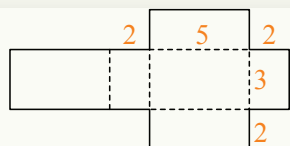






آیا تا به حال فکر کرده اید که یک انسان در هر بار تنفس چه مقدار هوا را داخل شش های خود می کند؟

فعالیت

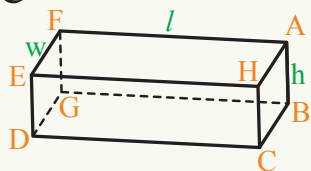


- شکل مقابل را به اندازه های داده شده در کاغذ رسم، قیچی و بر روی خط های نقطه چین آن را قات کنید.
- یک مکعب مستطیل به طول 5cm، عرض 2cm و ارتفاع 3cm رسم کنید.
- مکعب مستطیل مذکور چند رأس، چند ضلع و چند سطح دارد؟ هر یک را بشمارید.
- مساحت سطح های جانبی را که هر سطح آن مستطیل می باشد دریابید.
- مکعب مستطیل مذکور چند قاعده دارد؟ مساحت قاعده آن را دریافت کنید.
- با استفاده از مجموع مساحت های فوق فورمول مساحت کلی مکعب مستطیل مذکور را بنویسید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می یابیم که:

تعریف

مکعب مستطیل یک شش وجهی منظم هندسی است که همه سطوح آن مستطیل شکل بوده و مساحت های هر وجه مقابل آن دو به دو مساوی و موازی، زوایای سطوح آن دو به دو با هم قائم باشند. اگر طول مکعب مستطیل را به l ، عرض آن را به w و ارتفاع آن را به h ارائه نماییم. طوری که مکعب مستطیل



دارای شش سطح بوده و مساحت سطح جانبی آن عبارت است از:

$$S = 2(wh + hl)$$

و مساحت قاعدتین آن عبارت است از:

$$B = 2wl$$

و مساحت کلی آن عبارت است از: $A = w\ell + \ell h + wh + w\ell + \ell h + wh$

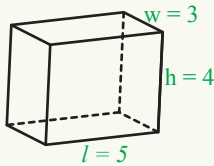
و یا $A = 2(\ell w + \ell h + wh)$

مکعب مستطیل که هر سه بعد (طول، عرض و ارتفاع) آن با هم مساوی باشند آن را مکعب می‌نامیم. اگر مساحت کلی آن را به A نشان دهیم داریم که:

$$A = 6a^2 \quad \text{و یا} \quad A = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$

مکعبی که طول، عرض و ارتفاع آن یک باشد آن را مکعب واحد گویند.

مثال 1: مساحت کلی مکعب مستطیلی را دریافت نمایید که طول آن 5cm ، عرض آن 3cm و ارتفاع آن 4cm باشد.



$$\ell = 5\text{cm}$$

$$w = 3\text{cm}$$

$$h = 4\text{cm}$$

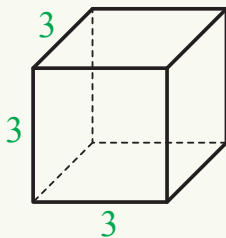
حل:

$$A = 2(\ell w + \ell h + wh) = 2(5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4)$$

$$A = 2(15 + 20 + 12) = 2(47)$$

$$A = 94\text{cm}^2 \quad \text{مساحت کلی}$$

مثال 2: اگر مساحت کلی یک مکعب 54cm^2 باشد، طول ضلع این مکعب چقدر است؟ آن را رسم کنید.



$$A = 6a^2$$

$$6a^2 = 54$$

$$a^2 = \frac{54}{6} = 9$$

$$a = 3\text{cm}$$

حل:

فعالیت

• مکعب مستطیلی را به طول 3cm ، عرض 2cm و ارتفاع 2cm رسم کنید.

- با چند مکعب واحد می توان داخل این مکعب مستطیل را پر کرد؟ حجم شکل تشکیل شده چقدر است؟
- اگر داخل مکعب مستطیل مذکور را بار دیگر با یک قطار مکعب های واحد دیگر پر کنیم، چه شکلی به دست می آید؟ و حجم آن چقدر است؟
- چه رابطه بین طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل برای محاسبه حجم می توان دریافت؟
- اگر ده قطار مکعب های واحد دیگر را داخل مکعب مستطیل اولیه قرار دهیم حجم شکل تشکیل شده چقدر است؟
- آیا می توانید فورمولی برای محاسبه حجم مکعب مستطیل ارائه کنید؟ از فعالیت فوق می دانیم که:

حجم مکعب مستطیل که طول آن ℓ ، عرض آن w و ارتفاع آن h باشد مساوی است به:

$$V = \ell \times w \times h$$

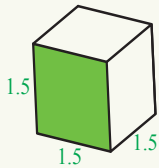
$$V = a \times a \times a = a^3$$

مثال 1: حجم مکعب مقابل را دریافت کنید.

$$V = a \times a \times a = a^3$$

$$V = 1.5 \times 1.5 \times 1.5$$

$$V = 3.375 \text{ cm}^3$$



مثال 2: حجم یک مکعب مستطیل 24 متر مکعب و مساحت قاعده آن 8 متر مربع است.

ارتفاع این مکعب چند متر است؟

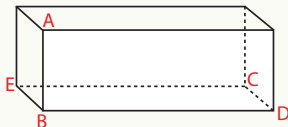
$$V = \ell \times w \times h$$

$$24 = 8 \times h$$

$$h = 24 \div 8 = 3 \text{ m}$$

شما می دانید که در هر مکعب مستطیل قطعه خطی که دو رأس مقابل را با هم وصل می کند قطر مکعب مستطیل نامیده می شود. برای دریافت آن فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت



- در شکل مقابل طول ضلع های \overline{AB} , \overline{BD} و \overline{BE} را به ترتیب a , b و c نامگذاری کنید.

• رأس A را به C و رأس C را به B طوری وصل کنید تا یک مثلث قائم الزاویه تشکیل شود.

• در مثلث قائم الزاویه ABC وتر آن \overline{AC} است برای آن رابطه فیثاغورث را بنویسید.

• چون تمام سطح‌های یک مکعب مستطیل، مستطیل شکل بوده و دو به دو با هم انطباق پذیر اند؛ پس $\overline{BE} = \overline{DC}$.

• در مثلث قائم الزاویه BCD وتر آن \overline{BC} بوده و با استفاده از قضیه فیثاغورث طول ضلع BC را دریافت و در رابطه قبلی وضع کنید.
از فعالیت فوق می‌یابیم که:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

اگر در یک مکعب مستطیل $a=b=c$ باشد پس قطر مکعب قرار زیر به دست می‌آید:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \overline{AC} = a\sqrt{3}$$

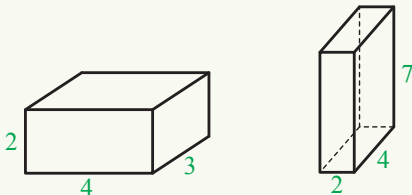
مثال: قطر مکعب مستطیلی را به ابعاد 2cm ، 3cm و 6cm محاسبه کنید.

حل: با قرار دادن $a = 2\text{cm}$ ، $b = 3\text{cm}$ و $c = 6\text{cm}$ در فرمول قطر، طول ضلع \overline{AC} را به دست می‌آوریم:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7\text{cm}$$

تمرین

- 1- طول سنگ کاری یک دیوار 60cm، عرض آن 30cm و ارتفاع آن 120cm است. حجم آن را به سانتی متر مکعب دریافت کنید.
- 2- اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب 3 برابر شوند، حجم مکعب چند برابر می‌شود؟
- 3- مساحت کل و حجم مکعب مستطیل‌های زیر را به دست آورید.

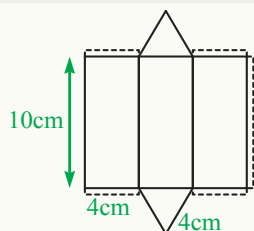


- 4- اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب را دو برابر کنیم، چه تغییری در طول قطر آن به وجود می‌آید؟



آیا تا به حال فکر کرده‌اید خیمه‌هایی که در آن زنده‌گی می‌کنند چه شکل هندسی را دارا اند؟

فعالیت



شکل مقابل را روی یک کاغذ به اندازه‌های داده شده رسم کنید. پس از جدا کردن شکل از کاغذ، کاغذ را به امتداد خطوط طوری قات نمایید تا یک جسم بسته به وجود بیاید.

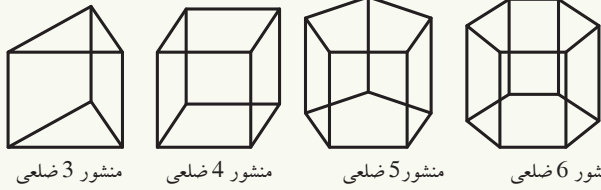
- شکل تشکیل شده کدام شکل هندسی است؟
- در شکل فوق چند سطح و چند قاعده را مشاهده می‌کنید؟
- مساحت هر یک از مستطیل‌های مساوی فوق را به دست آورید.
- مساحت دو قاعدهٔ مثلثی فوق را دریافت کنید.
- مجموع دو مساحت به دست آمده در فوق چه چیزی را نشان می‌دهد؟

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

تعریف

منشور جسم منظم هندسی است که سطوح مقابل آن با هم مساوی و موازی بوده و زوایای سطوح مقابل آن باهم انطباق پذیر اند. سطوح جانبی منشور مستطیل شکل اند و مجموع مساحت‌های این مستطیل‌ها مساحت سطوح جانبی منشور نامیده می‌شود. اگر محیط قاعده را در ارتفاع آن ضرب کنیم مساحت سطوح جانبی به دست می‌آید. و با جمع کردن مساحت سطوح جانبی با مساحت‌های قاعدتین مساحت کلی منشور حاصل می‌شود. اگر سطح‌های منشور بر قاعده عمود باشد، آن را منشور قائم می‌نامند.

منشورها را بر اساس شکل چند ضلعی قاعده‌های آن‌ها نام‌گذاری می‌کنند.



منشور 3 ضلعی منشور 4 ضلعی منشور 5 ضلعی منشور 6 ضلعی



کتاب ریاضی خود و هم‌صنفی‌های خود را گرفته طوری که در شکل مقابل می‌بینید بالای هم قرار دهید. شکل تشکیل شده یک منشور مستطیلی یا مکعب مستطیل می‌شود. در اینجا به ملاحظه می‌رسد که حجم مکعب مستطیل مذکور مساوی به مجموع حجم کتاب‌ها می‌باشد؛ یعنی $V=B \times h$

گونیه‌های خود را روی هم قرار دهید. یک منشور مثلثی به دست می‌آید که حجم آن مساوی به مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است؛ که در آن B مساحت قاعده و h ارتفاع است.
مثال: مساحت کل و حجم منشور 3 ضلعی را پیدا کنید که قاعده آن یک مثلث متساوی الاضلاع به طول 2cm و ارتفاع آن 4cm است.

حل: در قدم اول ارتفاع مثلث (قاعده منشور)؛ یعنی AH را دریافت می‌کنیم.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH^2 = (2)^2 - (1)^2 \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$

$$\text{مساحت یک سطح جانبی} = 2 \times 4 = 8\text{cm}^2$$

$$\text{مساحت سه سطح جانبی} = 3 \times 8 = 24\text{cm}^2$$

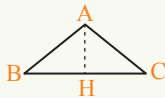
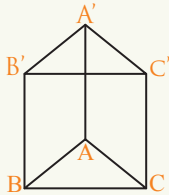
$$\text{مساحت قاعده} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\text{مساحت دو قاعده} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت کلی} = \text{مساحت سطوح جانبی} + \text{مساحت قاعدتین}$$

$$\text{مساحت کلی} = 24 + 2\sqrt{3}$$

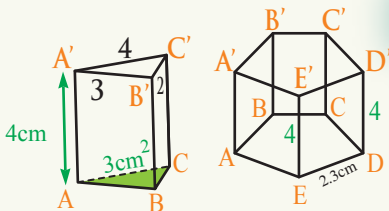
$$V = 4\sqrt{3}$$



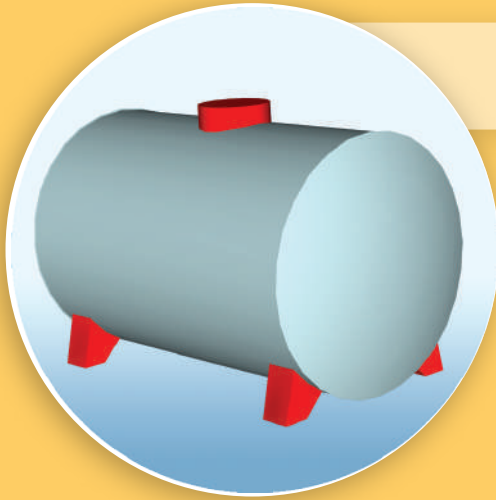
تمرین

مساحت کلی و حجم منشورهای مقابل را محاسبه کنید:

$$S_{(ABCD)} = 12.92\text{cm}^2 \quad S_{(ABC)} = 3\text{cm}^2$$



مساحت و حجم استوانه



بسیاری از وسایلی که در زنده گی روزانه با آن سرو کار داریم استوانه یی شکل است. مثال: گیلای آب، نل آب و غیره...
آیا می توانید چند شی استوانه یی شکل دیگر را نام ببرید؟

فعالیت

- طول ارتفاع یک استوانه قائم مساوی به 5cm و شعاع قاعده آن 2cm است. به امتداد ارتفاع، استوانه باز شده آن را رسم کنید.
- طول و عرض مستطیل حاصله چند است؟
 - مساحت مستطیل را به دست آورید.
 - مساحت این مستطیل چه رابطه با مساحت سطح جانبی استوانه دارد؟
 - مساحت هر یک از قاعده های استوانه را با در نظر داشت شعاع قاعده (2cm) دریابید.
 - مساحت کلی استوانه را حساب کنید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می توان نتیجه گرفت:

تعریف

استوانه قائم از دو قاعده دایروی انطباق پذیر و یک سطح جانبی که بر قاعده ها عمود اند تشکیل شده است. اگر ارتفاع آن را به h ، شعاع قاعده آن را به r ، مساحت سطوح جانبی آن را به S و مساحت کلی را به A نشان دهیم:

$$\text{مساحت سطح جانبی} = 2\pi r \times h$$

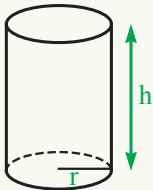
$$\text{مساحت قاعدتین} = 2\pi r^2$$

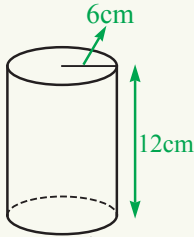
مساحت کلی استوانه

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$$

$$A = 2\pi r(r + h)$$

$$\pi = 3.14$$





مثال 1: مساحت کلی استوانه مقابل را محاسبه کنید.

حل: $A = 2\pi r(r + h) = 2 \times 3.14(6)(6 + 12)$

$$A = 6.28 \times 6(18) = 37.68(18)$$

$$A = 678.24 \text{ cm}^2$$

یادداشت: برای محاسبه حجم منشور ابتدا مساحت قاعده را محاسبه و در ارتفاع آن ضرب کردیم. برای پیدا کردن حجم استوانه نیز مساحت قاعده دایروی را در ارتفاع آن ضرب می کنیم. اگر حجم استوانه را به V نشان دهیم داریم که: $V = \pi r^2 \times h$

مثال 2: هرگاه حجم یک ماشین 4 سلندره، که قطر هر سلندر آن 8cm است مساوی به 1600 cm^3 باشد ارتفاع هر سلندر چند است؟

حل: چون $r=4 \text{ cm}$ ، $h=?$ ، $V=1600 \text{ cm}^3$ است، پس با استفاده از فرمول برای 4 سلندر داریم:



$$V = 4(\pi r^2 \cdot h)$$

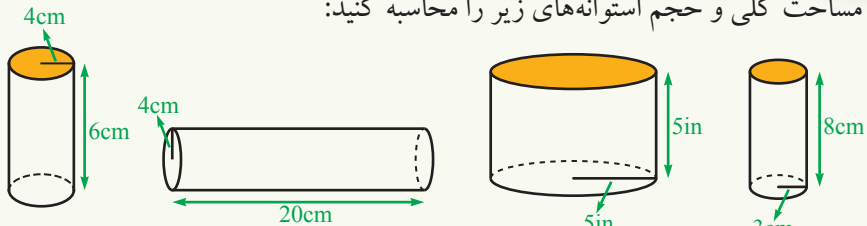
$$1600 = 4(\pi \cdot 16 \cdot h)$$

$$1600 = 200.96h$$

$$h = \frac{1600}{200.96} = 7.96 \text{ cm}$$

تمرین

1- مساحت کلی و حجم استوانه های زیر را محاسبه کنید:



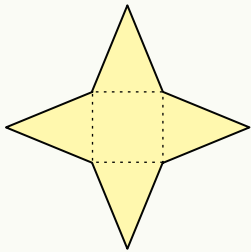
- 2- هرگاه شعاع قاعده یک استوانه 3 برابر شود، حجم آن به کدام اندازه تغییر می کند؟
- 3- یک ذخیره آب که شکل استوانه را دارد شعاع قاعده آن 5m و ارتفاع آن 8m است. در این ذخیره آب چند متر مکعب آب جا می گیرد؟
- 4- هرگاه ارتفاع یک استوانه دو برابر شود، اندازه سطح جانبی آن چه تغییری می کند؟

مساحت و حجم هرم



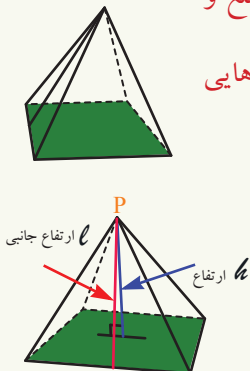
آیا تا به حال فکر کرده‌اید که چند سال طول کشید تا مصری‌ها اهرام مصر را اعمار کردند؟

فعالیت



- شکل مقابل را روی یک کاغذ رسم کنید.
 - اگر رأس‌های مثلث‌ها را با هم وصل کنید، چه شکلی به دست می‌آید؟
 - با توجه به شکل، آیا می‌توانید روشی را برای پیدا کردن مساحت سطوح جانبی هرم بیان کنید؟
- از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

تعریف



هرم یک جسم هندسی چند وجهی است که قاعده آن یک مضلع و سطوح جانبی آن مثلث‌ها بوده و در یک رأس مشترک اند. مساحت سطوح جانبی مساوی است؛ به مجموع مساحت‌های مثلث‌هایی که وجه جانبی آن را تشکیل نموده است؛ بنابر آن:

$$s = \frac{1}{2} \times nb \ell$$

n عبارت از تعداد اضلاع قاعده، b عبارت از قاعده مثلث است

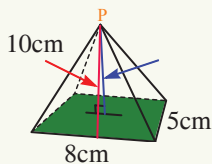
که ارتفاع جانبی بالای آن ترسیم می‌گردد و ℓ ارتفاع جانبی هرم می‌باشد.

مساحت سطوح جانبی + مساحت قاعده = مساحت کلی هرم

$$A = B + S$$

ارتفاع هرم قطعه خطی است که از رأس هرم بر قاعده آن عمود باشد.

مثال: طول، عرض و ارتفاع جانبی هرم در شکل زیر داده شده است مساحت کلی آن را حساب کنید.



حل: چون قاعده هرم مستطیلی است و چهار وجه دارد، پس:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8\text{cm} \cdot 10\text{cm} \quad , \quad S = 160\text{cm}^2$$

چون قاعده هرم مستطیلی است، پس:

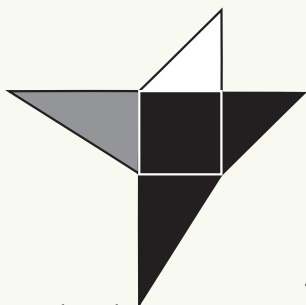
$$B = 8\text{cm} \cdot 5\text{cm} = 40\text{cm}^2$$

$$A = S + B \Rightarrow A = 160\text{cm}^2 + 40\text{cm}^2$$

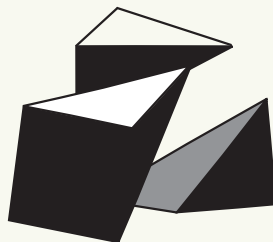
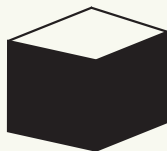
$$A = 200\text{cm}^2$$

فعالیت

• سه قطعه کاغذ سفید را در نظر گرفته و شکل مقابل را در هر کدام آن رسم کنید.



- هر سه قطعه کاغذ را برش و سه هرم از آن بسازید.
- هرم‌های به دست آمده را طوری کنار همدیگر قرار دهید تا از آن یک مکعب به دست آید؟
- حجم مکعب و حجم هرم را باهم مقایسه کنید.



$$V = \frac{1}{3} \cdot 144\text{cm}^2 \cdot \sqrt{28}\text{cm}$$

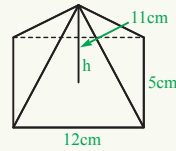
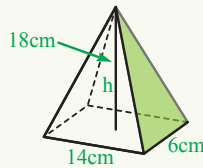
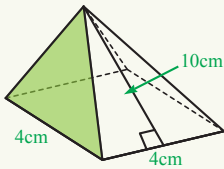
$$V = \frac{1}{3} \cdot 144\text{cm}^2 \cdot 5.29\text{cm}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 761.76\text{cm}^3$$

$$V = 253.92\text{cm}^3$$

تمرین

- 1- حجم هرمی را دریافت کنید که قاعده آن مربعی بوده، طول ضلع آن 40m و ارتفاع آن 27m باشد.
- 2- چند متر مکعب هوا داخل خیمه‌یی به شکل هرم مربع القاعده موجود است؟ در صورتی که طول ضلع مربع 7m و ارتفاع هرم 5m باشد.
- 3- حجم اشکال زیر را دریافت کنید:



مساحت و حجم مخروط



آیا تا به حال فکر کرده اید که یک مخروط از دوران کدام نوع مثلث به دور یک ضلع آن پدید می آید؟

تعریف

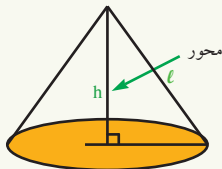
مخروط قائم جسمى است که از دوران یک مثلث قائم الزاویه به اطراف یکی از اضلاع قائم آن حاصل می شود. قطعه خطی که رأس مخروط را به مرکز قاعده آن وصل می کند به نام محور مخروط یاد می شود. اگر محور بر قاعده عمود باشد مخروط قائم و در غیر آن مایل نامیده می شود. مساحت سطح جانبی و کلی مخروط توسط فرمول زیر به دست می آید:
 $A = B + S = \pi r^2 + \pi r \cdot l = \pi r(r + l)$. $S = \pi r l$ مساحت جانبی، l طول مولد مخروط است.

فعالیت

- یک جسم استوانه‌یی و یک جسم مخروطی را که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، بسازید. جسم مخروطی را از سرمه ریگ پر کرده و در جسم استوانه‌یی خالی کنید.
- با چند مخروطی پر از سرمه ریگ استوانه به شکل کامل پر می گردد.
- حجم استوانه و حجم مخروط چه رابطه‌یی با هم دارند؟

از فعالیت فوق داریم که:

حجم استوانه سه چند حجم مخروط است؛ پس حجم مخروط $\frac{1}{3}$ حصه حجم استوانه است که دارای عین قاعده و ارتفاع باشند.



حجم استوانه $V = \frac{1}{3}$ حجم مخروط

چون $\pi r^2 h$ حجم استوانه است، پس:
 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$

مثال 1: یک خرمن گندم مخروطی شکل دارای ارتفاع $1.5m$ و قطر قاعده $3m$ است. مساحت کلی آن را دریافت نمایید.

حل: $h = 1.5m$, $d = 3m$, $r = 1.5m$

چون قاعده مخروط دایروی است؛ پس:

$$B = \pi r^2 = 3.14(1.5)^2 = 7.065m^2$$

حال برای دریافت مساحت سطح جانبی باید وتر مثلث قائم الزاویه را حساب کنید:

$$\overline{SA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OS}^2$$

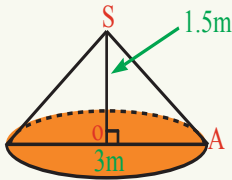
$$\overline{SA}^2 = (1.5m)^2 + (1.5m)^2 = 4.5m^2$$

$$\overline{SA} = 2.12$$

$$S = \pi r \ell = 3.14 \times 1.5 \times 2.12$$

$$S = 4.17 \times 2.12 = 9.9852m^2$$

مساحت کلی $A = B + S = 7.065 + 9.9852 = 17.0502m^2$



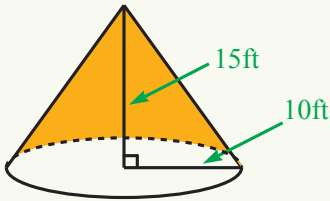
مثال 2: حجم مخروط زیر را محاسبه کنید:

حل: $h = 15ft$, $r = 10ft$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \times 3.14(10)^2 \times 15$$

$$V = \frac{1}{3} \times 4710 = 1570$$

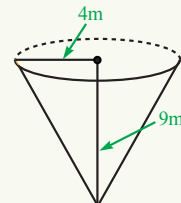
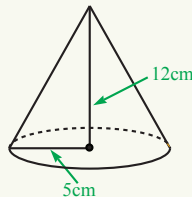
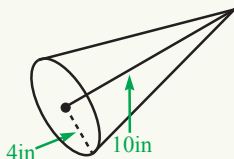
$$V = 1570ft^3$$



تمرین

1- توده ریگ مخروطی شکل دارای ارتفاع $2m$ و قطر $4m$ است، حجم ریگ آن را محاسبه کنید.

2- شعاع قاعده و ارتفاع هر مخروط داده شده است. حجم هر یک را حساب کنید.



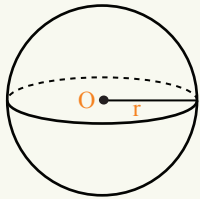


مساحت و حجم کره

آیا اشکالی و یا اجسامی در اطراف شما وجود دارد که شکل دایروی یا کره‌ای داشته باشند؟ نام بگیرید.

تعریف

کره، جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت متساوی الفاصله باشد. نقطه ثابت را مرکز و فاصله بین نقطه ثابت و تا سطح کره را به نام شعاع کره می‌نامند. اگر مساحت را به A و حجم را به V نشان دهیم داریم:



$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

مثال 1: مساحت سطح و حجم کره‌ی را دریافت نمایید که قطر آن 10cm باشد.

حل:

$$d = 10\text{cm}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{10\text{cm}}{2} = 5\text{cm}$$

$$A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (5)^2$$

$$= 12.56 \times 25 \Rightarrow A = 314\text{cm}^2$$

مساحت کره:

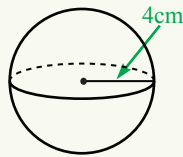
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (5)^3$$

حجم کره:

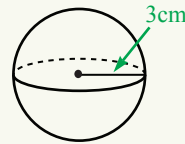
$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125 = \frac{4}{3} \times 392.5$$

$$= \frac{1570}{3} = 523.33\text{cm}^3 \quad \therefore V = 523.33\text{cm}^3$$

مثال 2: حجم هر یک از کره‌های زیر را که اجزای آن در شکل داده شده‌اند حساب کنید:



جز (b)



جز (a)

حل: جزء (a) $r = 3$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (3)^3$

حل: جزء (b) $V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 27 = \frac{4}{3} \times 84.78 \Rightarrow V = 113.04 \text{ cm}^3$

$r = 4$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (4)^3$

$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 64 = \frac{4}{3} \times 200.96 \Rightarrow V = 267.946 \text{ cm}^3$

تمرین

1- مساحت یک کره 36π سانتی متر مربع است.

الف: شعاع کره را به دست آورید. ب: حجم کره را محاسبه کنید.

2- در جدول زیر شعاع کره داده شده است، حجم و مساحت کره را محاسبه نموده و تحت ستون مربوطه در جدول آن بنویسید:

r	6cm	$6 \times \frac{3}{4} \text{ cm}$	9cm	12cm	314cm
A					
V					

3- اگر شعاع کره 2 برابر شود، حجم و مساحت آن چگونه تغییر می‌کند؟

• مکعب مستطیل

یک شش وجهی منظم هندسی است که همه سطوح آن مستطیل شکل بوده و مساحت‌های هر وجه مقابل آن دو به دو مساوی و موازی، زوایای مقابل آن دو به دو با هم قایمه باشند. اگر طول مکعب مستطیل را به ℓ ، عرض آن را به w و ارتفاع آن به h ارائه نماییم داریم:

مساحت جانبی آن عبارت است از: $S = 2(wh + h\ell)$

مساحت قاعدتین آن عبارت است از: $B = 2w\ell$

مساحت کلی آن عبارت است از: $A = 2(\ell w + \ell h + wh)$

حجم مکعب مستطیل: $V = \ell \times w \times h$

• مکعب

مکعب مستطیل که هر سه بعد (طول، عرض و ارتفاع) آن با هم مساوی باشند، آن را مکعب می‌نامیم. اگر مساحت آن را به A و حجم آن را به V نشان دهیم داریم که:

$$A = 6a^2$$

$$V = a^3$$

• منشور

جسم منظم هندسی است که سطوح متقابل آن با هم مساوی و موازی بوده و زوایای سطوح متقابل آن با هم انطباق پذیر اند.

• استوانه

استوانه قایم از دو قاعده انطباق پذیر و یک سطح جانبی که بر قاعده‌ها عمود اند تشکیل شده است. اگر حجم را به V و مساحت را به A نشان دهیم داریم که:

$$A = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 \times h$$

• هرم

هرم یک چند وجهی هندسی است که قاعده آن یک مضلع منظم و سطوح جانبی آن مثلث‌ها بوده و در یک رأس مشترک اند.

مساحت سطوح جانبی + مساحت قاعده = مساحت کلی هرم

$$A = B + S$$

ارتفاع هرم قطعه خطی است که از رأس هرم بر قاعده آن عمود باشد.

$$V = \frac{1}{3} B \times h$$

• مخروط

مخروط قائم جسمی است که از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه به اطراف یکی از اضلاع قائم آن حاصل می‌شود. قطعه خطی که رأس مخروط را به مرکز قاعده آن وصل می‌کند به نام محور مخروط یاد می‌شود. اگر محور مخروط بر قاعده آن عمود باشد مخروط قائم و در غیر آن مایل نامیده می‌شود.

$$A = \pi r^2 + \pi r \times l$$
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

• کره

جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت متساوی الفاصله باشد. نقطه ثابت را مرکز و فاصله بین نقطه ثابت تا سطح آن را به نام شعاع کره می‌نامند. اگر مساحت کره را به A و حجم کره را به V نشان دهیم داریم:

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

تمرین عمومی

- برای هر سؤال زیر چهار جواب داده شده است، دور جواب صحیح را حلقه بکشید:
 - 1- اگر محور استوانه بر قاعده آن عمود باشد، زاویه زیر را می‌سازد:

(a) حاده	(b) منفرجه
(c) قائم	(d) a و b درست است.
 - 2- ارتفاع هرم، قطعه خطی است که از رأس بر قاعده آن:

(a) موازی باشد	(b) مایل باشد
(c) عمود باشد	(d) هیچ کدام
 - 3- اگر ارتفاع یک مخروط که قاعده آن دایروی است 20cm و شعاع قاعده آن 10cm باشد حجم آن عبارت است از:

(a) 2093.3cm^3	(b) 2093.3cm^2
(c) 209.33cm^2	(d) 209.33cm^3
 - 4- اگر ابعاد یک مکعب مستطیل به ترتیب 3، 2 و 1 سانتی متر باشد طول قطر AC عبارت است از:

(a) 2	(b) $\sqrt{14}$
(c) $\sqrt{1}$	(d) 6
 - 5- فضایی را که یک جسم اشغال می‌کند به نام چه یاد می‌شود؟

(a) وزن جسم	(b) حجم جسم
(c) کتله جسم	(d) هر سه درست است
- جاهای خالی زیر را با کلمات مناسب پر کنید:
 - 1- مکعب مستطیل که طول، عرض و ارتفاع آن مساوی باشد عبارت از است.
 - 2- مکعب مستطیل یک منظم هندسی است که همه آن مکعب مستطیل شکل بوده و سطوح آن دو به دو با هم قائم باشند.
 - 3- استوانه قائم جسمی است که از دو قاعده انطباق پذیر و که بر قاعده‌ها عمود اند تشکیل شده است.
 - 4- حجم هرم حصه حجم بوده که دارای عین قاعده و اند.
 - 5- مخروط قائم جسمی است که از دوران یک مثلث به اطراف یک از قائم آن حاصل می‌شود.
- کدام یک از جمله‌های زیر صحیح و کدام یکی آن غلط است؟ در مقابل جمله صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله غلط حرف (غ) بگذارید:
 - 1- () در یک منشور با جمع کردن مساحت‌های دو قاعده با مساحت کلی مساحت

سطح جانبی به دست می آید.

- 2- () اگر استوانه به امتداد محور قطع و باز گردد یک هرم حاصل می شود.
 3- () اگر طول مکعب مستطیل a ، عرض آن b و ارتفاع آن c باشد حجم آن عبارت از abc است.
 4- () کره جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطه ثابت متساوی الفاصله باشد.
 5- () حجم مخروط $\frac{1}{5}$ حصه حجم استوانه است که دارای عین قاعده و ارتفاع باشد.

• سؤالهای زیر را حل کنید.

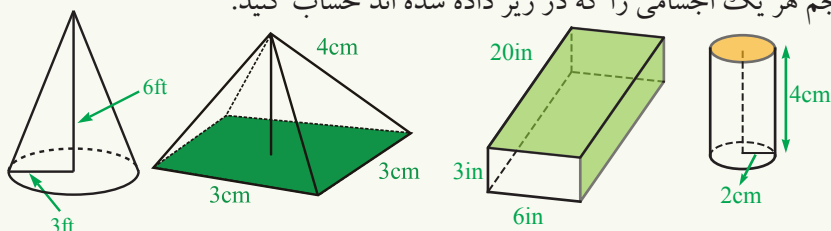
1- حجم و مساحت کلی مکعبهایی را که خط رأس آن قرار زیر داده شده است دریافت کنید:

- a) $24m$ b) $\sqrt{9}m$ c) $3\frac{3}{5}m$ d) $4\sqrt{27}$

2- قوطی شیر پودری که شکل استوانه‌ای دارد دارای شعاع قاعده $6cm$ و ارتفاع $12cm$ است. مساحت کلی و حجم آن را دریافت نمایید.

3- چند متر مکعب هوا داخل خیمه مربع القاعده موجود است، در صورتی که طول ضلع مربع و ارتفاع هرم $5m$ باشد.

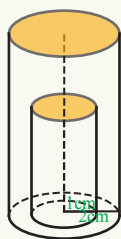
4- حجم هر یک اجسامی را که در زیر داده شده اند حساب کنید.



5- دو کره به ترتیب دارای شعاعهای $1cm$ و $2cm$ هستند.

الف: مساحت هر کدام از آنها را پیدا کنید. ب: حجم هر یک را به دست آورید.

6- با توجه به شکل مقابل، دو استوانه قایم را در نظر بگیرید که مرکز قاعده‌های آنها یکی باشد، طوری که شعاع استوانه بزرگ $2cm$ و استوانه کوچک $1cm$ باشد.



الف: نسبت مساحت سطح جانبی استوانه بزرگتر و مساحت سطح جانبی استوانه کوچکتر را دریابید.

ب: نسبت حجم استوانه بزرگتر و حجم استوانه کوچکتر چقدر است؟

7- زمین که تقریباً به شکل یک کره است، شعاع آن 6400 کیلو متر می باشد.

الف: مساحت سطح زمین را محاسبه کنید.

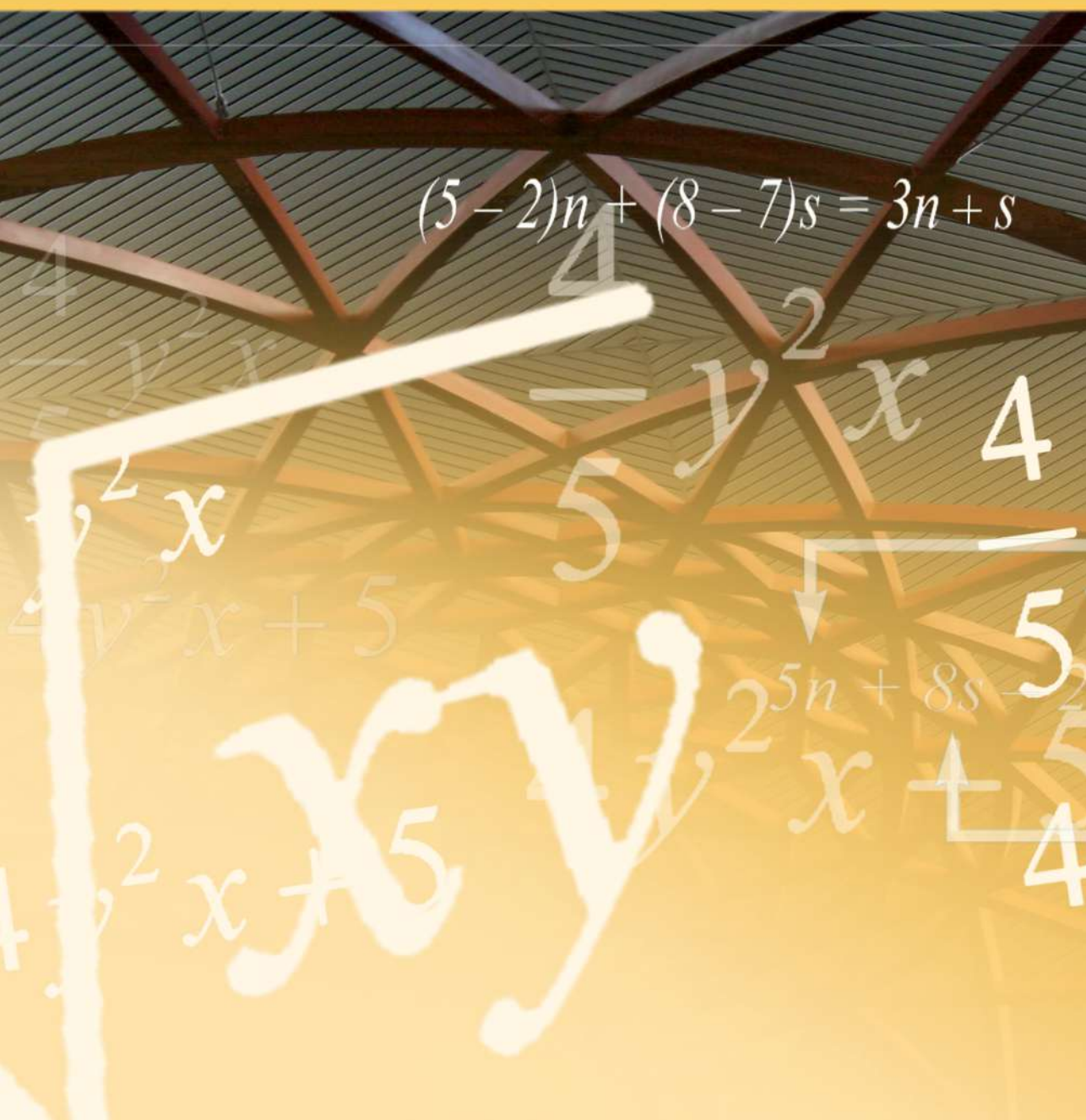
ب: حجم کره زمین را محاسبه کنید.

فصل هفتم

افاده‌های الجبری

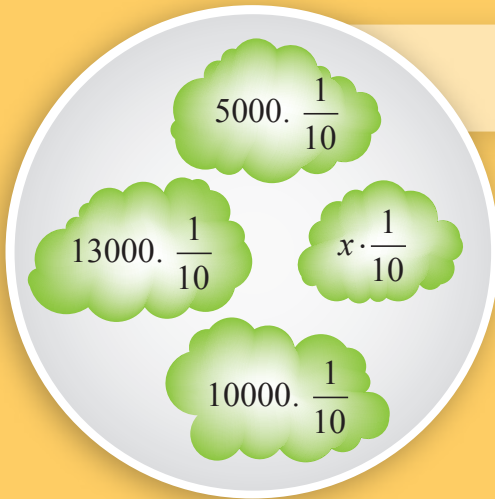
$$y^2 x$$
$$4y^2$$
$$n - 7s$$
$$y^2 x + 5$$
$$x$$

$$(5 - 2)n + (8 - 7)s = 3n + s$$



مفهوم متحول

یک نفر $\frac{1}{10}$ در آمد خود را به فقراً می‌دهد، این خبر را چگونه می‌توانیم به زبان ریاضی اعلان کنیم؟



فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:

طول ضلع مربع	2	1	3	10	$\frac{1}{10}$	9
محیط مربع	4×2					
مساحت مربع			3×3			

- $4 \times a$ یعنی چه؟ برای ساده کردن $4 \times a$ را به شکل $4a$ می‌نویسیم.
- آیا می‌توان مساحت هر مربع را به شکل a^2 نشان داد؟
- آیا می‌توان برای نشان دادن مساحت مربع از حرف دیگر استفاده کرد؟
- اگر محیط را به P و مساحت را به S نشان دهیم، قاعده‌ی پیدا کردن محیط و مساحت مربع دریافت کنید.
- محیط و مساحت مربعی به ضلع 4 واحد با قرار دادن 4 به جای a به دست بیاورید.
- آیا می‌توان به جای a هر عدد مثبت دیگر را قرار داد؟ این عدد مثبت چه چیزی را نشان می‌دهد؟

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

برای بیان کلی قاعده و یا قانون از حروف می‌توان استفاده کرد. با در نظر داشت این که قیمت‌های مختلف را می‌توان به جای حروف قرارداد که در این حالت حروف را متحول

می‌نامیم.

مثال 1: یک عدد a به علاوه عدد 5 را به یک افاده نوشته و مقادیر آن را برای 5, -3, $a = 2$ محاسبه کنید.

حل: افاده فوق عبارت است از $a + 5$ که برای قیمت‌های مختلف a جدول زیر را ترتیب می‌دهیم:

a	2	-3	5
$a + 5$	$2 + 5 = 7$	$-3 + 5 = 2$	$5 + 5 = 10$

مثال 2: جمله "حاصل ضرب یک عدد ضرب در خودش مساوی است با همان عدد به توان 2". این عبارت را به یک افاده نوشته و با دو مثال عددی نشان دهید.

حل: افاده حروفی عبارت است از: $a \times a = a^2$

اگر $a = 2$ باشد؛ پس: $2 \times 2 = 2^2 = 4$ است.

اگر $a = \frac{1}{2}$ باشد؛ پس: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ می‌شود.

تمرین

جمله‌های زیر را با انتخاب حروف مناسب به صورت افاده حرفی نشان دهید و برای هر یک 3 مثال عددی بیاورید.

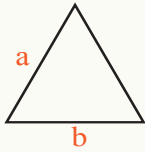
- هر عدد به توان یک مساوی به خود عدد است.
- یک به توان هر عدد مساوی به یک است.
- هر عدد به توان صفر مساوی به یک است.
- صفر به توان هر عدد مساوی به صفر است.
- اندازه حجم یک مکعب مساوی به اندازه ضلع آن به توان 3 می‌باشد.
- آیا می‌توانید رابطه‌های دیگری مثل روابط فوق بنویسید؟ دو مثال بیاورید.

افاده‌های الجبری

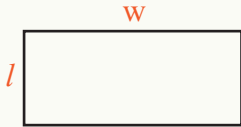


یک بانک اعلام کرد که نرخ ربح سالانه بانک 10% است. ناصر با خود فکر کرد که چقدر سرمایه را به چه مدت در بانک بگذارد تا سرمایه مذکور با مفادش دو برابر شود؟

فعالیت



- در مثلث متساوی الساقین مقابل، اندازه ساق را به a و قاعده را به b نشان می‌دهیم. چرا هر دو ساق را به a نشان می‌دهیم؟
- محیط مثلث را با یک فورمول بنویسید. آن را برای $a = 4$ و $b = 5$ محاسبه کنید.



- محیط و مساحت مستطیل را به صورت یک فورمول بنویسید.
- مساحت و محیط مستطیل را برای $w = \frac{3}{4}$ و $l = \frac{2}{3}$ به دست آورید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

افاده‌هایی مثل $2a+b$, $3a-b$, $4a$, $\frac{4a-b}{2}$ و a^2 و $\sqrt{4a}$ را که از ترکیب عملیه‌هایی چون: جمع، تفریق، ضرب تقسیم، توان و جذر با اعداد از یک یا چند متحول تشکیل شده باشند، افاده‌های الجبری (عبارت‌های الجبری) می‌نامند. قیمت عددی یک افاده الجبری را برای قیمت‌های مختلف متحول می‌توان دریافت کرد.

مثال 1: قیمت افاده الجبری $2b$ را به قیمت‌های داده شده 2 , -2 , -3 , 4 , $\frac{3}{2}$ دریافت کنید.

حل:

b	2	4	-2	-3	$\frac{3}{2}$
2b	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-3) = -6$	$2 \times \frac{3}{2} = 3$

مثال 2: اگر ربح سالانه یک بانک 10% باشد. قاعده‌یی که بانک برای پرداخت ربح به سرمایه‌گذاران می‌دهد آن را به صورت افاده الجبری بنویسید.

حل: اگر ربح را به P، سرمایه را به A، نرخ را به r و مدت را به t نشان دهیم؛ پس می‌توان نوشت:

$$P = A \times R \times T$$

تمرین

1- قیمت عددی هر افاده الجبری را به قیمت‌های داده شده حساب کنید.

x	1	6	-2
$x - \frac{1}{2}$			

a	2	-5	3
b	$-\frac{1}{2}$	9	5
$b(a+7)$			

2- پروین هر روز چند صفحه از کتاب تاریخ را می‌خواند. اگر پروین در یک روز x صفحه کتاب را بخواند، تعداد صفحاتی که پروین در یک هفته می‌خواند با یک افاده الجبری نشان دهید.

ساده کردن افاده‌های الجبری

x : کتابچه

y : قلم

$$2x + 3x = 5x$$

$$3x + 2y = ?$$





مریم گفت: دو کتابچه داشتم، سه کتابچه دیگر پدرم برایم خرید حال 5 کتابچه دارم.
کیبر گفت: من هم سه کتابچه داشتم، 2 قلم برایم پدرم خرید. چه می توانم بگویم؟






فعالیت

عبارت‌های زیر را ساده و تکمیل کنید.

$$5 \times 3 + 2 \times 3 = (5 + 2) \times 3 = 7 \times 3$$

$$8 \times 0.5 - 2 \times 0.5 = (\dots - \dots) \times \dots = \dots \times \dots = \dots$$

$$2 \text{  + 3 \text{  = (\dots + \dots) \text{  = \dots \text{ $$

$$4 \text{  + 3 \text{  + 2 \text{  = (\dots + \dots + \dots) \text{  = \dots \text{ $$

$$2a + 3a = (\dots + \dots)a = \dots a$$

$$-3y + 4y = (\dots + \dots)y = \dots y$$

$$2ax + 3ax = (\dots + \dots) \times ax = \dots ax$$

• در ساده کردن عبارت‌های فوق از کدام خاصیت استفاده کردیم؟

• آیا می‌توانید $3 \text{  + 2 \text{ $ یا $3x + 2y$ را ساده یا جمع کنید؟

• آیا می‌توان افاده $2b + 3b$ را ساده یا جمع نماییم؟

از فعالیت فوق می توان چنین نتیجه گرفت:

در افاده های الجبری بالا $2ax$ و $2a$ ، $-3y$ افاده یک حده الجبری گفته می شود. حدود که تنها تفاوت آن ها در ضریب های آن باشند؛ یعنی ضرایب آن متفاوت ولی حروف و توان های حروف یکسان باشند، حدود مشابه گفته می شوند. برای ساده کردن افاده های الجبری حدود مشابه را مد نظر می گیریم و تنها این حدود مشابه را می توان جمع و تفریق کرد.

مثال 1: افاده زیر را ساده کنید:

$$5n + 8s - 2n - 7s$$

حل: چون تنها تفاوت $5n$ و $-2n$ در ضریب های است که در متحول ضرب می شود پس حدود مشابه هستند به همین ترتیب $-7s$ و $8s$ نیز با هم مشابه اند که در زیر نشان داده شده اند.

$$5n + 8s - 2n - 7s = (5 - 2)n + (8 - 7)s = 3n + s$$

چون s و $3n$ با هم مشابه نیستند. پس عبارت را بیشتر از این نمی توان ساده کرد.

مثال 2: افاده های $5xy^2 + 4yz - 8$ و $xy^2 + 3yz + 8$ را جمع کنید.

$$\begin{array}{r} 5xy^2 + 4yz - 8 \\ + \quad xy^2 + 3yz + 8 \\ \hline 6xy^2 + 7yz \end{array}$$

تمرین

1- افاده های الجبری زیر را ساده کنید:

a) $5a + 7d - 4a + 3d$

c) $3d + 2c + 4d + 3c - 5d$

e) $9xy - 7x + 5 - x^2 + 2xy + 2x^2 - 2$

g) $3x^2 + 6xy + 4y$

+ $-x^2 + 4xy + 9y$

b) $8c + 3k + 5k - 8k$

d) $4b - 5 - 3b + 2$

f) $3a^2 - 7a - 2 - 5a^2 + 3a + 17$

h) $3xy - 2yz + 4zx$

+ $-2xy + yz + 32zx$

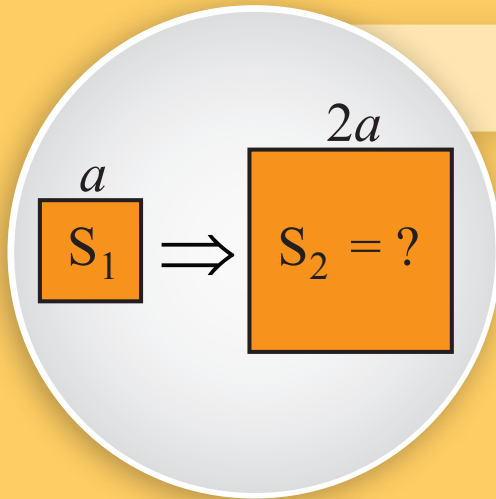
2- کدام یک از افاده های زیر با هم مشابه اند:

a) $-4x^2y$, $2x^3y^3$

b) $3xy^2$, $8x^3y$

c) $3x^2$, $9x^2$

ضرب افاده‌های یک حده



مربعی به ضلع a داریم اگر ضلع‌های مربع دو برابر شود، نسبت مساحت مربع اول بر مربع دوم چند است؟

فعالیت

تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$(3x^3y^2) \cdot (2x^2y) = (3 \times 2)x^3y^2 \cdot x^2y = 6x^{3+2}y^{2+1} = 6x^5y^3$$

$$(4a^2b) \cdot (6ab^2) = (4 \times 6)a^2b \cdot ab^2 = 24a^3b^3$$

- در این حاصل ضرب از کدام خاصیت عملیه ضرب و قاعده ضرب طاق‌ها استفاده شده است؟
- ضریب عددی عوامل ضربی طرف چپ مساوات و ضریب عددی افاده الجبری طرف راست مساوات باهم چه رابطه دارند؟
- توان‌های هریک از متحول‌ها در دو افاده الجبری با هم چه رابطه دارند؟

• با در نظر داشت قواعد فوق افاده‌های زیر را ساده سازید:

$$3x^2y^3z^2 \times 4x^2y^3z = \dots$$

$$-9x^3a^2 \times \frac{1}{5}ya^3 = \dots$$

در فعالیت بالا افاده‌های چون $3x^3y^2$, $2x^2y$, $6ab^2$, $4a^2b$ را که از ضرب عدد در متحول با توان‌های طبیعی یا صفر تشکیل شده اند یک حده و عددی را که در متحول‌ها ضرب می‌شوند به نام ضریب یک حده یاد می‌کنند.
در ضرب یک حده‌ها باید ضرایب آن‌ها را در همدیگر ضرب کنیم و توان‌های متحول‌های مشابه را با هم جمع کنیم.

مثال 1: افاده‌های الجبری $6b^3$, $-4ab$ را با هم ضرب کنید.

حل: $(-4ab)(6b^3) = (-4 \cdot 6)abb^3 = -24ab^4$

مثال 2: کدام یک از افاده‌های الجبری زیر یک حده اند؟

a) $\frac{4}{5}y^2x$

b) $4y^2x + 5$

c) $\frac{4y^2}{x}$

d) \sqrt{xy}

حل: c, a و d هر یک، یک حده اند.

تمرین

حاصل ضرب یک حده‌های زیر را حساب کنید:

a) $(-5x^2ay) \times (3ax)$

b) $(-2xy^2z) \times (x^2z)$

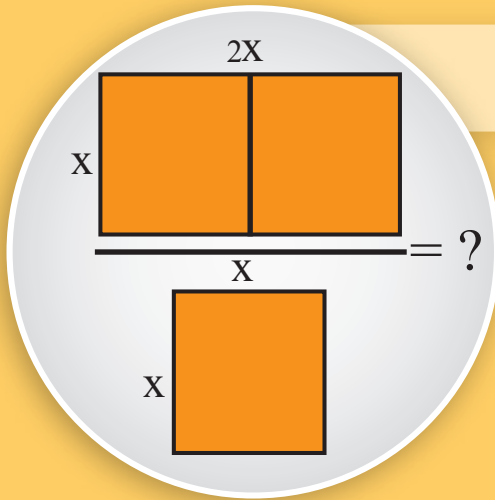
c) $-2xy^2 \times (-3a^2)$

d) $(-3x^2) \times (-5xy^2)$

e) $(-\frac{1}{3}x^2y) \times (-\frac{1}{2}xy^3)$

تقسیم افاده‌های یک حده

مساحت مستطیل به طول $2x$ و عرض x ، چند برابر مساحت مربع به طول x است؟



فعالیت

جاهای خالی را پر کنید.

$$\frac{3y^5}{y^2} \begin{cases} = \frac{3y \square y \square}{y^2} \\ = 3y \square - \square = 3y \square \end{cases}$$

$$\frac{6x^5 y^5}{7x^2 y^3} \begin{cases} = \frac{6x \square x \square y \square y \square}{7x^2 y^3} = \frac{6}{7} x \square y \square \\ = \frac{6}{7} x \square - \square y \square - \square = \frac{6}{7} x \square y \square \end{cases}$$

- دو روش تقسیم یک حده‌ها را با هم مقایسه کنید. در هر روش از چه خاصیت‌ها استفاده کرده ایم.
- ضریب توان‌های متحول در دو طرف راست و چپ با هم چه رابطه دارند؟

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

در تقسیم یک حده‌ها از قاعده ساده کردن کسرها استفاده می‌شود. ابتدا ضریب عددی یک حده‌ها را بالای یکدیگر تقسیم نموده و حدهای باقیمانده را با استفاده از قوانین طاقت ساده می‌کنیم.

مثال 1: یک حده $-20x^4y^3z$ را بر یک حده $5x^3y^2z$ تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{-20x^4y^3z}{5x^3y^2z} &= \frac{-20}{5} \times \frac{x^4}{x^3} \times \frac{y^3}{y^2} \times \frac{z}{z} \\ &= -4xy \end{aligned}$$

حل:

مثال 2: افاده الجبری $\frac{12x^3 + 8x^2}{2x}$ را ساده کنید.

$$\begin{aligned} \frac{12x^3 + 8x^2}{2x} &= \frac{12x^3}{2x} + \frac{8x^2}{2x} \\ &= 6x^2 + 4x \end{aligned}$$

حل:

تمرین

ساده کنید:

a) $\frac{-a^4b^8}{a^4b^7}$

b) $\frac{a^4b^2}{a^6b^2}$

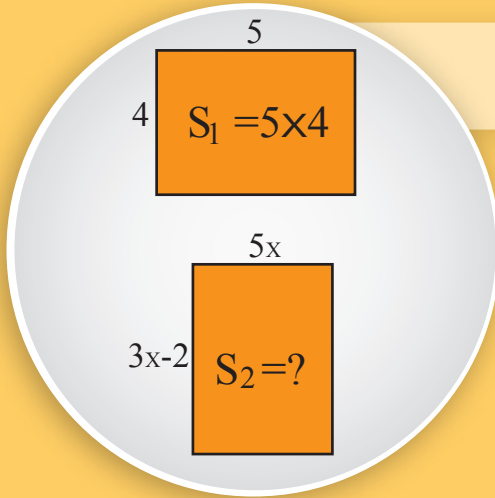
c) $\frac{10m^4}{30m}$

d) $\frac{-9c^4d^5}{-45c^3d^3}$

e) $\frac{6xy^2 - 3xy + 2x^2y}{xy}$

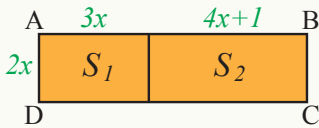
f) $\frac{4y^2 + 6}{2}$

ضرب افاده‌های الجبری



می‌دانیم مساحت یک مستطیل را که طول آن 5 سانتی متر و عرض آن 4 سانتی متر باشد چگونه پیدا کنیم. آیا مساحت مستطیلی را که طول آن $3x-2$ و عرض آن $5x$ است نیز می‌توان پیدا کرد؟

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید:

- مساحت مستطیل S_1 را با یک افاده الجبری بنویسید.
- مساحت مستطیل S_2 را با یک افاده الجبری بنویسید.
- مساحت مستطیل $ABCD$ را با یک افاده الجبری بنویسید و آن را به S نشان دهید.
- چه رابطه بین S_1 ، S_2 و S وجود دارد؟

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

برای ضرب کردن افاده یک حده در یک افاده الجبری از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع می‌توان استفاده کرد.

مثال 1: حاصل ضرب یک حده $-5ax^2$ را در افاده الجبری $x^2 - a^2$ به دست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} -5ax^2(x^2 - a^2) &= (-5ax^2) \times x^2 + (-5ax^2) \times (-a^2) \\ &= -5ax^4 + 5a^3x^2 \end{aligned}$$

مثال 2: $3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) = ?$

حل:

$$\begin{aligned} 3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) &= 3a^2(a^3) + [3a^2(-2a^2)] + 3a^2(6a) \\ &= 3a^5 - 6a^4 + 18a^3 \end{aligned}$$

فعالیت

	$3x$	$2b$
$2x$	S_1	S_3
b	S_2	S_4

شکل مقابل را در نظر بگیرید:

- مساحت مستطیل S_1 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_2 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_3 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_4 را دریافت کنید.
- اگر طول مستطیل $3x+2b$ و عرض آن $2x+b$ باشد. مساحت مستطیل بزرگ را دریافت کنید و آن را به S نشان دهید.
- رابطه بین S ، را با مجموع S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 بنویسید.

از فعالیت فوق می توان بیان کرد:

برای ضرب کردن دو افاده الجبری، با استفاده از خاصیت توزیع پذیری ضرب بالای جمع، یک به یک تمام حدود افاده اول را در حدود افاده دوم ضرب می کنیم.

مثال 1: حاصل ضرب دو حده $x+2$ در دو حده $x-1$ را به دست آورید.

$$(x+2)(x-1) = x(x-1) + 2(x-1)$$

$$= x^2 - x + 2x - 2$$

$$= x^2 + x - 2$$

حل:

مثال 2: $(x+2)(x-2)$ را ساده کنید.

$$(x+2)(x-2) = x(x-2) + 2(x-2)$$

$$= x^2 - 2x + 2x - 4$$

$$= x^2 - 4$$

حل:

مثال 3: حاصل ضرب دو حده $(x-2)$ را در سه حده (x^3+5x-7) به دست آورید.

$$(x-2)(x^3+5x-7) = x \cdot x^3 + x \cdot 5x + x(-7) - 2x^3 - 2(5x) - 2(-7)$$

$$= x^4 + 5x^2 - 7x - 2x^3 - 10x + 14$$

$$= x^4 + 5x^2 - 2x^3 - 17x + 14$$

حل:

تمرین

حاصل ضرب افاده های زیر را به دست آورید:

1) $-3n(2n^4 - 6n^2)$

3) $-9k^3(2k^2 - 4k - 7)$

5) $(x+1)(x^2 - x + 1)$

2) $5ab(a^2 - ab + b^2)$

4) $(a+b)(x+y)$

6) $(2a+3b)(2a - \frac{3c}{2})$

$$(10002)(9998)=?$$

$$(10000+2)(10000-2)$$

$$=(10000)^2-2^2$$

آیامی توانید یک راه ساده و مختصر
را برای ضرب 10002×9998
دریافت کنید؟

فعالیت

در جدول زیر قیمت‌های دو افادهٔ الجبری A و B را برای قیمت‌های مختلف X دریافت کنید:

x	A = 3x(2x - 4)	B = 6x ² - 12x
3		
2		
-4		
0		
$\frac{1}{2}$		

چه رابطه بین A و B وجود دارد؟

• با دو مثال دیگر رابطهٔ به دست آمده را امتحان کنید.

از فعالیت فوق می‌توان رابطه بین A و B را به شکل زیر خلاصه کرد:
تساوی دو افادهٔ الجبری که برای تمام قیمت‌های متحول با هم مساوی باشند، یک مطابقت می‌نامیم.

فعالیت

a) $202 \cdot 198 = ?$

b) $104 \cdot 96 = ?$

c) $32 \cdot 28 = ?$

• عملیۀ ضرب اعداد مقابل را با در نظر داشت مطابقت انجام دهید.

• جاهای خالی را پر کنید. $a: (a+b)(a-b) = \dots - \dots + \dots - \dots$

• در افاده‌های فوق قیمت $a = 200$ و قیمت $b = 2$ را در دو طرف قرار دهید. حاصل ضرب را با جزء a و جزء b مقایسه کنید.

• این بار $a = 100$ و $b = 4$ در دو طرف راست و چپ قرار داده حاصل ضرب را با جزء a و b مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم:

حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل همان دو عدد مساوی است با تفاضل مربع‌های آن دو عدد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ که به نام تفاضل مربع‌ها می‌نامیم.

مثال: قوس‌های زیر را با هم ضرب و به شکل تفاضل مربع‌ها افاده کنید:

a) $(x-5)(x+5)$ b) $(5x^2y^2+7)(5x^2y^2-7)$

c) $(2a^2+5a)(2a^2-5a)$ d) $(\frac{x}{4}+1)(\frac{x}{4}-1)$

حل a): $(x-5)(x+5) = x \times x + 5x - 5x - 5 \times 5$
 $= x^2 - 25$

b): $(5x^2y^2+7)(5x^2y^2-7) = (5x^2y^2)^2 - 7(5x^2y^2) + 7(5x^2y^2) - (7)^2$
 $= 25x^4y^4 - 49$

c): $(2a^2+5a)(2a^2-5a) = (2a^2)^2 - (5a)^2$
 $= 4a^4 - 25a^2$

d): $(\frac{x}{4}+1)(\frac{x}{4}-1) = (\frac{x}{4})^2 - (1)^2$
 $= \frac{x^2}{16} - 1$

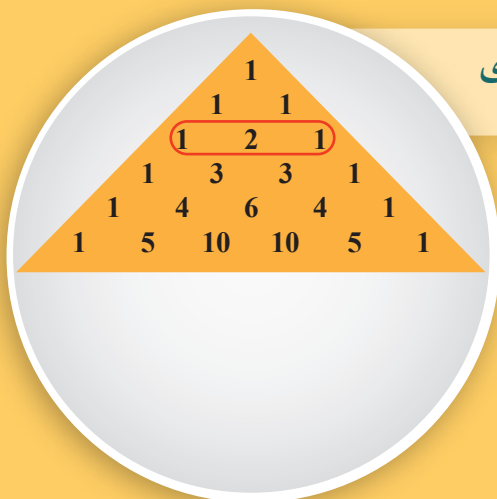
تمرین

قوس‌های زیر را با هم ضرب و به شکل تفاضل مربع‌ها افاده کنید.

a) $(P-7)(P+7)$ b) $(\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x}-1)$ c) $(x+2)(x-2)$

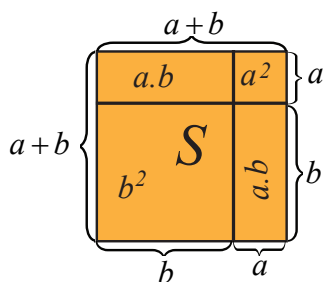
d) $(2x+5)(2x-5)$ e) $(49+1)(49-1)$ f) $(6x-y)(6x+y)$

مربع مجموع و تفاضل افاده‌های دو حده

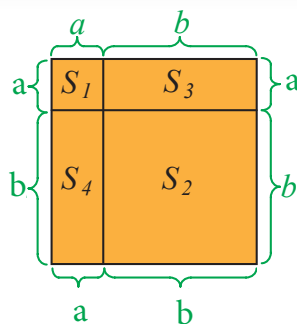


مثلث عددی مقابل، به نام مثلث پاسکال مشهور است. سطر سوم مثلث چه چیزی را نشان می‌دهد؟

فعالیت



- طول هر ضلع مربع مقابل $a+b$ است.
- مساحت مربع را به S نشان دهید و قیمت آن را بنویسید.
- مربع اولی را به دو مربع با مساحت‌های a^2, b^2 و دو مستطیل با مساحت‌های $a.b$ ، مانند شکل مقابل تقسیم و به S_1, S_2, S_3, S_4 نامگذاری نمایید.
- مجموع مساحت مربع‌ها و مستطیل‌ها را بنویسید.
- مساحت مربع اولی با مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌ها چه رابطه دارد؟ بنویسید.
- رابطه به دست آمده را با استفاده از خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع نشان دهید.



از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:
مربع مجموع دو حد مساوی است به مربع حد اول جمع دو
چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم؛ یعنی:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال 1: افاده $(x+3)^2$ را انکشاف دهید.

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times 3 \times x + (3)^2$$

$$= x^2 + 6x + 9$$

مثال 2: افاده $(3x+5y)^2$ را انکشاف دهید.

حل: با استفاده از مطابقت $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ می توان نوشت:

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2$$

$$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

مثال 3: $(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + 2 \times \frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2$

حل: هرگاه در مطابقت $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ به جای b ، $(-b)$ را وضع نماییم

مطابقت جدید را می یابیم.

مربع تفاضل دو حد مساوی است به مربع حد اول منفی دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم

جمع مربع حد دوم مانند: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

مثال 4: $(x-1)^2$ را انکشاف دهید.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

حل: با استفاده از مطابقت داریم:

$$(x-1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + (1)^2$$

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

مثال 5: $(8x-\frac{1}{3})^2$ را انکشاف دهید:

$$(8x-\frac{1}{3})^2 = (8x)^2 - 2(8x)(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2$$

$$= 64x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$$

تمرین

1- افاده های زیر را انکشاف دهید:

a) $(m+1)^2$

b) $(x+7)^2$

c) $(x+12)^2$

d) $(x+\frac{3}{4})^2$

2- افاده های زیر را انکشاف دهید:

a) $(\frac{1}{x}-3)^2$

b) $(12x-5y)^2$

c) $(6xy-\frac{1}{2})^2$

d) $(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y)^2$

تجزیه افاده‌های الجبری

$2x + 3$
 $S_1 =$
 $3x - 1$ $6x^2 + 7x - 3$
 ?
 $S_2 =$
 ? $3x^2 - 4x + 1$

تاکنون توانستید مساحت مستطیل را به طول $2x + 3$ و عرض $3x - 1$ پیدا کنید. آیا فکر کرده‌اید چگونه می‌توانید طول و عرض مستطیل به مساحت $3x^2 - 4x + 1$ را دریافت کنید؟

فعالیت

- جاهای خالی را در تساوی‌های مقابل با افاده مناسب پر کنید.
- $(2x - 3)(2x + 3) = \dots - \dots$
- $(3y + \dots)(3y - \dots) = 9y^2 - a^2$
- $(\dots + \dots)(\dots - \dots) = 4x^2 - 9$
- $(4y - 2x)^2 = \dots - \dots + 4x^2$
- $(\dots + 2y)^2 = a^2 - 4ay + \dots$
- $(\dots + \dots)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

در فعالیت فوق دیدیم که بعضی اوقات یک افاده الجبری را به صورت ضرب دو افاده الجبری می‌توان نوشت:

ارایه یک افاده الجبری به شکل حاصل ضرب دو یا چند افاده الجبری را تجزیه می‌نامیم.

مثال 1: افاده الجبری $4 - 16x^2$ تجزیه کنید.

حل: با استفاده از مطابقت:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 $(2)^2 - (4x)^2 = (2 - 4x)(2 + 4x)$

مثال 2: افاده الجبری $25a^2 - 4b^2$ را تجزیه کنید:

$$25a^2 - 4b^2 = (5a)^2 - (2b)^2$$

$$= (5a - 2b)(5a + 2b)$$

مثال 3: افاده الجبری $x^2 + 12x + 36$ را تجزیه می‌کنیم.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

حل: می‌دانیم که:

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x^2 & + & 2 \times x \times 6 & + & (6)^2 \end{array}$$

دیده می‌شود که دو چند حاصل ضرب جذر مربع حد اول و سوم حد وسط را می‌دهد، پس افاده فوق به شکل $(a + b)^2$ مطابقت دارد:

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2 = (x + 6)(x + 6)$$

مثال 4: افاده $4a^2 + 28a + 49$ را به شکل حاصل ضرب دو قوس بنویسید.

$$(2a)^2 + 2 \times 2a \times 7 + (7)^2$$

حل:

دیده می‌شود که دو چند حاصل ضرب جذر مربع حد اول و سوم حد وسط را می‌دهد، پس افاده فوق شکل مطابقت $(a + b)^2$ را دارد:

$$4a^2 + 28a + 49 = (2a + 7)^2 = (2a + 7)(2a + 7)$$

در نتیجه:

مثال 5: افاده الجبری $x^2 - 4x + 4$ را به دو قوس تجزیه می‌نمایم.

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

حل:

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x^2 & - & 2 \times x \times 2 & + & (2)^2 \end{array}$$

دیده می‌شود دو چند حاصل ضرب جذر حد اول و حد سوم حد وسط را می‌دهد، پس افاده فوق شکل مطابقت $(a - b)^2$ را دارد:

$$x^2 - 2 \times x \times 2 + (2)^2 = (x - 2)^2 = (x - 2)(x - 2)$$

در نتیجه:

تمرین

1- افاده‌های الجبری زیر را تجزیه کنید:

a) $49x - 16$

b) $m^2 - 36$

c) $49 - y^2$

d) $25 - x^2$

e) $x^2y^2 - 64$

f) $\frac{1}{64x^2} - y^2$

2- افاده‌های زیر را به اساس مطابقت $(a + b)^2$ و $(a - b)^2$ به دو قوس تجزیه نمایید.

a) $x^2 + 2xy + y^2$

b) $x^2 + 6x + 9$

c) $2a^2 + 4ab + b^2$

d) $4x^2y^2 + 4xy + 1$

e) $b^2 - 12b + 36$

f) $4a^2 - 12ab + 9$

• مفهوم متحول

برای بیان قاعدهٔ عمومی از حروف می توان استفاده کرد. با در نظر داشت این که قیمت های مختلف را می توان به جای حروف قرار داد. در این حالت حروف را متحول می نامیم.

• حدود مشابه

حدهایی که دارای عین حروف بوده و توان های شان مساوی باشند، حدود مشابه گفته می شوند.

• افاده های الجبری

افاده های مثل $2a+b$, ab , $3x-4$, a^2 و $\sqrt{4a}$ که از ترکیب عملیه هایی چون: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان و جذر با اعداد از یک یا چند متحول تشکیل شده باشند. افاده های الجبری نامیده می شود. قیمت یک افادهٔ الجبری را می توان برای قیمت های مختلف متحول دریافت کرد.

• تعریف افادهٔ یک حده

اعداد و حروف الجبری که در آن عملیه ضرب، تقسیم، طاقت و جذر صورت گرفته باشد افاده یک حدهٔ الجبری نامیده می شود.

• ضرب افادهٔ یک حده

عددی که در متحول ها ضرب می شود ضریب یک حده می نامیم.

• ضرب افادهٔ یک حده

در فعالیت بالا افاده هایی چون $4a^2b$, $6ab^2$, $2x^2y$, $3x^3y^2$ را که از ضرب عدد در متحول با توان های اعداد طبیعی یا صفر تشکیل شده اند یک حده و عددی را که در متحول ها ضرب می شود به نام ضریب یک حده یاد می کنند.

در ضرب یک حده ها باید ضرایب آن ها را در همدیگر ضرب کنیم و توان های متحول های مشابه را با هم جمع کنیم.

حد الجبری: یک افادهٔ الجبری که در حالت ضرب و یا تقسیم قرار داشته باشد یک حده الجبری را تشکیل می دهند.

مثلاً: $\frac{3x^2y^2}{5ab}$ و $2x^2y$, $\frac{3abc}{c^2}$, $\frac{3y^2}{3x^2}$, $6ab^2$, $4a^2b$

• تقسیم افاده‌های یک حده

در تقسیم افاده الجبری یک حده‌ها از قاعده ساده کردن کسرها استفاده می‌شود. که ابتدا ضرایب را بالای یکدیگر تقسیم نموده و حدود باقی مانده را با استفاده از قوانین توان‌ها، ساده می‌سازیم.

مطابقت

• تساوی دو افاده الجبری که برای تمام قیمت‌های متحول برقرار است، مطابقت می‌نامیم.
 • حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل همان دو عدد مساوی است با تفاضل مربع‌های آن دو عدد.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

• مربع مجموع دو حد مساوی به مربع حد اول جمع دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم می‌باشد:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

• مربع تفاضل دو حد مساوی می‌باشد به مربع، حد اول منفی دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم می‌باشد:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

تمرینات عمومی

1- سؤال‌های زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب درست را انتخاب نموده و دور آن را حلقه بکشید.

• یک عدد ضرب در خودش جمع 6 عبارت است از:

- a) $x^2 - 6$ b) $x + 6$ c) $x^2 + 6$ d) هیچ کدام

• حاصل ضرب $-5ab(4ac)$ عبارت است از:

- a) $-20a^2bc$ b) $20a^2bc$ c) $20ab^2c$ d) $20a^2bc^2$

• حاصل تقسیم $\frac{4m^2n^2}{-4m^3n^2}$ عبارت است از:

- a) m^{-1} b) $\frac{-1}{m}$ c) $-m^{-1}$ d) جواب b و c درست است

• قیمت عددی افاده $6x^3 - \frac{1}{2}$ در صورتی که $x = \frac{1}{2}$ باشد عبارت است از:

- a) $-\frac{1}{4}$ b) 4 c) 4^{-1} d) $\frac{1}{4}x$

• $m^2 - 9n^2$ مساوی است به:

- a) $(m - 3n)(m + 3n)$ b) $(m - 3n)(m - 3n)$
 c) $(m + 3n)(m + 3n)$ d) هیچ کدام

2- جاهای خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید:

• برای ساده کردن افاده‌های الجبری را با هم جمع و تفریق می‌کنیم.

$$(a + b)^2 = \dots + 2ab + b^2$$

• یک افاده الجبری که از ضرب اعداد حقیقی و های مختلف با توان‌های

اعداد تام یا عدد حقیقی تشکیل شده باشد یک حده است.

• عددی که در متحول‌ها می‌شوند. ضریب یک حده می‌نامیم.

3- افاده‌های زیر را ساده کنید:

$$\begin{array}{lll} a) 2b(-3c)^2 & b) (-6xy^2)(-ax^2y^2) & c) -3b^2(-2ab)(6a^2b) \\ d) -2a(-3ab)^2 & e) 4y^2(6xy) & f) (-2a^3)(-5ab^2) \end{array}$$

4- کسرهای زیر را ساده کنید:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{12x^2y^4}{2xy^3} & b) \frac{3ab}{-3a} & c) \frac{16r^3s}{-2rs} \\ d) \frac{-15xyz}{-3xy} & e) \frac{-5a^2b+10ab^2}{-5ab} & f) \frac{6x^2-4x^2}{-2x^2} \end{array}$$

5- ساده کنید:

$$\begin{array}{lll} a) 7a^3b^4c^2 - 8a^3b^4c^2 & b) 5x + y & c) 4a + 5b - 2c \\ & \underline{+ 3x - 2y} & \underline{+ 4a - 3b - 2c} \end{array}$$

6- دو حدهای زیر را تجزیه کنید:

$$\begin{array}{lll} a) x^2 - 1 & b) x^2y^2 - 64 & c) \frac{4a^2}{b^2} - 25 \\ d) m^2 - 16a^2 & e) x^2 - \frac{1}{4} & f) \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2 \\ g) 121 - y^2 & h) \frac{25a^2}{b^2} - \frac{36a^2}{d^2} & i) \frac{81}{a^2} - \frac{b^2}{49} \end{array}$$

7- افاده‌های زیر را با استفاده از مطابقت ساده کنید:

$$\begin{array}{lll} a) \left(\frac{1}{2} + z\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) & b) \left(\frac{a}{5} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{a}{5} - \frac{1}{b}\right) & c) (5a + 2b)(5a - 2b) \end{array}$$

8- افاده‌های الجبری زیر را انکشاف دهید:

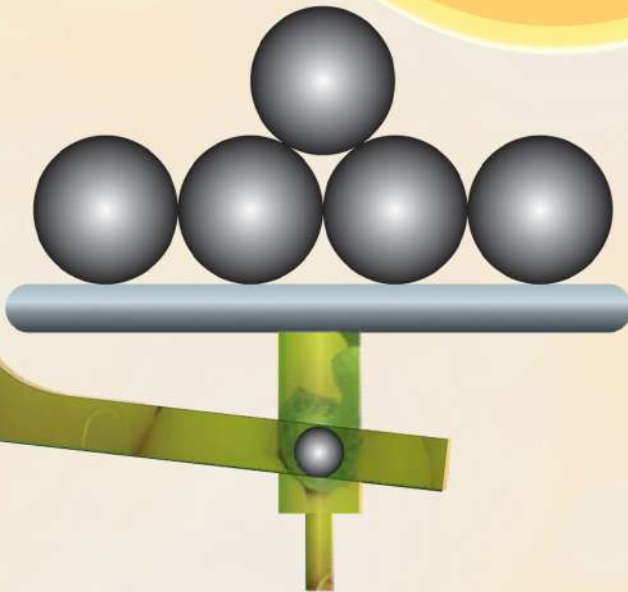
$$\begin{array}{lll} a) (m+1)^2 & b) (y-2)^2 & c) \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \\ d) \left(b - \frac{5}{2}\right)^2 & e) (a+7)^2 & f) \left(m + \frac{1}{4}\right)^2 \end{array}$$

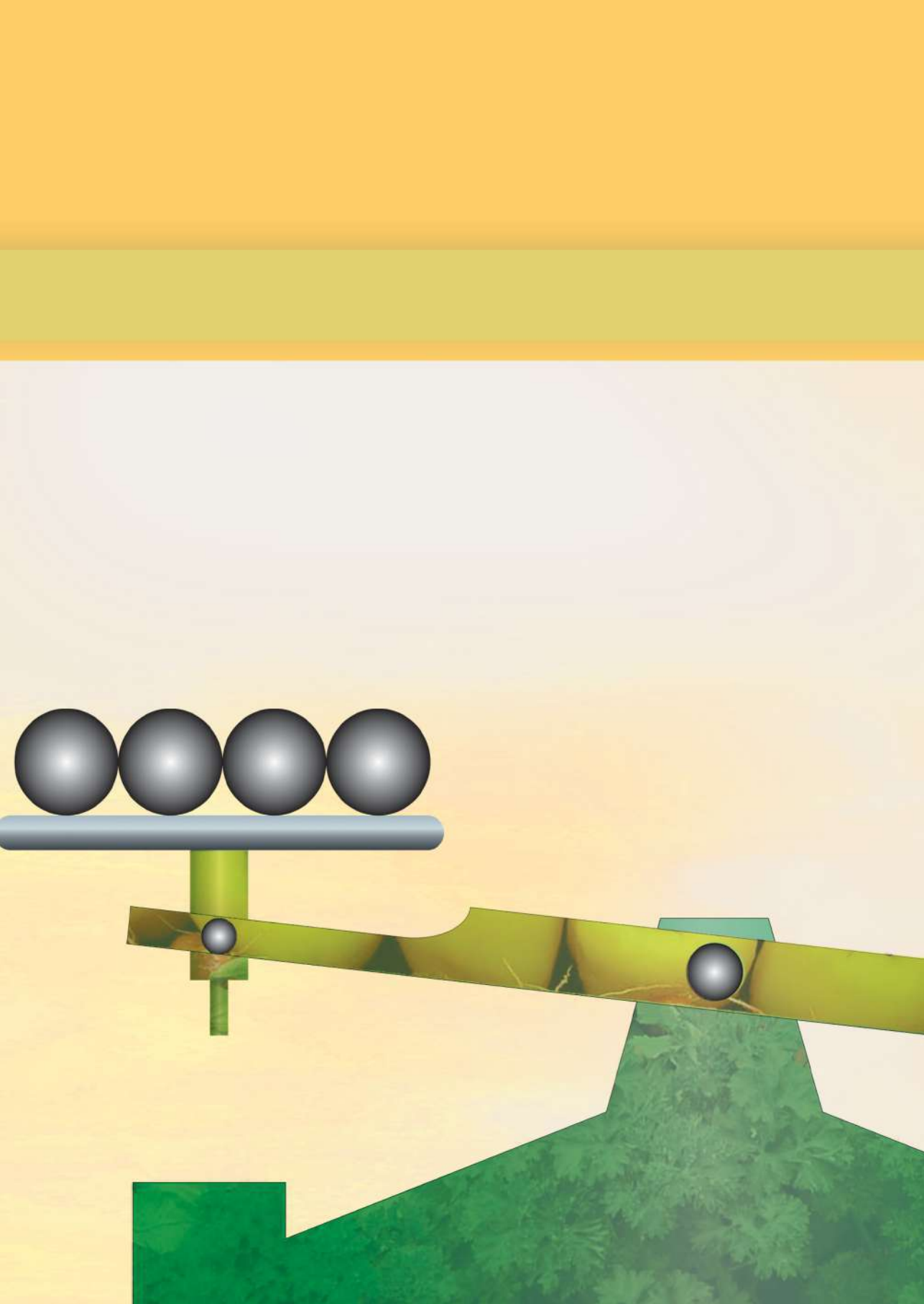
9- افاده‌های الجبری زیر را تجزیه کنید:

$$\begin{array}{lll} a) 4x^2y^2 - 9z^4 & b) x^2 - 8x + 16 & c) a^2x^2 + 4axy + 4y^2 \end{array}$$

فصل هشتم

معادلات





مفهوم معادله



مسکا: مینا! چقدر پول در دست خود دارید؟

مینا: اگر از دو چند پولی که در دست دارم 2 افغانی کم گردد مساوی به 20 افغانی می شود.

مسکا: فهمیدم که در دست خود چند افغانی دارید.

مینا: چطور فهمیدی که من در دست خود چند افغانی دارم؟

فعالیت

زلمی می خواست از یک دکان یک کیلو بوره بخرد. دکاندار تنها وزن های 100 گرامه، 150 گرامه، 250 گرامه، نیم کیلویی و 2 کیلویی داشت.

• چگونه برای زلمی، دکاندار یک کیلو بوره را وزن نماید؟ کدام یک از روش های زیر برای اندازه کردن یک کیلو بوره درست است؟

- دکاندار اول نیم کیلو بوره را وزن نموده، بعد وزنه نیم کیلویی را با نیم کیلو بوره وزن شده در یک پله ترازو گذاشته و یک کیلو بوره را در پله دیگر ترازو وزن می کند.

- دکاندار 2 کیلو بوره را وزن نموده، بعد 2 کیلو بوره وزن شده را در هر دو پله ترازو نصف کند.

• شما چی روشی دیگری را برای اندازه کردن یک کیلو بوره با استفاده از وزن های موجود می توانید پیشنهاد نمایید؟

• در پایان هر روش هر دو پله ترازو در چی حالتی قرار دارند؟

• محتویات هر دو پله ترازو در پایان هر روش با هم چه نسبتی دارند؟

• اگر در یک پله ترازو یک بسته وزن نامعلوم با یک وزنه یک کیلویی و در پله دیگر آن یک وزن نیم کیلویی و دو کیلویی در حال تعادل قرار داشته باشند، تعادل پله ها را با یک تساوی الجبری نشان دهید؟

• آیا می توانید حدس بزنید که وزن بسته چند است؟ به عبارت دیگر بسته نامعلوم چقدر وزن داشته باشد تا تعادل ترازو حفظ گردد؟

در فعالیت بالا، وزن کردن یک کیلو گرام بوره و تعادل آن با وزن های گوناگون موجود،

نتیجهٔ زیر را برای مفهوم معادله به دست می‌دهد.

تعریف

- یک مساوات الجبری که یک متحول نامعلوم (مجهول) داشته باشد و برای بعضی از قیمت‌های مجهول صدق نماید به نام معادله و دریافت عددی که معادله الجبری را به یک مساوات عددی تبدیل نماید به نام حل و یا جواب معادله یاد می‌گردد.
- آن‌چه که در حل معادله سراغ آن می‌باشیم به نام مجهول معادله یاد گردیده که به طور اکثر آن را به x نشان می‌دهند.

مثال: اگر با یک عدد، عدد 5 جمع گردد مساوی به 15 می‌شود، عدد کدام است؟

حل: اگر عددی را که دنبال آن هستیم x بنامیم پس سؤال طوری است که اگر با x عدد 5

جمع شود مساوی به 15 می‌گردد؛ یعنی:

$$x + 5 = 15$$

کدام عدد است که با 5 جمع گردیده و در نتیجه عدد 15 حاصل گردد.

از حل کردن معادلهٔ فوق می‌توان گفت که عدد مساوی به 10 می‌باشد.

$$x = 10$$

یعنی:

حال به خاطر امتحان مسأله هرگاه قیمت دریافت شده را در معادلهٔ $x + 5 = 15$ وضع

$$x + 5 = 15$$

نماییم؛ داریم:

$$10 + 5 = 15$$

$$15 = 15$$

چون تساوی عددی $15 = 15$ درست است؛ بنابراین پاسخی که به دست آورده ایم برای

معادله درست می‌باشد.

تمرین

1- اگر محیط یک مثلث متساوی الاضلاع مساوی به 9 واحد باشد، مطلوب است. معادله

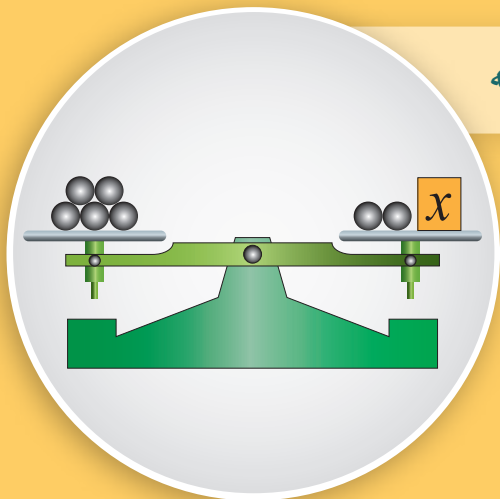
الجبری که از حل آن طول ضلع مثلث را دریافت نموده بتوانیم.

2- اگر با یک عدد، عدد 9 جمع گردد مساوی به 14 می‌شود، عدد چند است؟

3- معادله الجبری را برای گفتگو مسکا و مینا که در آغاز درس صورت گرفته است

بنویسید.

عملیه‌های جمع و تفریق در معادله



اگر یک وزن نامعلوم با دو گلوله در یک طرف ترازو و در طرف دیگر آن 5 گلوله برابر و مساوی قرار داشته باشند، وزن مجهول مساوی به چند گلوله می‌باشد؟ چه فکر می‌کنید؟

فعالیت

- تبادل ترازو در حالت فوق به معنای آن است که وزن اجسام قرار گرفته در هر دو پله ترازو باهم برابر است؛ پس اگر وزن نامعلوم طرف راست را x بنامیم به سؤال‌های زیر جواب دهید.
- تساوی الجبری برای تعادل این که 2 گلوله با وزن مجهول در یک پله و در پله دیگر ترازو 5 گلوله قرار داشته باشند؛ بنویسید.
 - اگر از هر دو پله ترازو دو گلوله را برداریم آیا تعادل ترازو باقی می‌ماند؟
 - آیا کم کردن گلوله‌ها از هر دو پله ترازو از نگاه ریاضی با عملیه ریاضی یکسان است؟
 - نظر به این که با کم کردن گلوله‌ها تعادل بر هم نمی‌خورد؛ پس این عمل از نگاه ریاضی چه معنا دارد؟
 - حال اگر به هر دو پله ترازو 4 عدد گلوله هم وزن علاوه گردد چه اتفاقی می‌افتد؟

از اجرای فعالیت بالا نتیجه زیر به دست می‌آید:

از پله‌های یک ترازوی در حال تعادل، اگر از هر دو طرف یک مقدار معین را کم و یا به هر دو پله یک مقدار مساوی را اضافه نماییم باز هم تعادل باقی می‌ماند.

به اصطلاح ریاضی اگر از طرفین یک تساوی عین عدد را کم و یا به طرفین آن عین عدد را جمع نماییم باز هم تساوی برقرار می‌ماند؛ یعنی:

اگر $a = b$ باشد، پس برای هر عدد حقیقی c :

$$a + c = b + c \quad \text{و} \quad a - c = b - c$$

می‌باشد.

از این خاصیت در حل معادلات استفاده به عمل می‌آید.

مثال 1: معادله $x + 7 = 9$ را حل کنید.

حل: میدانیم که اگر از طرفین معادله عدد 7 را کم کنیم در تعادل معادله تغییر نمی‌آید، بنابراین:

$$x + 7 - 7 = 9 - 7$$

$$x = 2$$

$$x + 7 = 9$$

$$2 + 7 = 9$$

$$9 = 9$$

چون تساوی عددی برقرار است، بنا بر این حل دریافت شده $x = 2$ درست است.

مثال 2: حل معادله $x - 5 = 4$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم که هرگاه به طرفین معادله، عددی را جمع نماییم، تعادل مساوات بر هم نمی‌خورد، بنا بر این، جمع نمودن عدد 5 به هر دو طرف معادله برای ما می‌دهد:

$$x - 5 + 5 = 4 + 5$$

$$x = 9$$

امتحان: قیمت دریافت شده x را در اصل معادله قرار می‌دهیم:

$$x - 5 = 4$$

$$9 - 5 = 4$$

$$4 = 4$$

چون تساوی عددی $4 = 4$ وجود دارد؛ بنا بر این $x = 9$ حل معادله می‌باشد.

تمرین

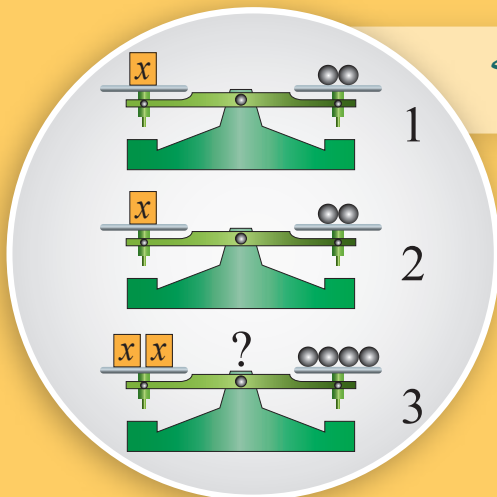
- 1- اگر با یک عدد 3 اضافه گردد 15 حاصل می‌شود؛ عدد کدام است؟
- 2- اگر از یک عدد 7 را تفریق نماییم 13 حاصل می‌گردد؛ عدد کدام است؟
- 3- معادله‌های زیر را حل کنید.

a) $x - 6 = 2$

b) $x + 4 = 1$

c) $2 + x = 3$

عملیه های ضرب و تقسیم در معادله



دو ترازوی 1 و 2 با 2 گلوله مساوی در یک طرف و در طرف دیگر آن یک وزن نامعلوم در حال تعادل قرار دارد. هرگاه طرف به طرف گلوله ها را در یک پله و وزن های نامعلوم را در یک پله دیگر ترازوی شماره 3 قرار دهیم جواب تان به سؤال زیر چیست؟ آیا ترازوی شماره سوم در حال تعادل خواهد ماند یا نه؟

فعالیت

- ترازوی شماره 3 را در نظر می گیریم. دیده می شود که باز هم ترازو در حالی که در یک طرف آن دو وزنه مجهول و در طرف دیگر آن 4 عدد گلوله مساوی قرار دارند، در حال تعادل است. اگر وزن مجهول را x بنامیم به حل سؤالها زیر فکر کنید.
- افاده ریاضی و یا به عبارت دیگر، بیان الجبری برای تعادل ترازوی شماره 3 کدام است؟
 - حال هرگاه دوباره گلوله ها و وزنه ها را به جای خود برگردانده نصف نماییم و دوباره یک قسمت را به ترازوی شماره 1 و قسمت دیگر را در همین ترازو باقی بمانیم، آیا در این صورت باز هم تعادل در ترازوهای شماره 1 و 3 وجود خواهد داشت؟
 - نصف نمودن گلوله و وزنه ها از نگاه ریاضی چه معنا دارد؟
 - آیا این فعالیت را برای بیشتر از 2 ترازو نیز می توانیم انجام دهیم؟

از فعالیت فوق می توانیم نتیجه زیر را بیان نماییم:

هرگاه وزنه های هر دو طرف ترازو را به دو یا بیشتر از دو قسمت مساوی تقسیم یا ضرب نماییم و یا نصف وزن ها را از هر دو طرف ترازو برداریم باز هم تعادل باقی می ماند؛ زیرا وزن هر دو طرف ترازو با هم مساوی می باشند. از نگاه ریاضی اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عددی خلاف صفر تقسیم نماییم، باز هم مساوات باقی می ماند به عبارت دیگر:

اگر $a = b$ باشد، پس برای هر عدد حقیقی c ، $ac = bc$ می باشد.

و برای هر عدد حقیقی c خلاف صفر، $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ می باشد.

مثال: مساوات $3x = 6$ را در نظر گرفته، حل آن را به دست آورید.

اطراف مساوات فوق را به 3 تقسیم نموده داریم:

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

امتحان: هرگاه قیمت $x = 2$ را در اصل معادله وضع نماییم؛ داریم:

$$3x = 6$$

$$3(2) = 6$$

$$6 = 6$$

دیده می‌شود که $x = 2$ حل دقیق مساوات فوق می‌باشد.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

1) $4x = 2$

2) $\frac{x}{5} = 12$

3) $3x = -6$

4) $\frac{-2}{x} = -4$

5) $\frac{x}{2} = 4$

6) $\frac{4}{x} = -2$

7) $\frac{3x}{4} = \frac{2}{3}$

معادلهٔ عمومی یک مجهول درجه یک

$$4x + 8 = 0$$

$$4x = -8$$

$$x = ?$$

معلم از شاگردان پرسید.
اگر با چهار چند یک عدد 8 علاوه
گردد مساوی به صفر می شود، عدد
کدام است؟

فعالیت

- آیا برای حل سؤال معلم، که به صورت فوق مطرح کرده است فکر کرده اید؟
- اگر عدد مطلوب سؤال قبلی را x بنامیم، آیا می توانید سؤال فوق را بایک افادهٔ ریاضی بنویسید؟
 - چگونه برای دریافت حل آن حدس می زنید؟
 - اگر از 3 چند یک عدد، 9 منفی گردد نتیجه مساوی به صفر شود افادهٔ الجبری آن را بنویسید؟
 - چگونه برای دریافت حل این معادله فکر می کنید؟
 - اگر با a چند یک عدد، عدد b علاوه گردد نتیجه مساوی به صفر است عدد چند است؟
(a و b اعداد حقیقی و a خلاف صفر است.)

از انجام فعالیت بالا نتیجهٔ زیر به دست می آید:

در عملیات مانند فوق مقدار نامعلوم را به x نشان داده، می توان برای آن یک تساوی بر حسب x به دست آوریم.
تساوی طرفین را معادله و مقدار نامعلوم را به نام مجهول معادله یاد نموده و راه یافتن مجهول را به نام حل معادله یاد می کنند.
حالت عمومی معادله یک مجهول درجه یک به شکل $ax + b = 0$ بوده، که در آن a و b اعداد حقیقی خلاف صفر است؛ بنابراین آن شکل فوق به نام حالت معیاری و یا استاندارد معادله خطی یاد می گردد.

حل معادله را توسط عملیات ساده الجبری با انجام مراحل زیر به دست آورده می‌توانیم.
 - جمع و یا تفریق طرفین معادله با مقدارهای مساوی.
 - ضرب و یا تقسیم طرفین معادله با مقدارهای مساوی خلاف صفر.
 با انجام عملیات فوق بعد از محاسبه به جایی می‌رسیم که، مجهول معادله به یک طرف و مقادیر معلوم در طرف دیگر قرار می‌گیرد و به این ترتیب حل معادله به دست می‌آید.

مثال 1: معادله $3x - 4 = 5$ را حل کنید.

حل: ابتدا به طرفین معادله عدد 4 را جمع می‌کنیم:

$$3x - 4 + 4 = 5 + 4 \Rightarrow 3x = 9$$

طرفین معادله را بر 3 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

مثال 2: معادله $2(3x + 4) = -1 - 3x$ را حل کنید.

$$2(3x + 4) = -1 - 3x$$

حل:

$$6x + 8 = -1 - 3x$$

$$6x + 3x + 8 = -1 - 3x + 3x \quad / + 3x$$

$$9x + 8 = -1$$

$$9x + 8 - 8 = -1 - 8 \quad / - 8$$

$$9x = -9$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{-9}{9} = -1 \quad / \div 9$$

$$x = -1$$

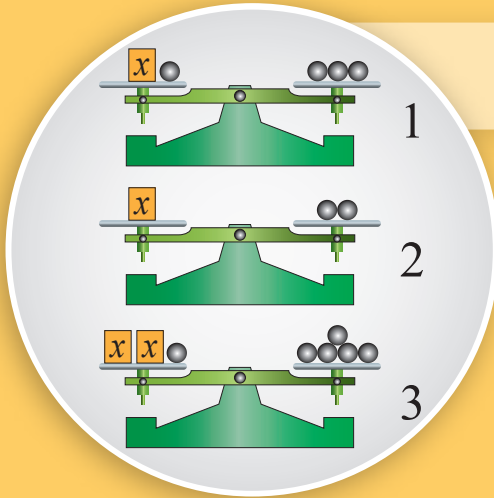
تمرین

1- در مثال فوق، قیمتی را که برای x به دست آورده اید؛ در اصل معادله امتحان کنید.

2- حل معادله $2(2x + 3) = 2x - 2$ را به دست آورید؟

3- معادله $\frac{3}{2}(4x - 2) = 5x + 2$ را حل کنید.

معادله‌های معادل



در ترازوهای شماره 1، 2، و 3 چه

می‌بینید؟

هر سه ترازو در حالت تعادل قرار دارند.

چگونه حالت‌های تعادل دیگری را توسط افزایش یا کاهش وزنه‌های برابر و مساوی به طرفین پله‌ها که از آن در ترازن پله‌های فوق استفاده شده است می‌توانید فکر کنید؟

فعالیت

جمله زیر را در نظر بگیرید.

اگر از دو چند یک عدد، 4 کم گردد، مساوی به 8 است، عدد کدام است؟ هر گاه مجهول را x بنامیم در این صورت برای بیان فوق معادله را به شکل ذیل می‌توانیم

$$2x - 4 = 8$$

بنویسیم.

• با در نظر داشت معادله فوق فعالیت زیر را با پر کردن خانه‌های خالی جدول زیر انجام دهید.

شماره	عملیه‌ها بالای طرفین معادله	معادله به دست آمده	حل‌ها
1	معادله داده شده	$2x - 4 = 8$	
2	با طرفین معادله شماره 1 عدد (-8) را جمع می‌کنیم		
3	طرفین معادله شماره 1 را تقسیم 2 می‌کنیم		
4	معادله شماره 1 را به شکل معیاری می‌نویسیم	$x - 6 = 0$	

• هر کدام از این معادلات را با اعمال ساده الجبری به ترتیب زیر به دست آورید.
- از معادله شماره 1 ← معادله شماره 2 ← معادله شماره 3 ← معادله شماره 4

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

معادلاتی که دارای حل های مساوی باشند، به نام معادلات معادل یاد می گردند. انجام عملیات ساده الجبری بالای یک معادله، معادله های معادل را به وجود می آورد. برای دریافت حل معادله سعی می گردد تا از روش دریافت معادله های معادل، معادله به دست آید که شکل ساده تری برای دریافت مجهول معادله داشته باشد.

مثال: معادله $2x - 4 = 0$ را حل کنید.

حل: با اطراف معادله $+4$ را جمع می کنیم:

$$2x - 4 = 0$$

$$2x - 4 + 4 = 0 + 4$$

اطراف تقسیم 2 :

$$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

امتحان: قیمت دریافت شده را در اصل معادله $2x - 4 = 0$ وضع می نماییم داریم که:

$$2 \times 2 - 4 = 0$$

$$4 - 4 = 0$$

$$0 = 0$$

چون در تساوی، عدد $0 = 0$ است، بنا بر این $x = 2$ حل معادله می باشد.

با وضع کردن قیمت دریافت شده در معادله $2x = 4$ می بینیم: $2 \times 2 = 4$ ، پس $2x = 4$ و $2x - 4 = 0$ معادلات با هم معادل هستند.

تمرین

1- حل معادلات زیر را دریافت نموده امتحان کنید.

1) $\frac{(a-2)}{3} = 3$

4) $16 - 3t = 0$

2) $2(2x-1) = 4$

5) $3 - 4y = 2 - 6y$

3) $\frac{2}{5} + x = 1$

2- کدام یک از معادله های زیر با هم معادل هستند؟

a) $\begin{cases} x+1 = \frac{x}{2} + 2 \\ \frac{x}{2} + 1 = x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 4 = 8 \\ 2x - 2 = 4 \end{cases}$

$$\frac{1}{2}x - 5 = x - 25$$



عثمان: فرهاد، تو چند ساله استی؟
فرهاد: اگر از نصف عمر پدرم عدد 5 کم گردد مساوی به سن من است. زمانی که من تولد شدم پدرم 25 سال عمر داشت.
عثمان: فهمیدم، عمر پدرت 40 و سن تو 15 سال است.
آیا می‌توانید بگویید که عثمان چگونه فهمید. که فرهاد چند ساله است؟

فعالیت

- یک مسئله حسابی روزمره را به معادله الجبری تبدیل می‌نماییم و سعی می‌کنیم که در انجام فعالیت، شیوه تشکیل معادله و حل آن را بیابیم.
- اگر با دو چند یک عدد، عدد 4 جمع شود مساوی به 16 می‌شود، عدد کدام است؟
 - آیا مسئله را فهمیدید؟ چگونه می‌توانید آن را به یک معادله الجبری تبدیل نمایید؟
 - بعد از تبدیل آن به معادله الجبری حل آن را به دست آورید.
 - آیا حل تان درست است؟ امتحان کنید.

از فعالیت بالا نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

- برای تشکیل یک معادله الجبری و دریافت حل آن با در نظر داشت فعالیت فوق، مراحل زیر ضروری و اساسی پنداشته می‌شود.
- درک و فهمیدن
 - انتخاب مجهول و نامگذاری
 - تشکیل یک معادله با دقت به بیان
 - حل مسئله، یا دریافت قیمت مجهول
 - امتحان کردن مسئله با جواب دریافت شده

مثال: اگر با دو چند پول رشاد 20 افغانی اضافه گردد مساوی به پول خوشحال می گردد. اگر مقدار پول خوشحال 60 افغانی باشد، مقدار پول رشاد چند است؟

$$2x + 20 = 60$$

حل: برای تشکیل معادله و دریافت حل آن مرحله به مرحله به شکل زیر به حل مسأله می پردازیم.

- درك فهمیدن مسأله و خواندن آن با تمام دقت.

- انتخاب مجهول، مقدار پول رشاد است که آن را x می نامیم.

- ساختمان معادله: با دو چند پول رشاد $(2x)$ اگر 20 اضافه گردد $(2x+20)$ مساوی به پول خوشحال می شود $2x+20=60$
- حل معادله

$$2x + 20 = 60$$

$$2x = 60 - 20 = 40$$

از اطراف معادله (20) را کم می کنیم:

$$2x = 40$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{40}{2}$$

اطراف معادله تقسیم 2 :

$$x = 20$$

مقدار پول رشاد:

امتحان: اگر با دو چند پول رشاد 20 افغانی اضافه گردد مساوی به پول خوشحال؛ یعنی 60 می شود که این مسأله هم درست است.

$$2(20) + 20 = 60$$

زیرا:

$$40 + 20 = 60$$

$$60 = 60$$

چون مساوات عددی $60 = 60$ است، بنابراین قیمت دریافت شده صحیح است.

تمرین

- 1- اگر از 3 چند يك عدد 5 تفریق گردد مساوی به 4 می شود، عدد کدام است؟
- 2- حاصل جمع سن لیمه و نیلوفر مساوی به 30 است، لیمه 2 سال بزرگتر از نیلوفر است. لیمه و نیلوفر چند سال دارند؟

• معادله

عبارت از مساوات الجبری است که برای بعضی قیمت‌های معین مجهول، صدق می‌نماید و توسط روشی با استفاده از عملیه‌های الجبری با لای طرفین معادله مطلوب، مجهول معادله دریافت می‌گردد.

• عملیه‌های الجبری و معادله

اگر به اطراف هر معادله یک عدد را جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم (خلاف صفر) نماییم در معادله کدام تغییر وارد نمی‌شود.

• معادله یک مجهوله درجه یک

معادله $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$ ، در حالی که x مجهول (a و b اعداد حقیقی بوده) به نام معادله یک مجهوله درجه یک یاد می‌گردد.

معادله بالا به نام معادله خطی یک مجهوله نیز یاد می‌گردد و هر معادله خطی، دارای یگانه حل $x = -\frac{b}{a}$ ، $a \neq 0$ می‌باشد.

• معادلات معادل

معادله‌های که دارای حل‌های یکسان باشند، به نام معادله‌های معادل یاد می‌گردند. انجام عملیات ساده الجبری بالای یک معادله، معادله‌های معادل را به وجود آورده که با معادله اولی حل یکسان دارد.

• تشکیل معادله خطی یک مجهوله

هر گاه بتوانیم مسایل حسابی روزمره را به قسم یک معادله الجبری تنظیم، تا از روی آن حل معادله را دریافت نماییم، این پروسه تشکیل معادله خطی یک مجهوله بوده که حل آن را به اختیار ما می‌گذارد. این مسأله به نام تشکیل سؤال‌های عبارتی توسط معادله‌ها نیز یاد می‌گردد.

تمرین عمومی

برای هر سؤال زیر چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح را حلقه بکشید.

1- حل معادله $10 + x = 18$ عبارت است از:

- a) -8 b) 8
c) 2 d) 4

2- حل معادله $12x + 2(5x + 22) = 0$ عبارت است از:

- a) 0 b) 1
c) 2 d) -2

3- مراحل حل یک معادله عبارت است از:

- (a) درک و فهمیدن
(b) انتخاب مجهول و نامگذاری
(c) دریافت مجهول و امتحان
(d) همه آنها

4- معادل، معادله $3x - 6 = 3$ عبارت است از:

- (a) $3x - 2 = 1$
(b) $x - 2 = 3$
(c) $x - 2 = 1$
(d) هیچ کدام

جاهای خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید.

1- یک مساوات الجبری که برای بعضی از مجهول ها صادق می نماید..... یاد می شود.

2- معادلاتی که دارای باشند، به نام یاد می گردند.

3- آن چه که در حل معادله سراغ آن می باشیم به نام یاد می گردد.

کدام یک از جمله‌های زیر صحیح و کدام یک آن غلط است، در مقابل جمله صحیح حرف (ص) و در مقابل جمله غلط حرف (غ) را بنویسید.

1) () اگر از هر دو طرف پله‌های ترازو یک مقدار معین را کم و یا به هر دو طرف پله ترازو یک مقدار مساوی را اضافه نماییم باز هم تعادل باقی می‌ماند.

2) () معادله‌های که دارای حل‌ها یکسان باشند، به نام معادلات غیر معادل یاد می‌گردند.

3) () یک مساوات الجبری را که برای بعضی از قیمت‌های مجهول صدق نماید به نام معادله یاد می‌گردد.

4) () اگر طرفین یک تساوی را در عدد ضرب یا بر عدد خلاف صفر تقسیم نماییم باز هم مساوات باقی می‌ماند.

سؤال‌های زیر را حل نمایید.

1- معادلات زیر را حل کنید.

a) $t + 5 = 2$

b) $x - 9 = -5$

c) $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

d) $x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

2- حل معادلات زیر مطلوب است:

a) $6y = 2$

b) $-3x = -4$

c) $\frac{x}{2} + 1 = 2$

d) $\frac{3}{t} + 1 = 2$

e) $3(2x - 1) = x$

f) $\frac{1}{2}(4x - 1) = \frac{3}{2}$

3- اگر از 5 چند یک عدد 2 کم شود مساوی به 3 می‌شود، عدد کدام است؟

- 4- اگر با نصف یک عدد 4 اضافه گردد مساوی به 8 می شود، عدد کدام است؟
- 5- ارتفاع یک مثلث متساوی الساقین مساوی به 6 واحد است، طول قاعده مثلث چند واحد باشد که مساحت مثلث مساوی به 9 واحد مربع گردد؟
- 6- محمود 100 افغانی داشت 6 جلد کتابچه خرید، هر گاه از مقدار پول 25 افغانی هنوز باقی مانده باشد، معلوم کنید که محمود هر کتابچه را به چند افغانی خریده است؟
- 7- مجموع دو عدد 30 است اگر یکی آن‌ها 20 باشد عدد دومی چند خواهد بود؟
- 8- عدد 3 با کدام عدد ضرب شود تا حاصل ضرب مساوی به a شود؟
- 9- اگر فرق بین دو عدد 3 و مجموع آن‌ها 37 باشد اعداد را پیدا کنید.



فصل نهم

رابطه و تابع

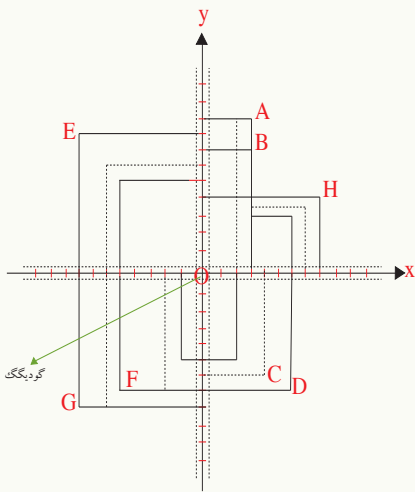


نقطه در مستوی



آسمان پر از ستاره است. به طرف شمال، شرق، غرب و جنوب مهتاب، موقعیت ستاره‌ها را در چهار اطراف مهتاب چگونه مشخص می‌کنید؟

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید. از نقطه O خطوطی رسم شده‌اند که بالای یکدیگر در نقطه O عمود و بالای آن‌ها به طرف بالا، پایین، راست و چپ با واحدهای مساوی نشانی شده‌اند. سعی نمایید به طرف نقاطی که در صفحه داده شده‌اند به گودیگک مسیر داده فعالیت زیر را انجام دهید:

- از نقطه O گودیگک را به نقطه B مسیر دهید.
- آیا می‌توانید مسیر کوتاه دیگری از O به B دریافت کنید؟
- مسیرهای فوق از هم چه فرق دارند؟
- مسیری برای رسیدن به نقطه F بدهید که فقط یک بار گودیگک تغییر جهت به طرف چپ داشته باشد.
- مسیری برای رسیدن به نقطه F بدهید که فقط یک بار تغییر جهت به طرف راست داشته باشد.
- مسیرهای فوق را از روی کدام اعداد مشخص نموده می‌توانیم.
- به عوض مسیرهای راست و چپ ما از محور افقی، که نقطه O بالای صفر منطبق باشد و

برای مسیرهای بالا و پایین نیز از محور عمودی، مانند شکل بالا نقطه O با صفر منطبق باشد استفاده کنید و گودیگک را به نقاط C, D, G, H با در نظر داشت محورهای متقاطع اعداد مسیر بدهید.

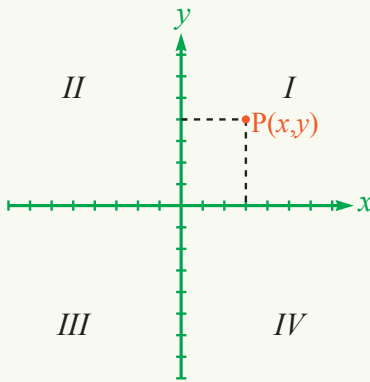
• جوره اعدادی که برای هر نقطه به دست می آورید، توسط آن جدول زیر را تکمیل نمایید:

نقاط	A	B	C	D	E	F	G	H
روی محور افقی	3					-5		
روی محور عمودی				-7				6

از فعالیت بالا نتیجه زیر را به دست می آوریم:

در فعالیت بالا دیدیم که ما نمی توانیم، نقطه اختیاری یک صفحه را تنها توسط محور اعدادی که ما آن را می شناسیم تشخیص نماییم، بنابراین ضرورت به محور عمودی دیگری بالای آن می باشد که ما آن را در تعریف زیر به حیث یک سیستم دو محور قائم به هم معرفی می نماییم.

تعریف



دو محور x و y که بالای هم در نقطه O عمود اند، به نام سیستم مختصات قائم یاد می گردد.

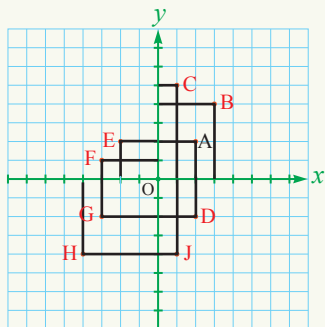
x به نام محور فاصله و y به نام محور ترتیب نام گذاری گردیده که هر جور مرتب (x, y) یک نقطه P در مستوی سیستم مختصات را مشخص می کند، طوری که x به نام فاصله روی محور x و y به نام ترتیب نقطه روی محور y مشخص می گردد.

محورات سیستم مختصات، مستوی را به چهار ناحیه I, II, III و VI تقسیم می نماید.

یادداشت: دقت کنید نقاط $P(x, y)$ و $P'(x', y')$ از هم فرق دارند، مانند نقاط $A(3, 1)$ و $A'(1, 3)$

دو محل جداگانه در مستوی می باشند.

نقطه $A(3, 1)$ ؛ یعنی 3 واحد به طرف راست روی محور x و یک واحد به طرف بالا روی محور y و نقطه $A'(1, 3)$ ، یعنی 1 واحد به طرف راست و 3 واحد به طرف بالا روی محور y .



مثال: ترتیب و فاصله نقاط زیر را که در سیستم مختصات
 قایم داده شده‌اند، به حیث جورۀ مرتب، به صورت
 تشریحی در یک جدول بنویسید:
حل: مختصات نقاط به حیث جورۀ مرتب سیستم
 مختصات قایم عبارت‌اند از:

C(1,5) B(3,4) A(2,2)
 F(-3,1) E(-2,2) D(2,-2)
 J(1,-4) B(-4,-4) G(-3,-2)

طرز نوشتن و ترتیب جدول، برای نقاط فوق قرار زیر به دست می‌آید:

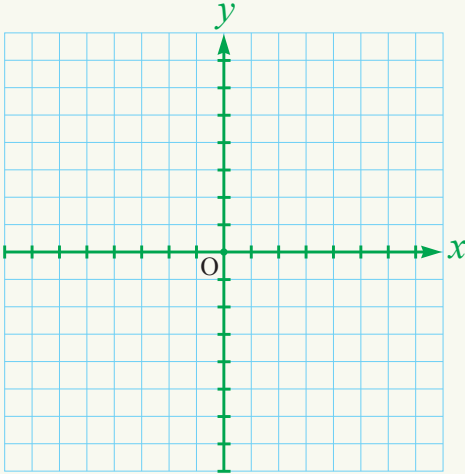
نقاط	A	B	C	D	E	F	G	H	J
x	2	3	1	2	-2	-3	-3	-4	1
y	2	4	5	-2	2	1	-2	-4	-4

تمرین

1- ارائه جدولی جورۀ مرتب زیر را بنویسید.

A(5,5) , B(0,3) , C(-1,1) , D(2,-1)

2- نقاط $E(1, 4)$, $D(-5, -3)$, $C(-1, -2)$ ، $B(-3, 1)$, $A(1, -1)$ را در سیستم مختصات قایم مشخص کنید.

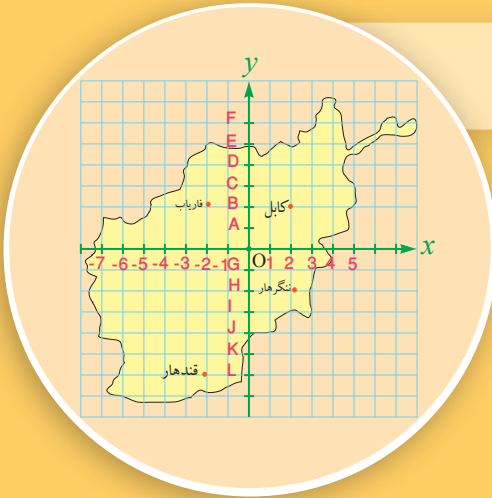


3- نقاط زیر را در سیستم مختصات قایم تعیین کنید:

- a) $A(4, 5)$
- b) $B(-2, -4.5)$
- c) $G(0.5, 4)$
- d) $E(-7, 0)$
- e) $F(0, 4.5)$
- f) $K(0, 0)$

مختصات یک نقطه در مستوی

چهار ولایت افغانستان در نقشه تعیین شده اند، بگویید که در تقاطع کدام حرف و کدام عدد قرار دارند؟ آیا تقاطع هر حرف و عدد یک نقطه افغانستان را نشان می دهد؟



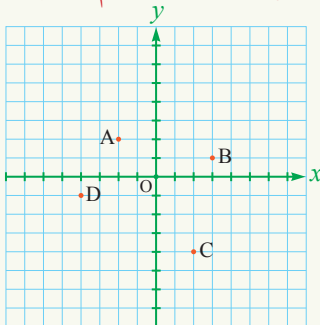
فعالیت

- سیستم مختصات قائم را ترسیم کنید.
- محورها را به واحدهای یک سانتی متر تقسیم و هر واحد را به صورت ملی متری نشانی کنید.
- 4 نقطه اختیاری را در چهار ناحیه سیستم مختصات به صورت دلخواه نشانی نموده، سعی نمایید از روی خطوط عمودی و افقی به روی محورهای x و y مختصات آن را تعیین کنید.
- آیا حدس زده می توانید که دو نقطه مختلف مستوی دارای جوهره‌های مرتب مساوی باشند؟
- آیا امکان آن وجود دارد که برای دو جوهره مرتب از هم مختلف، محل نقاط در مستوی با هم یک جا یک نقطه باشد؟

از انجام فعالیت فوق نتیجه زیر به دست می آید:

هر نقطه P در مستوی مختصات قائم تنها یک جوهره مرتب اعداد (x, y) و بر عکس به هر جوهره مرتب اعداد (x, y) تنها به یک نقطه P در مستوی مختصات قائم مطابقت می کند.

مثال: سیستم مختصات قائم زیر را در نظر بگیرید.



(a) مختصات نقاطی را که در سیستم مختصات نشانی شده اند به شکل جوهره مرتب و جدولی بنویسید.

(b) نقاط $A(1, 2)$, $B(-3, 4)$, $C(-2, -4)$, $D(2, -2)$ و $E(4, 5)$ را در سیستم مختصات قایم مشخص نموده با هم وصل کنید.

حل:
(a)

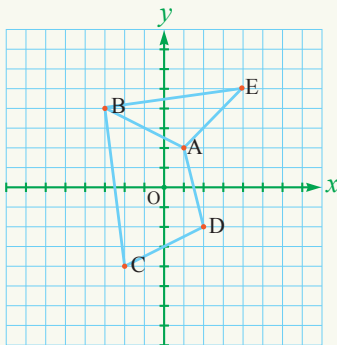
نقاط	A	B	C	D
x	-2	3	2	-4
y	2	1	-4	-1

$A(-2, 2)$

$B(3, 1)$

$C(2, -4)$

$D(-4, -1)$



(b)

تمرین

1- نقاطی که مختصات آن توسط جوهره‌های مرتب زیر داده شده‌اند در سیستم مختصات قایم مشخص نموده نقاط را به ترتیب با هم وصل کنید:

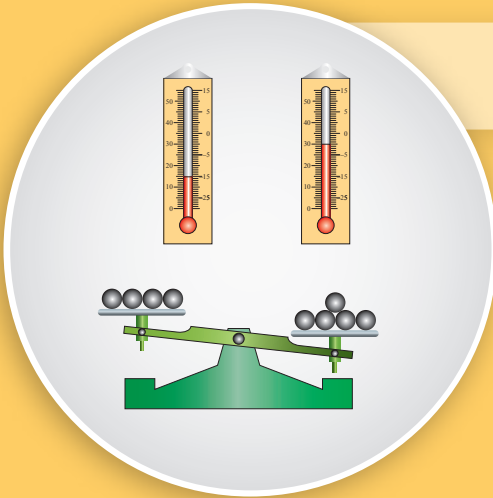
$P_1(1, 1)$, $P_2(2, -3)$, $P_3(3, 1)$, $P_4(4, -3)$, $P_5(6, -2)$ و $P_6(-4, -5)$

2- مختصه‌ نقاط زیر را دریافت کنید:

(a) نقطه روی محور x از مبدأ به طرف راست 6 واحد فاصله داشته باشد.

(b) نقطه روی محور y از مبدأ به طرف پایین 5 واحد فاصله داشته باشد.

مجهول و متحول



- با کدام وزن تعادل ترازو به وجود خواهد آمد؟
- آیا تنها یک وزن است که ترازو برای آن در حالت تعادل قرار می گیرد؟
- در یک شبانه روز درجه حرارت، ثابت است یا متحول؟

فعالیت

مساوات زیر را که دارای دو خانه خالی می باشد در نظر بگیرید:
خانه خالی ها را یکی پی دیگر طوری پر نمایید که نخست خانه اولی؛ سپس خانه دومی مساوات پر گردد.

$$\text{خانه خالی اولی} \quad \text{خانه خالی دومی}$$
$$2 \times \square + \square = 9$$

- اگر به خانه اول عدد، 1 را بگذاریم، عددخانه دوم باید چند باشد؟
- اگر به خانه اول عدد، 2 را بگذاریم، عدد خانه دوم را پیدا کنید.
- آیا می توانیم به خانه اولی هر عدد دیگر را بگذاریم.
- آیا در برابر قیمت های متغیری که به خانه اول داده اید نظر به معلومات گذشته می توانید نامی برای عدد خانه دومی بگیرید؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

- برای انتخاب عدد خانه اول ما امکان آن را داشتیم که عدد دلخواه را انتخاب کنیم، که در برابر آن باید از روی حل معادله، قیمت مجهول را برای خانه دوم به دست آوریم.
- هرگاه در یک مساوات امکان دادن قیمت های مختلف به یک حرف افاده الجبری وجود داشته باشد، حرف مذکور به نام متحول یاد می گردد.
- هرگاه به صورت کلی متحول قابل تغییر اختیاری نباشد، مجهول نامیده می شود.

مثال: در مساوات $2x - y = 1$ برای متحول x با در نظر داشت جدول زیر قیمت داده که بعد از قیمت گذاری در معادله، قیمت مجهول y به دست می آید:

مثلاً: برای $x = -3$ قیمت

$$2(-3) - y = 1$$

$$-6 - y = 1$$

$$y = -7$$

می باشد.

قیمت های متحول x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
قیمت های مجهول y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	0	-2

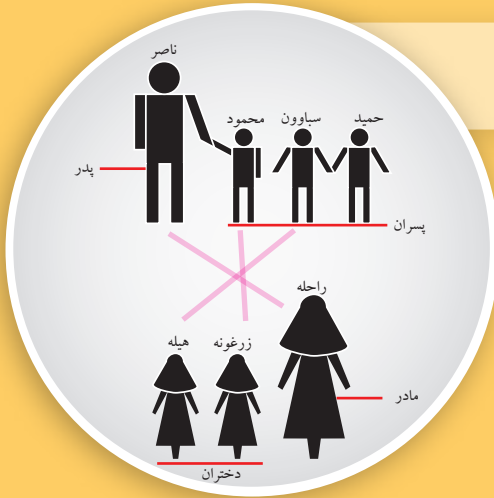
تمرین

1- یک متحول و یک مجهول از هم چه فرق دارند؟ با مثال واضح سازید.

2- در سیستم مختصات جوره‌های مرتب را که در مثال فوق در جدول به دست آمده اند مشخص نموده، نقاط مذکور را با هم وصل کنید.

3- در معادله $2x - y = 7$ با در نظر داشت قیمت های متحول x که در زیر داده شده است قیمت مجهول y را دریافت کنید.

x	-3	-2	-1	1	2
y					



کی با کی چه رابطه دارد؟

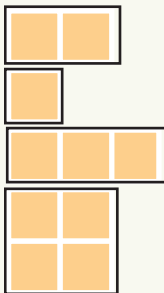
فعالیت

شکل بالا را در نظر گرفته، با ارتباطاتی که بین اعضای یک خانواده وجود دارد، به سؤال‌های زیر جواب دهید:

- راحله خانم ناصر است، حمید با ناصر چه رابطه دارد؟
- محمود پسر ناصر است، راحله و حمید چه رابطه دارند؟
- هیله خواهر سباوون است، آیا سباوون برادر هیله است؟
- هیله خواهر زرغونه و زرغونه خواهر محمود است، پس هیله با محمود چه ارتباط دارد؟
- از قرابت فامیلی برای روابط اعضای خانواده چند مثال دیگر بگویید.

از فعالیت بالا می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را به دست آوریم:

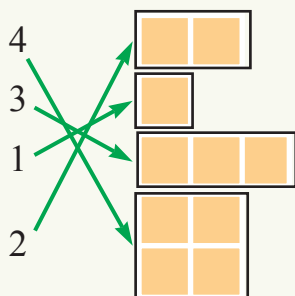
4
3
1
2



هرگاه بین دو شی (دو جسم) و یا عناصر دو ست، توسط عملیه‌های ریاضی و یا کدام رشته‌ی اجتماعی، پیوندی وجود داشته باشد این پیوند به نام رابطه یاد می‌گردد.

مثال 1: بین اعداد 1، 2، 3 و 4 و تعداد مربع‌های مقابل یک رابطه برقرار می‌نماییم:

حل:



مثال 2: اگر نسرین 26 سال و انجیلا 16 سال عمر داشته باشند، بعد از 5، 10 و 15 سال سن نسرین و انجیلا چند سال خواهد بود؟

حل:

سن انجیلا	16	21	26	31
سن نسرین	26	31	36	41

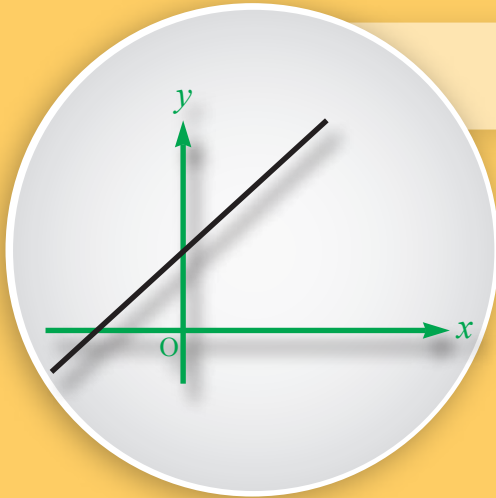
اگر در سیستم مختصات گراف سن انجیلا را نظر به سن نسرین رسم نماییم یک خط مستقیم است؛ بنابراین رابطه بین سن انجیلا و نسرین یک رابطه خطی می باشد.

تمرین

1- یک ست 5 عنصره از نامهای هم صنفان تان و یک ست 5 عنصره از میوههای مختلف تهیه نمایید، اسم هر هم صنفی تان را به میوه مورد علاقه او در یک قوس جوره بنویسید.

2- اعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 و 8 را در نظر گرفته با رابطه مساوی عددی را دریافت کنید که جذر المربع آن مساوی به یکی از اعداد فوق باشد؛ مثال: $\sqrt{25} = 5$ است.

رابطه خطی



اگر گراف یک رابطه خط مستقیم باشد، رابطه بین x و y را چه می نامند؟

فعالیت

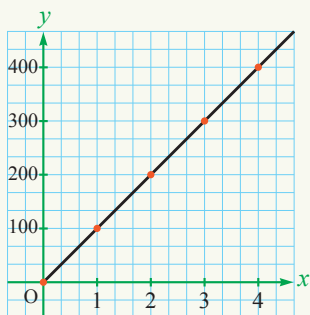
- محمود 20 ساله بود که دخترش نجلا تولد شد.
- زمانی که نجلا در 7 ساله گی شامل مکتب شد، می توانید بگوئید که محمود چند ساله بود؟
 - زمانی که نجلا 20 ساله شود پدرش چند سال خواهد داشت؟
 - با در نظر داشت سن نجلا و پدرش جدول زیر را تکمیل کنید:

سن نجلا			7		15
سن رحمان	21	23		29	

- گراف سن نجلا را نظر به محمود در سیستم مختصات قایم رسم کنید.
- اگر محمود 24 ساله باشد، از روی گراف پیدا کنید که نجلا چند ساله است؟
- چه رابطه بین سن محمود و نجلا وجود دارد؟
- اگر سن محمود را به y و سن نجلا را به x نشان دهیم، رابطه بین سن محمود و نجلا را با یک افاده الجبری بنویسید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:
هرگاه گراف یک رابطه خط مستقیم باشد، در این صورت رابطه بین متحولین را به نام رابطه خطی یاد می نمایند.

مثال 1: هرگاه فاصله کابل - هرات را نظر به زمان با سرعت وسطی 100Km فی ساعت طی نماییم، چگونه رابطه بین فاصله و سرعت وسطی وجود دارد؟
حل: ابتدا رابطه بین فواصل طی شده نظر به زمان را در جدول زیر درج می‌نماییم:



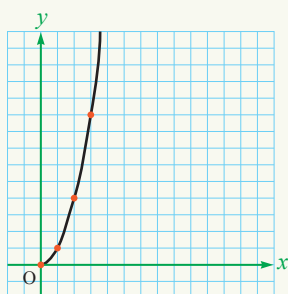
زمان به ساعت	0	1	2	3	4
فاصله به کیلومتر	0	100	200	300	400

هرگاه جوړه مرتب فوق را در سیستم کمیات وضعیه تثبیت و باهم وصل نماییم دیده می‌شود که یک خط مستقیم به وجود می‌آید.

بنابر این رابطه بین سرعت وسطی و فاصله طی شده یک رابطه خطی می‌باشد.

مثال 2: رابطه بین طول اضلاع مربع و مساحت آن را در نظر می‌گیریم. به این منظور هرگاه

ضلع مربع را به a و مساحت آن را به a^2 نشان دهیم، در برابر قیمت‌های مختلف a قیمت‌های مختلف دیگری برای مساحت به دست می‌آوریم که در جدول زیر درج شده‌اند:



ضلع a	1	2	3	4	5
مساحت مربع a^2	1	4	9	16	25

نقاط را در سیستم کمیات وضعیه مشخص نموده گراف را ترسیم نمایید. آیا گراف یک خط مستقیم است؟ آیا رابطه خطی است؟

نخیر در این صورت رابطه بین طول ضلع a و مساحت مربع؛ یعنی a^2 خطی نبوده که این نوع رابطه را به نام رابطه غیر خطی یاد می‌گردد.

تمرین

1- طول یک فنر در حالی که وزن به آن آویزان نشده است 10cm است، هرگاه وزن m کیلوگرام را به آن بیاویزیم طول فنر توسط رابطه $L = 10 + 0.5 \times m$ افزایش می‌یابد.

(a) برای وزن 4 کیلوگرام طول فنر چند است؟

(b) چه مقدار وزن در فنر آویزان نماییم تا طول فنر به 15 سانتی متر برسد؟

2- طول یک سوسمار نوزاد 30 سانتی متر است. هرگاه سالانه به طور وسطی 22 سانتی متر به طول نوزاد اضافه شود، پس در چه زمانی سوسمار به 96 سانتی متر خواهد رسید؟

تشکیل رابطه‌های خطی

فروش 100 پوقانه چند مفاد خواهد داشت؟



فعالیت

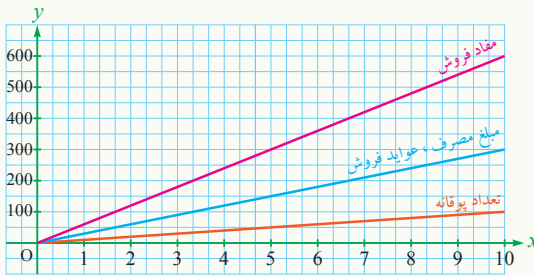
احمد به خاطر این که پول قلم و کاغذ خود را پیدا نماید، به مشورهٔ مادرش تصمیم می‌گیرد تا بعد از ظهر در شهر پوقانهٔ هوایی بفروشد. هر گاه احمد برای خرید 100 عدد پوقانه 260 افغانی پردازد و علاوه بر آن 20 افغانی برای خوردن غذا و 20 افغانی هم برای کرایهٔ ترانسپورت پردازد. تصمیم می‌گیرد که هر پوقانه را 3 افغانی به فروش برساند. به خاطر ارزیابی مسأله، موضوع را با معلم ریاضی خود مطرح می‌کند و معلم به او مشوره می‌دهد، تا معادلات تعداد پوقانه‌ها را نظر به مصرف کلی و مفاد از سبب فروش تشکیل نموده گراف‌های هردو حالت را با هم مقایسه کند. در تحلیل گراف و ارزیابی مسأله با احمد در تکمیل جوابات فعالیت کمک کنید.

- بعد از فروش چند عدد پوقانه، عواید فروش مساوی به مصرف کلی می‌شود؟
- جدول مصرف مجموعی را که برای 100 عدد پوقانه که جمله مبلغ 300 افغانی مصرف کرده است تکمیل کنید:

تعداد پوقانه	0	10	30	40	60	70	100
مبلغ مصرف	0	30	60	150	240	270	

- هر گاه x تعداد پوقانه‌ها و y مقدار مصرف باشد، رابطه الجبری مصارف پوقانه‌ها را به دست آورده گراف آن را در سیستم مختصات قایم ترسیم کنید.
- مانند جدول مصرف کلی، جدول فروشات زیر را بر حسب عواید فروش پوقانه‌ها تکمیل کنید.

تعداد پوقانه	0	10		40		70		90	100
مبلغ مصرف	0		60		150		240		
عوايد فروش	0	60		180		360			
مفاد فروش	0		60						



- در نقطه تقاطع گراف مفاد و مصرف با هم چه رابطه دارند؟
- چند پوقانه به فروش برسد تا مقدار فروش و مصرف با هم برابر گردد؟ این مسأله از نگاه گراف چه معنای دهد؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

حل دو معادله خطی عبارت از نقطه تقاطع گراف های آن ها می باشد؛ زیرا در آن نقطه x و y یعنی فاصله و ترتیب برای هر دو معادله یکسان می باشد.

تمرین

1- قرار شد که یک رستوران برای یک شرکت غذا تهیه کند. این رستوران 1000 افغانی پیش پرداخت سالانه و به علاوه 600 افغانی هر ماه مطالبه کرده است. رستوران دیگر بدون پیش پرداخت و ماهانه 850 افغانی مطالبه نموده است. جدول زیر را کامل کنید.

ماه	حمل	ثور	جوزا	سرطان	اسد	سنبله	میزان	عقرب	قوس	جدی	دلو	حوت
رستوران اول												
رستوران دوم												

گراف پرداخت به این دو رستوران را در یک سیستم مختصات رسم نمایید، اگر 6 ماه غذا بخواهیم قرارداد کدام رستوران به نفع ما است؟



• اگر سرعت یک موتر $50 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$ باشد:

- در دو ساعت کدام فاصله را طی می کند؟

- در سه ساعت کدام فاصله را طی می کند؟

• آیا گفته می توانید که هر زمان به یک فاصله جداگانه با یک سرعت معین ارتباط می گیرد؟

فعالیت

حال رابطه بین سرعت یک موتر و فاصله طی شده نظر به زمان را در نظر می گیریم:

• اگر یک موتر با سرعت ثابت $60 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$ حرکت نماید. جدول زیر را با در نظر داشت زمان داده شده برای فاصله طی شده تکمیل کنید:

t	1h	2h	3h	4h	5h	6h
x						

- برای جوهره های مرتب به دست آمده هر گاه سیستم مختصات قایم را برای زمان t و فاصله x در نظر بگیریم گراف آن را رسم کنید.
- آیا گفته می توانید که به هر زمان داده شده یک فاصله جداگانه وجود دارد؟
- هر گاه t متحول مستقل رابطه فوق باشد در این صورت قیمت های کدام کمیت تابع آن است؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

- یک رابطه بین عناصر دو ست طوری که برای هر قیمت ناحیه متحول تنها یک تصویر یا تنها یک عدد وجود داشته باشد به نام تابع یاد می گردد.
- ناحیه قیمت هایی که متحول از آن قیمت می گیرد به نام ناحیه تعریف (Domain) یاد می گردد.

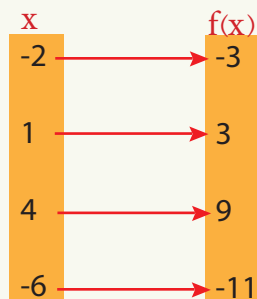
ناحیه قیمت های که از ناحیه تعریف برای مجهول به دست می آید به نام ناحیه قیمت ها (Codomain) یاد می گردد.

هر گاه A ناحیه تعریف، B ناحیه قیمت ها و f یک تابع باشد، در این صورت y تابع x طور زیر نوشته می شود: $y=f(x)$

مثال 1: نشان دهید که $f(x) = 2x + 1$ با قیمت‌های -2 ، 1 ، 4 و $x = -6$ یک تابع است.

حل: با وضع کردن قیمت‌های داده شده در تابع، قیمت‌های تابع طور زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 1 \\ f(-2) &= 2(-2) + 1 = -3 \\ f(1) &= 2(1) + 1 = 3 \\ f(4) &= 2(4) + 1 = 9 \\ f(-6) &= 2(-6) + 1 = -11 \end{aligned}$$



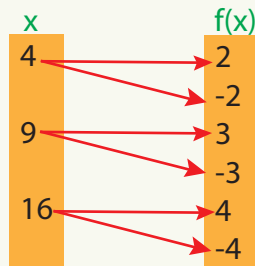
از شکل فوق معلوم می‌شود که برای هر قیمت از متحول در ناحیه تعریف، یک قیمت یا عدد در ناحیه قیمت‌ها وجود دارد؛ پس نظر به تعریف تابع، f یک تابع است.

هر افاده الجبری که شکل $y = ax + b$ را داشته باشد به نام تابع یاد می‌شود یا به عباره دیگر هر رابطه خطی را به نام تابع یاد می‌نمایند.

مثال 2: هرگاه قیمت‌های 4 ، 9 ، 16 به تابع $f(x) = \sqrt{x}$ داده شده باشد آیا f یک تابع است یا خیر؟

حل: با قرار دادن قیمت‌های متحول در تابع f قیمت‌های تابع را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} \\ f(4) &= \sqrt{4} = \pm 2 \\ f(9) &= \sqrt{9} = \pm 3 \\ f(16) &= \sqrt{16} = \pm 4 \end{aligned}$$



در شکل فوق می‌بینیم که برای هر عنصر از ست x دو قیمت در ست $f(x)$ وجود دارد، بنابراین نظر به تعریف تابع، f یک تابع نیست.

تمرین

آیا تابع $f(x) = \frac{4}{3}x$ برای قیمت‌های داده شده 0 ، 1 ، 2 ، 3 و -3 یک تابع است؟

● **نقطه در مستوی:** یک نقطه را در مستوی می‌توانیم در یک سیستم کمیات وضعیه قایم تعریف نماییم که توسط دو مختصه (X, Y) که به نام فاصله و ترتیب یاد می‌شوند مشخص می‌گردد.

● **سیستم مختصات قایم:** دو محور عمود با هم Y و X که یکدیگر خود را در نقطه O قطع می‌کنند به نام سیستم مختصات قایم یاد می‌گردد که به هر جوړه مرتب (X, Y) آن یک نقطه مستوی ارتباط دارد.

X را به نام فاصله و Y را به نام ترتیب نقطه یاد می‌کنند. از روی محورهای قیمت‌های آن‌ها که به واحدهای مساوی تقسیم شده اند تعیین می‌گردد.

● **مختصات یک نقطه در مستوی:** به هر نقطه P یک مستوی مختصات قایم تنها یک جوړه مرتب اعداد (X, Y) و برعکس به هر جوړه مرتب اعداد (X, Y) تنها و تنها می‌توان یک نقطه P مستوی مختصات قایم را ارتباط داد.

● **مجهول و متحول:** هرگاه در یک معادله امکان دادن قیمت‌های مختلف به یک حرف وجود داشته باشد حرف مذکور به نام متحول یاد می‌گردد.

و هرگاه به صورت کلی متحول قابل تغییر اختیاری و دلخواه نباشد، مجهول نامیده می‌شود.

● **رابطه:** هرگاه بین دو شی، جسم و یا عناصر دو ست توسط عملیه‌های ریاضی و یا هم کدام رشته اجتماعی پیوندی وجود داشته باشد به نام رابطه یاد می‌گردد.

● **روابط خطی:** هرگاه گراف، یک رابطه یک خط مستقیم باشد، در این صورت رابطه بین متحولین آن‌ها به نام رابطه خطی یاد می‌گردد.

● **تشکیل رابطه‌های خطی:** آن عده روابط خطی که گراف‌های آن‌ها یک خط مستقیم را تشکیل وتوسط روابط الجبری افاده گردیده و حل آن‌ها دریافت می‌گردد.

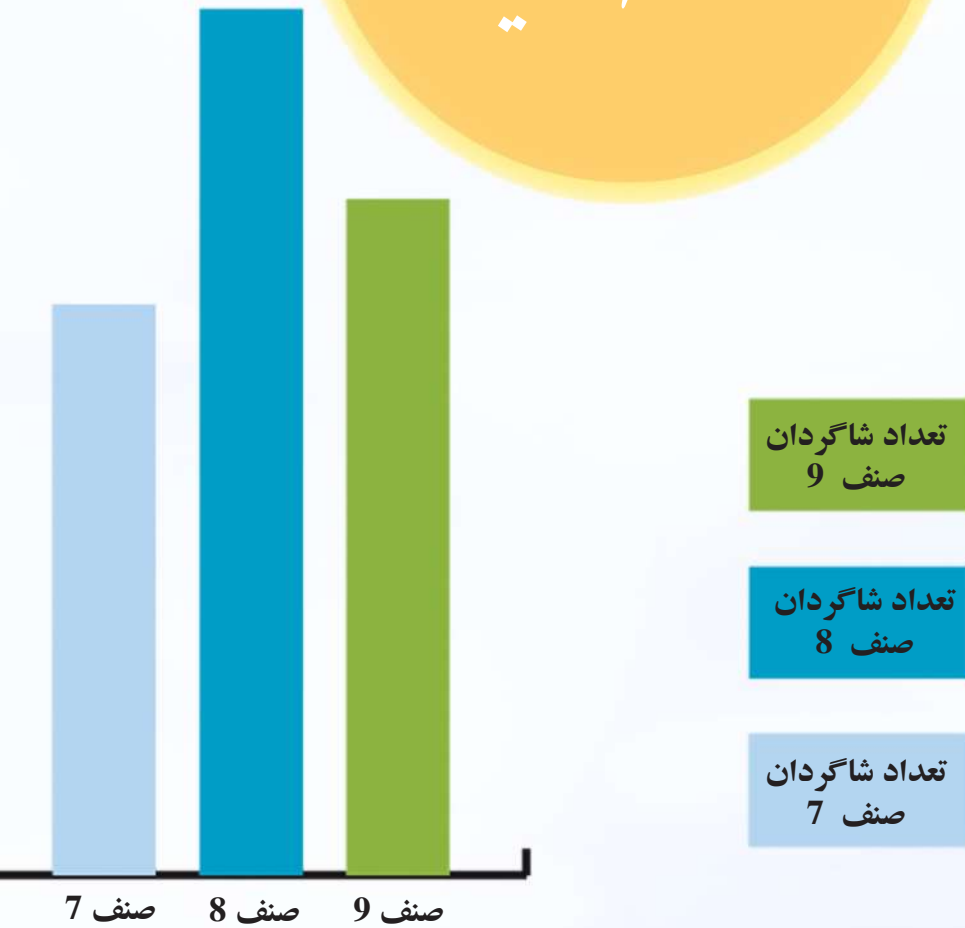
به طور جمعی این پروسه به نام تشکیل رابطه‌های خطی یاد می‌گردد، که در حقیقت تطبیق معادلات خطی در زنده گی روزمره می‌باشد.

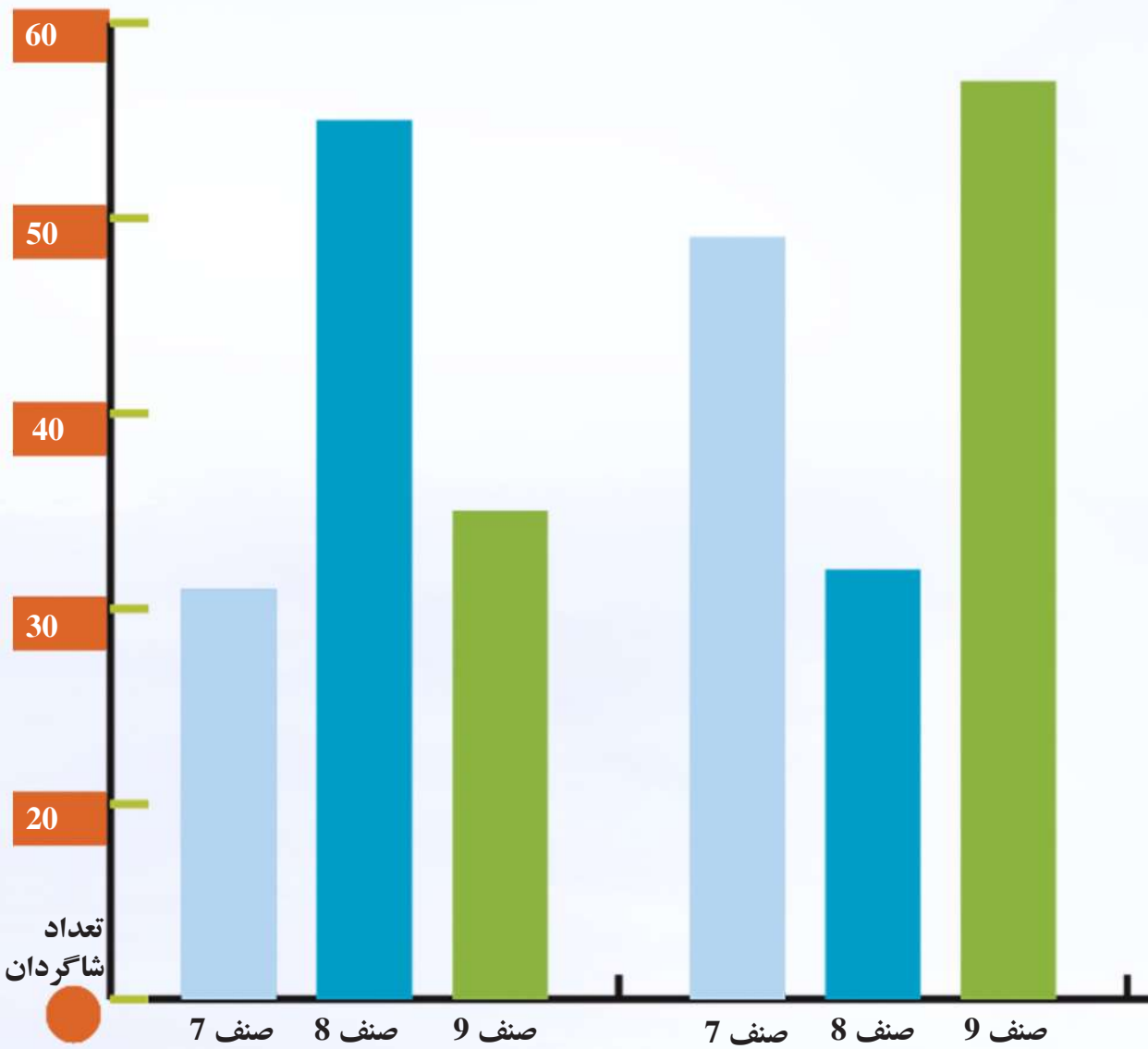
● تابع

یک رابطه بین عناصر دو ست طوری که برای هر قیمت ناحیه متحول یگانه تصویر یا عدد وجود داشته باشد به نام تابع یاد می‌گردد.

فصل دهم

احصائیه







جدول کثرت دیتای غیر متمادی

شخصی می خواهد به خاطر اشتراک در میله نوروز از کابل به مزار برود. از عابر راه می پرسد. عابر می گوید: از کابل به چاریکار، از چاریکار به سالنگ، از سالنگ به دوشی و از دوشی ... شخص اشتراک کننده میله نوروز از شنیدن این جواب گیج می گردد.

آیا عابر می توانست با جزئیات کمتر به طور مختصر جواب بدهد؟

فعالیت

نمرات شاگردان یک صنف در مضمون ریاضی قرار زیر است:

42	25	30	35	48	67	59	51	58	88
82	77	48	56	75	78	72	91	56	43
94	53	57	63	82	100	42	95	47	20
59	40	62	12	75	26	76	92	83	96

- اگر بخواهیم جدول کثرت را تشکیل دهیم، آیا نوشتن نمرات از 1 تا 100 فکر خوبی است؟ چه مشکلاتی دارد؟
- جدول زیر را تکمیل کنید:

نمره	تعداد f
0 تا 9	
10 تا 19	
20 تا 29	2
30 تا 39	
40 تا 49	
50 تا 59	
60 تا 69	
70 تا 79	
80 تا 89	
90 تا 100	

- دینتای را که می‌توانند در دسته پنجم جدول قرار گیرند نام ببرید.
- سطر دوم، یعنی چه؟
- اگر دینتای بالا را نمی‌داشتیم، آیا می‌توانستیم بگوییم نمره دو نفری که بین 11 تا 20 است، چند است؟
- چند دینتا مختلف می‌تواند در هر دسته قرار گیرد؟

بعضی اوقات وقتی تعداد دینتا زیاد یا کثرت بسیاری از دینتا صفر یا عدد کم باشد جدول کثرت مجزا کمک زیادی ننموده، یا تشکیل آن خیلی مشکل است؛ بنابراین در این حالت از جدول کثرت به شکل دسته بندی استفاده می‌کنیم، کثرت هر دسته نشان می‌دهند که در دسته چند دینتا وجود دارد؛ ولی ما نمی‌توانیم بگوییم آن دینتا کدام اند.

مثال: با استفاده از دینتای فعالیت فوق، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمره	تعداد f
0 - 49	13
50 - 59	8
60 - 69	3
70 - 79	6
80 - 89	4
90 - 100	6

دسته اول چه چیزی را به شما نشان می‌دهد؟

استفاده از کدام جدول ساده تر است؟

اگر نمره یک شاگرد 62 باشد در کدام دسته قرار دارد؟

عدد 50 و 59 در دسته دوم چه چیزی را نشان می‌دهد؟

حل: دسته اول نشان دهنده تعداد شاگردانی که نمره آن‌ها از 50

کم تر است و یا هم ناکام شده اند.

اگر بخواهیم بدانیم که چند شاگرد ناکام شده‌اند جدول دوم کار

ما را ساده‌تر می‌کند، زیرا اطلاعات 5 سطر اول جدول را، در یک

سطر خلاصه کرده ایم.

عدد 62 در دسته سوم قرار دارد.

عدد 50 نشان دهنده کم‌ترین عددی است که می‌تواند در این دسته قرار گیرد و 59 نشان

دهنده بیشترین عددی است که می‌تواند در این دسته قرار گیرد.

تمرین

جدول کثرت دینتای زیر را تکمیل کنید:

10	8	20	30	40	10
12	14	25	35	30	18
14	15	17	28	29	37

نمره	1 - 9	10 - 19	20 - 29	30 - 39
تعداد				

خواص اجزای جدول کثرت



پس از آن که معلم در صنف شاگردان خود را به سه دسته خوب، متوسط و ضعیف تقسیم کرد، یک شاگرد از دسته خوب که نمره 98 داشت پرسید: آیا من با کسی که نمره اش 82 است در کورس یکجا هستم؟

فعالیت

نمرات شاگردان در مضمون ریاضی و جدول کثرت در درس قبل را در نظر بگیرید. معلم این صنف می خواهد به شاگردان توصیه کند تا برای بهتر شدن نتایج مضمون شان کورس شخصی بگیرند. برای این کار صنف را به سه دسته ضعیف، متوسط و خوب تقسیم نموده جدول زیر را پر کنید:

وضعیت شاگردان	تعداد
0 - 59 : ضعیف	
60 - 79 : متوسط	
80 - 100 : خوب	

- عدد 60 و عدد 80 چه چیزی را نشان می دهند؟
- چند نمره مختلف می تواند در دسته دوم قرار گیرد؟
- این اعداد را با اختلاف 80 و 60 مقایسه کنید.
- شاگردانی که نمره آنها بین 80 تا 100 است، در کدام دسته قرار دارند؟
- آیا کورسی که شاگردان دسته سوم در آن شرکت می کنند با کورسی که شاگردان دسته دوم شرکت می کنند یکسان است؟
- آیا کورسی که یک شاگرد با نمره 83 در آن شرکت می کند، با کورسی که یک شاگرد با نمره 90 در آن شرکت می کند و شاگردی که نمره 93 گرفته است یکسان هستند؟

کمترین مقداری که می تواند در یک دسته قرار گیرد، سرحد پایینی و بیشترین مقداری را که می تواند در یک دسته قرار گیرد، سرحد بالایی می نامیم. سرحد بالایی و پایینی صنف، موقعیت دیتا را در یک صنف مشخص می کند؛ یعنی تعیین می کند که یک دیتا در کدام صنف باشد. هم چنان سرحدهای بالایی و پایینی یک دسته یا صنف طول صنف که عبارت از تفاوت این دو سرحد است، را تعیین می کند.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که **data** های که در یک دسته قرار می‌گیرند از نظر احصاییوی تفاوت خاصی برای ما ندارند و می‌توان همه را یکسان در نظر گرفت برای نمایش یکسان هر دسته از عددی که اوسط دسته است استفاده می‌کنیم.

مثال: نمره‌های مضمون ریاضی یک صنف در زیر خلاصه شده است:

نمره ریاضی	تعداد	وسط دسته
0 - 49	4	$\frac{0+49}{2} = 24.5$
50 - 59	2	$\frac{50+59}{2} = 54.5$
60 - 69	7	$\frac{60+69}{2} = 64.5$
70 - 79	10	$\frac{70+79}{2} = 74.5$
80 - 89	9	$\frac{80+89}{2} = 84.5$
90 - 100	8	$\frac{90+100}{2} = 95$

آیا از نظر کامیابی یا ناکامی شاگردی که 12 نمره گرفته است با شاگردی که 25 یا 48 نمره گرفته است در یک دسته فرق می‌کند؟ طول‌های اول، دوم و سوم را پیدا کنید. آیا در دسته‌بندی باید طول دسته‌ها برابر باشند. اوسط هر دسته را دریافت نموده این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟

حل: از نظر کامیابی و ناکامی در یک دسته شاگردان که نمره 12، 25 و 48 گرفته‌اند با هم فرقی ندارند؛ زیرا همه آن‌ها ناکام شده‌اند.

$$50 - 0 = 50 \text{ طول دسته اول}$$

$$60 - 50 = 10 \text{ طول دسته دوم}$$

$$70 - 60 = 10 \text{ طول دسته سوم}$$

می‌توان برای هر دسته چنین گفت: ضرور نیست طول دسته‌ها با هم برابر باشند. طول دسته، بسته‌گی به این دارد که به خاطر کدام مطلب دسته بندی می‌شود و چه اطلاعاتی می‌توانیم از آن به دست آوریم. در مثال قبلی کورس شخصی که می‌خواستیم صنف را به سه دسته تقسیم کردیم. 4 نفر از شاگردان 24.5 و 2 نفر 54.5، 7 نفر 64.5 و 10 نفر 74.5 و 9 نفر 84.5 و 8 نفر 95 نمره کسب کرده‌اند.

تمرین

جدول زیر را تکمیل کنید.

داده‌های هر دسته	دسته	طول دسته	وسط دسته
16, 16.5, 17, 17.5	16 - 18		
18, 18.5, 19.5, 20	18 - 20		

کثرت تجمعی

چطور فهمیده می‌توانیم که تا اخیر
ماه اسد چند روز رخصتی داریم؟



فعالیت

توسط یک جنتری، جدول زیر را پر کنید:

ماه های سال	به شمول روزهای جمعه روزهای رخصتی	ستون سوم
حمل		
ثور		
جوزا		
سرطان		
اسد		
سنبله		
میزان		
عقرب		
قوس		
جدی		
دلو		
حوت		

- در حمل چند روز رخصتی داریم؟
- در ثور چند روز رخصتی داریم؟
- در جوزا چند روز رخصتی داریم؟
- از اول سال تا پایان جوزا چند روز رخصتی داریم؟
- در جدول کثرت بالا ستون سوم را طوری پر کنید که در هر ردیف کثرت همان دسته و دسته‌های قبل از آن باهم جمع شده باشند.

- آیا با استفاده از این ستون می‌توانید آسان‌تر بگویید، تا پایان جوزا چند روز رخصتی دارید؟
- آخرین عدد سطر در ستون سوم چند است؟ این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟

در فعالیت بالا تعداد روزهای رخصتی را در هر ماه کثرت مطلق نامیده و تعداد روزهای رخصتی تا پایان سال را کثرت تجمعی می‌نامیم. کثرت تجمعی هر دسته برابر کثرت مطلق آن دسته و دسته‌های قبل از آن است.

کثرت مطلق (تعداد کالاهای مسترد شده)	ماه پس از خرید	مثال: یک کارخانه اعلان کرد که اگر تولیدات آن دچار مشکلات باشد خریداران می‌توانند اشیاء را غرض ترمیم به کارخانه مسترد کنند. جدول مقابل نشان دهندهٔ تعداد کالاهای پس از فروش که برای ترمیم مسترد شده اند می‌باشد.
3	10 - 13	
6	13 - 16	
7	16 - 19	
4	19 - 22	

چند کالا برای ترمیم پس از 16 ماه به کارخانه مسترد شده اند؟

دسته‌ها	کثرت مطلق	کثرت تجمعی	بین 16 تا 19 ماه چند کالا برای ترمیم مسترد شده است؟
10 - 13	3	3	
13 - 16	6	$6 + 3 = 9$	
16 - 19	7	$9 + 7 = 16$	
19 - 22	4	$16 + 4 = 20$	

حل: کثرت تجمعی را پیدا می‌کنیم.

باتوجه به سطر دوم جدول می‌بینیم که 16 ماه اول

9 کالا برای ترمیم؛ 7 کالا بین ماه‌های 16 تا 19

مسترد گردیده است. اگر این اعداد را نمی‌دانستیم

با استفاده از کثرت تجمعی می‌توانیم چنین پیدا کنیم.

$$16 - 9 = 7$$

تمرین

جدول زیر را تکمیل کنید.

دسته‌ها	کثرت مطلق	کثرت تجمعی
10 - 15	3	
15 - 20	2	
20 - 25	4	
25 - 30	7	
30 - 35	6	
35 - 40	5	



کثرت نسبی

نرگس و مرسل که در دو مکتب مختلف درس می‌خوانند با هم صحبت می‌کردند.
نرگس گفت: صنف ما 37 نفر کامیاب دارد. مرسل گفت: صنف ما 30 نفر کامیاب دارد. شاگردان کدام صنف بهتر درس خوانده‌اند؟

فعالیت

- صنف الف 40 شاگرد و صنف ب 35 شاگرد دارد. در مضمون ریاضی 32 شاگرد از صنف الف و 30 شاگرد از صنف ب کامیاب شده‌اند.
- نسبت شاگردان کامیاب به کل شاگردان صنف الف چند است؟
 - نسبت شاگردان کامیاب به کل شاگردان صنف ب چند است؟
 - با مقایسه این دو نسبت بگویید که شاگردان کدام صنف بهتر درس خوانده‌اند؟
 - آیا می‌توانید با مقایسه تعداد شاگردان کامیاب در دو صنف این جواب را بدهید.

فعالیت فوق نشان می‌دهد که در بعضی حالات برای مقایسه دو وضعیت نمی‌توان کثرت‌های مطلق را به هم مقایسه کرد در چنین حالت از $\frac{\text{کثرت مطلق}}{\text{کثرت کل داتا}}$ استفاده می‌کنیم.

مقدار این نسبت را کثرت نسبی می‌گوییم برای مقایسه بهتر، این عدد را با فیصدی نشان می‌دهیم و فیصدی کثرت نسبی می‌نامیم.

مثال: در یک امتحان نمرات دو صنف در جدول زیر آورده شده است:
این دو صنف را باهم مقایسه کنید:

کثرت مطلق	صنف الف
6	10 - 30 ضعیف
10	30 - 50 متوسط
4	50 - 70 خوب

کثرت مطلق	صنف ب
19	10 - 30 ضعیف
25	30 - 50 متوسط
16	50 - 70 خوب

حل: جدول تعداد کل شاگردان این دو صنف باهم برابر نیستند، پس نمی‌توانیم کثرت مطلق هر دو دسته را باهم مقایسه کنیم کثرت نسبی هر دو دسته را ابتدا پیدا می‌کنیم و می‌بینیم که شاگردان ضعیف در دو صنف به گونه‌ی تقریبی نزدیک‌تر اند؛ ولی شاگردان متوسط صنف (الف) نظر به صنف (ب) موفق‌تر بوده‌اند.

صنف الف	کثرت مطلق	کثرت نسبی	فیصد کثرت نسبی
10 - 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30 - 50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50 - 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

صنف ب	کثرت مطلق	کثرت نسبی	فیصد کثرت نسبی
10 - 30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30 - 50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50 - 70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

تمرین

جدول زیر را تکمیل کنید.

صنف الف	کثرت مطلق	کثرت نسبی	فیصد کثرت نسبی
5 - 10	2		
10 - 15	3		
15 - 20	1		
20 - 25	4		
25 - 30	6		

گراف میله‌ای (گراف نواری)



در تصویر درخت‌هایی را می‌بینید که همه آن‌ها از یک جنس‌اند. آیا گفته می‌توانید که از روی ارتفاع، عمر کدام یک از آن‌ها زیاده‌تر است؟

فعالیت



از شاگردان یک مکتب پرسیدیم رنگ موتر مورد علاقه خود را بگویید. اطلاعات به دست آمده را در شکل مقابل به صورت گراف خلاصه نمودیم.

• تعداد مربع‌ها در هر میله چه چیزی را نشان می‌دهند؟

• از روی شکل، بگویید که رنگ مورد علاقه چند نفر زرد بوده است؟

• کدام رنگ از همه کمتر انتخاب شده است؟

• اگر رنگ‌ها در زیر هر ستون نوشته نمی‌شدند، آیا می‌توانستید اطلاعات لازم را پیدا کنید؟

• اگر عبارت تحت گراف نمی‌بود، آیا با دیدن گراف می‌توانستید بگویید که گراف در

مورد چیست؟

• اگر جدول مقابل داده شده است سعی کنید

گراف آن را رسم کنید آیا این کار ساده است؟

• به این گراف نگاه کنید.

زرد	سرخ	آبی	سبز
6	7	5	11



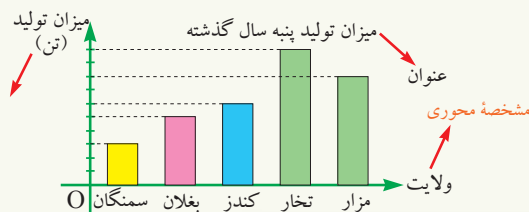
- آیا می‌توانید اطلاعات جدول فوق را در این گراف آسانتر مشاهده کنید؟
 - طول هر یک از میله‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟
 - چرا در گراف شماره 1 از مربع‌ها استفاده نمودیم؛ ولی در گراف شماره 2 این کار را نکردیم؟
 - با نگاه کردن به گراف و مقایسه طول میله‌ها بگویید: کدام رنگ‌ها به ترتیب بیشتر از همه، مورد علاقه شاگردان بوده است؟
 - آیا تغییر مکان دیتاها در رسم گراف در تفسیر اطلاعات تغییری ایجاد می‌کند؟
 - اگر سوال را در شروع فعالیت نمی‌خواندید، آیا می‌توانستید، بگویید این رنگ‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد و چه پیشنهادی می‌کنید؟
- از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

گراف بالا را گراف میله‌یی می‌نامیم و یک گراف میله‌یی باید دارای عنوان، مقیاس و مشخصه محور باشد. در گراف میله‌یی محل قرار گرفتن دیتا مهم نیست. طول میله‌ها نشان دهنده کثرت دیتا می‌باشد.

مثال: میزان تولید پنبه پنج ولایت کشور سال گذشته، بر حسب تن در جدول زیر داده شده است:

ولایت‌ها	مزار	تخار	کنندز	بغلان	سمنگان
میزان تولید	8	10	6	5	3

تولید هر ولایت را به صورت گراف میله‌یی نشان دهید. کدام ولایت تولید بیشتری داشته است؟



حل:

تمرین

- 1- برای ترسیم گراف میله‌یی به چه اطلاعاتی نیاز دارید؟
- 2- تیم‌های ورزشی یک مکتب در جدول زیر داده شده است:

بسکتبال	والیبال	فوتبال	دوش
8	12	11	6

گراف آن را ترسیم کنید.

گراف خط منکسر



دو کتوران چگونه این گراف ها را تفسیر می کنند؟

فعالیت

اداره هواشناسی درجه حرارت شهر مزار را در ماه حمل در یک شبانه روز بر حسب درجه سانتی گرید قرار جدول زیر اعلان کرده است:

12 شب	5 صبح	8 صبح	11 ظهر	6 بعد از ظهر	8 شب	بعد از 12 شب
15	20	25	28	21	23	18

اطلاعات بالا را با پیدا کردن نقاط روی مستوی مختصات زیر نمایش و نقاط را توسط خط مستقیم باهم وصل کنید.

با توجه به گراف بالا جواب سؤال های زیر را بنویسید.

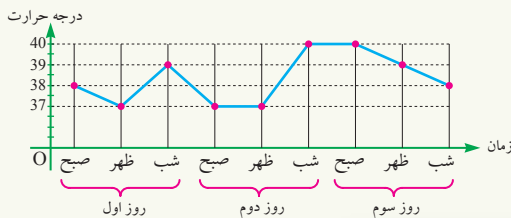
- حداکثر و حداقل درجه حرارت در کدام ساعت بوده است؟
 - در کدام ساعت درجه حرارت از 25 درجه بیشتر بوده است؟
 - بیش ترین تغییرات درجه حرارت بین کدام ساعت ها بوده است؟
 - کدام ساعت بیشترین درجه حرارت بوده است؟
- از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

اگر اطلاعات جمع آوری شده را توسط نقاط در مستوی مختصات ترسیم نموده و این نقاط را به کمک خطوط مستقیم با هم وصل نماییم، گرافی که توسط نقاط وصل شده به دست می آید به نام گراف خط منکسر یاد می شود.

مثال: داکتر طب یک مریض را در سه روز متواتر تحت مطالعه قرار می دهد. گراف تغییر درجه حرارت را رسم کنید.

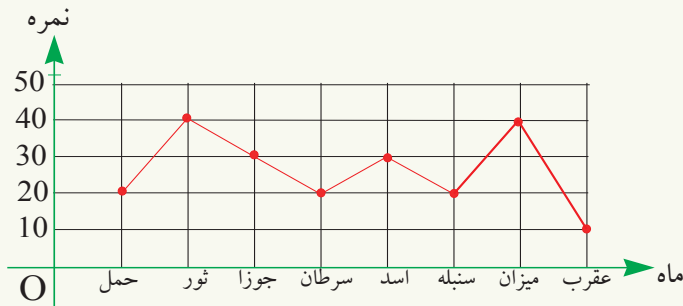
حل: data در جدول زیر آورده شده است.

روز اول			روز دوم			روز سوم		
صبح	ظهر	شب	صبح	ظهر	شب	صبح	ظهر	شب
38	37	39	37	37	40	40	39	38



تمرین

1- منیژه، گراف خط منکسر نمره های ریاضی ماهانه خود را به صورت شکل زیر رسم کرده است.



- او در کدام ماه بیشترین نمره را گرفته است؟
- نمره منیژه در کدام ماه از سایر ماه ها کمتر است؟
- در کدام ماه نمره منیژه از 35 بیشتر است؟

اوسط دیتای منفصل یا غیر متمادی



فردی یکی از دست‌های خود را در کوره‌یی با حرارت 10 درجه سانتی‌گرید بالای صفر قرار داده و دست دیگر خود را در داخل یخچال با سردی 10- درجه سانتی‌گرید قرار داده است از او پرسیدند که در چه حال هستی؟ او گفت: به طور اوسط خوب هستم! آیا پیدا کردن اوسط در این وضعیت درست است؟!

فعالیت

نمرات آخر سال سلیمان به قرار زیر است:

84 92 92 82 97 82 75 82 75 75

- اوسط نمرات سلیمان را پیدا کنید.
- به جای آن که 75 را سه بار با هم جمع کنید چه عمل دیگری می‌توانستید انجام دهید.
- جدول کثرت نمرات سلیمان را تشکیل دهید.
- روشی برای پیدا کردن اوسط نمرات سلیمان، با توجه به جدول کثرت به دست آورید.

فعالیت بالا به ما نشان می‌دهد که برای پیدا کردن اوسط دیتا در صورت تکرار دیتا می‌توان به جای جمع دیتا از ضرب کثرت در دیتا استفاده نمود؛ اگر در حالت کلی یک دیتا را با x و کثرت آن را با f نشان دهیم. این حاصل ضرب برابر $f \cdot x$ خواهد بود. اگر دیتای اول و کثرت آن را به ترتیب با f_1 و x_1 ، دیتای دوم و کثرت آن را به ترتیب با f_2 و x_2 و ... دیتای آخر را با x_n و کثرت آن را با f_n نشان دهیم، اوسط تمام دیتا برابر خواهد بود با:

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n}{n}$$

مثال: میزان درآمد کارکنان در یک شرکت در جدول زیر آورده شده است:

درآمد بر حسب افغانی در ماه	شغل
50000	رئیس
40000	دو معاون
20000	منشی
30000	سه نفر متخصص
25000	پنج نفر مأمور
10000	دو نفر خانه سامان

مدیر این شرکت ادعا می کند که اوسط درآمد کارکنان این شرکت بیشتر از 30000 افغانی در ماه است. آیا این رقم نشان دهنده درآمد خوبی برای همه کارکنان شرکت است؟ آیا ادعای مدیر شرکت درست است؟ با استفاده از جدول کثرت اوسط درآمد کارکنان را پیدا کنید.

تعداد کارمندان f	درآمد هر کدام x
رئیس	1 50000 $1 \times 50000 = 50000$
معاون	2 40000 $2 \times 40000 = 80000$
منشی	1 20000 $1 \times 20000 = 20000$
متخصص	3 30000 $3 \times 30000 = 90000$
مأمور	5 25000 $5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2 10000 $2 \times 10000 = 20000$

$$n = 1+2+1+3+5+2 = 14 \text{ تعداد}$$

$$\bar{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14} = \frac{385000}{14} = 27500$$

چون اوسط درآمد کم تر از 30000 افغانی است، پس ادعای او درست نیست.

تمرین

سهیل شنبه و یکشنبه هر روز، 12 صفحه کتاب و سه شنبه و چهارشنبه و پنجشنبه هر روز 10 صفحه و جمعه 16 صفحه کتاب خواند. با تشکیل جدول کثرت، اوسط صفحات خوانده شده کتاب را در هر روز را پیدا کنید.

اوسط دینای متصل یا متمادی با استفاده از جدول



وزارت تجارت اعلان کرد که اوسط صدور مقدار کشمش در سال گذشته ده هزار تن بود، یعنی چه؟

فعالیت

یک دهقان محصول کچالوی خود را در بوری‌ها، با اوزان مختلف بسته بندی کرد. این دهقان ادعا کرد که اوسط وزن بوری‌ها هفت سیر است.

از طرف شاروالی این بوری‌ها اندازه‌گیری شد؛ نتیجه در جدول زیر آورده شده است، آیا ادعای دهقان درست است؟

وزن هر بسته	تعداد بوری‌ها
6 - 6.5	11
6.5 - 7	14
7 - 7.5	12
7.5 - 8	8

• اوسط وزن بوری‌های دسته 7 - 6.5 چه عدد می‌تواند باشد؟

• یک بوری با وزن 7 سیر در کدام دسته قرار می‌گیرد؟

اوسط هر دسته را در جدول مقابل پیدا کردیم.

با توجه به جدول مقابل می‌توان گفت که:

وزن بوجی‌ها	تعداد بوری‌ها
6.25	11
6.75	14
7.25	12
7.75	8

- اوسط این دیتا چند است؟
- آیا ادعای دهقان درست است؟

مثال: یک متخصص زراعت ارتفاع 35 درخت چنار را اندازه گرفت او می خواهد اوسط ارتفاع این نوع درخت ها را پیدا کند.

ارتفاع	تعداد درخت ها (f)	اوسط (x)	$f \cdot x$
8 - 8.5	4	8.25	$4 \times 8.25 = 33$
8.5 - 9	5	8.75	$5 \times 8.75 = 43.75$
9 - 9.5	8	9.25	$8 \times 9.25 = 74$
9.5 - 10	7	9.75	$7 \times 9.75 = 68.25$
10 - 10.5	6	10.25	$6 \times 10.25 = 61.5$
10.5 - 11	5	10.75	$5 \times 10.75 = 53.75$

$$\bar{x} = \frac{33 + 43.75 + 74 + 68.25 + 61.5 + 53.75}{35} = \frac{334.25}{35} = 9.55$$

تمرین

اطلاعات راجع به اندازه قد 20 شاگرد یک مکتب به صورت زیر داده شده است:

قد	158 - 162	162 - 166	166 - 170	170 - 174	174 - 178
کثرت	2	6	4	5	3

اوسط دیتای بالا را در یافت کنید.

- وقتی که تعداد دیتا زیاد باشد از جدول کثرت به صورت دسته بندی استفاده می کنیم. در این حالت کثرت هر دسته نشان می دهد که در هر دسته چند دیتا قرار دارد.
 - کم ترین مقدار یک دسته را سرحد پایینی و بیشترین مقدار آن را سرحد بالایی دسته می گویند.
 - برای یکسان نشان دادن هر دسته از عددی که اوسط هر دسته است استفاده می نماییم.
 - تکرار هر دیتا را کثرت مطلق آن دیتا در جدول کثرت می گوئیم.
 - در دسته بندی دیتا تمام دیتای واقع در یک دسته را برابر مرکز آن دسته در نظر می گیریم.
 - مرکز دسته ها به تعداد اعضایی که در آن دسته قرار دارند تکرار می شود؛ یعنی کثرت مرکز دسته ها برابر تعداد اعضای آن است که در آن دسته قرار گرفته و این کثرت را کثرت مطلق آن دسته می گوئیم.
 - مجموع کثرت مطلق هر دسته و کثرت دسته های قبل از آن را کثرت تجمعی آن دسته می نامند و کثرت تجمعی آخرین دسته برابر است با تعداد کل دیتا.
 - نسبت کثرت مطلق هر دسته بر تعداد کل دیتا را به نام کثرت نسبی می گویند. اگر f کثرت یک دسته و n تعداد دیتای آن دسته باشد کسر $\frac{f}{n}$ را کثرت نسبی آن دسته می گویند.
 - اگر کثرت نسبی را ضرب 100 نماییم فیصدی کثرت نسبی به دست می آید.
 - از گراف میله یی بیشتر برای ترسیم متحول معجزا و کیفی استفاده می کنند، در ترسیم گراف میله یی ترتیب قرار گرفتن میله ها اهمیت ندارد آن چه که در این گراف مهم است کثرت دیتا است.
- در وقت ترسیم گراف میله یی سه موضوع زیر را در نظر بگیرید:
- عنوان:** بالا یا زیر هر گراف موضوع به طور خلاصه نوشته شود.
- بر حسب محورها:** هر یک از محورها مشخصه دارند که مشخص کننده متحولی است که آن محور نشان می دهد.
- مقیاس:** مقیاس هر محور باید مشخص باشد؛ یعنی برای دیتا واحد انتخاب شود و آن واحد در حاشیه گراف تذکر داده شود.
- اگر دیتا را توسط نقاط در یک مستوی مختصات مشخص و این نقاط را به کمک خطوط با هم وصل نماییم گرافی که به دست می آید به نام گراف خط منکسر یاد می شود.
- برای پیدا کردن اوسط دیتا در صورت تکرار دیتا می توان به جای جمع دیتا از ضرب کثرت در دیتا استفاده نمود. در دیتا متصل یا متمادی، مرکز دسته ها را در کثرت های

آن ضرب و با هم جمع کرده و پس از آن بر مجموع کثرت‌ها (که همان تعداد کل دیتا است) تقسیم کرد.

$$\text{اوسط در جدول کثرت} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

تمرین عمومی

1- تعداد شاگردان یک مکتب دوازده صنفی که هر صنف آن به دو صنف (الف) و (ب) تقسیم شده اند قرار زیر است:

30	35	38	جدول (الف)	40	45	42	37	جدول (ب)
31	32	41		48	49	32	35	
36	35	44		46	35	46	32	
45	37	38						

- دیتای بالا را به چهار دسته 30-34، 35-39، 40-44، 45-49 تقسیم و کثرت هر دسته را بنویسید.
 - طول و اوسط هر دسته دیتای بالا را حساب کنید.
 - کثرت تجمعی هر دسته را پیدا کنید.
 - کثرت نسبی و فیصدی کثرت نسبی هر دسته را دریافت کنید.
 - مجموعه کثرت‌های نسبی تمام دسته‌ها برابر به چیست؟
- 2- صاحب یک مغازه در یک هفته تعدادی کارتن‌های بسکویت را قرار جدول زیر به فروش رسانده است:

شنبه	یک شنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه	پنج شنبه	جمعه
8	11	15	9	13	6	4

- دیتای فوق را به صورت گراف میله‌ای نشان دهید.

3- نمرات امتحان سالانه صنف هفتم مریم قرار جدول زیر داده شده است:

تربیت بدنی	ریاضی	ساینس	عربی	انگلیسی	تعلیمات اسلامی	دری	پشتو	هنرها	علوم اجتماعی
76	92	82	75	85	90	95	80	88	84

- گراف نمرات مریم را به شکل خط منکسر رسم کنید.
- بیشترین نمره و کمترین نمره را مشخص کنید.

4- میزان در آمد مدیر، سرمعلم، معلمان، ماموران، تحویلداران و ملازمان یک مکتب در جدول قرار زیر آورده شده است:

درآمد بر حسب افغانی در ماه	شغل
10000	مدیر مکتب
8000	سر معلم
4000	4 نفر مامور
5000	25 نفر معلم
3500	2 نفر تحویلدار
3000	5 نفر ملازم

• تعداد کارمندان (کثرت) را معین کنید

• حاصل ضرب هر دیتا را با کثرت آن حساب کنید.

• اوسط در آمد کارمندان را دریافت کنید.

5- یک متخصص زراعت اندازه طول 500 بوته

گندم را مورد مطالعه قرار داد از دیتا به دست آمده یک نمونه تصادفی 30 تایی را قرار زیر انتخاب نمود:

40	50	51	47	34	35	45	45
60	65	50	67	54	55	43	40
58	57	54	51	38	39	47	43
62	65	64	60	30	35		

• دیتای بالا را به صورت منظم بنویسید.

• این دیتا را در یک جدول به چهار دسته 30-40 ، 40-50 ، 50-60 ، 60-70 تقسیم کنید.

• کثرت هر دسته را پیدا کنید.

• اوسط هر دسته را دریافت کنید.

• حاصل ضرب کثرت و اوسط هر دسته را بنویسید.

• اوسط دیتا را حساب کنید.

6- تعداد شاگردان یک صنف 25 نفر است که از ولایت‌های بادغیس، فاریاب، اورزگان، زابل و غور هستند اگر ولایت بادغیس را با عدد 1، ولایت فاریاب را با عدد 2، ولایت ارزگان را با عدد 3، ولایت زابل را با عدد 4 و ولایت غور را با عدد 5 نشان دهیم. دیتای زیر بر اساس محل تولد این شاگردان به دست آمده است.

جدول توزیع کثرت دیتا را تکمیل کنید.

5, 5, 3, 1, 5, 4, 3, 5, 1, 2, 1, 3, 5, 2
1, 5, 1, 2, 4, 1, 2, 1, 3, 2, 1

دسته	کثرت	کثرت نسبی	کثرت تجمعی
بادغیس			
فاریاب			
اورزگان			
زابل			
غور			

گراف میله‌یی این دیتا را رسم کنید.



فصل یازدهم احتمال





کثرت نسبی و احتمال

چانس آمدن شماره 6 در دانه رمل را پیشبینی کنید.
نسبت تعداد آمدن شماره 6 را در 30 بار انداختن دانه رمل حساب کنید.
این اعداد چه چیز را برای ما نشان می دهد؟

فعالیت

- در یک امتحان صنفی ریاضی 35 نفر اشتراک نموده بودند. بعد از ارزیابی به تعداد 7 نفر نمرات بالاتر از 90 (عالی)، 15 نفر بین 60 و 90 (بسیار خوب)، 8 نفر بین 50 تا 60 (خوب) و به تعداد 5 نفر پایینتر از 50 (ناکام) نمره گرفته اند.
- جدول کثرت را تشکیل نموده و کثرت نسبی شاگردان را برای درجات عالی، بسیار خوب، خوب و ناکام حساب کنید.
 - فیصدی شاگردان ناکام در صنف چند فیصد است؟
 - اگر یک شاگرد از بین صنف به اساس قرعه انتخاب گردد، دریافت کنید احتمال آن که شاگرد از گروه شاگردان:
 - عالی باشد.
 - خوب باشد.
 - ناکام باشد.
 - نتایج احتمال انتخاب هر حالت فوق را با کثرت نسبی همان حالت مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

- احتمال، قبل از وقوع حادثه برای پیشبینی یک حادثه، مورد استعمال قرار گرفته؛ اما کثرت نسبی بعد از انجام یک تجربه به اساس ارقام به دست آمده از انجام تجربه اتفافی حساب می گردد.
- احتمال تجربی برای یک حادثه اتفافی مساوی به کثرت نسبی حادثه می باشد.
- چون مجموع کثرت نسبی تمام حالات مساوی به 1 است؛ بنابراین مجموع احتمال همه

حالات نیز مساوی به 1 می‌باشد.

مثال: در ماه قوس سال گذشته 10 روز ابری و بارانی بود.

(a) کثرت نسبی روزهای ابری و بارانی را در ماه قوس دریافت کنید.

(b) پیشگویی تان برای ماه قوس آینده چگونه خواهد بود؟

(c) آیا این پیشگویی قطعی است که همه ساله در ماه قوس چنین خواهد بود؟

حل:

(a) چون از جمله 30 روز ماه قوس، به تعداد 10 روز آن بارانی یا ابری است؛ بنا بر این کثرت

نسبی روزهای بارانی یا ابری برابر به $0.33 = 33\% \approx \frac{1}{3} = \frac{10}{30}$ روزهای ماه می‌باشد.

(b) پیشگویی برای ماه قوس آینده با در نظر داشت کثرت نسبی سال گذشته نیز مساوی به 30% خواهد بود.

(c) این پیشگویی قطعی نبوده ممکن است بیشتر و یا کمتر از 10 روز در ماه قوس آینده بارانی و یا ابری باشند.

تمرین

1- در یک حادثه اتفاقی E_1 : "یک طفل متولد شده است"، کثرت نسبی حادثه؛ یعنی $h(E_1) = 0,51$ و احتمال این حادثه نیز $P(E_1) = 0,51$ را چگونه از هم می‌توانیم فرق نماییم؟ توضیح دهید.

2- رخصتی‌های تابستانی شاگردان همه ساله 10 روز اول ماه اسد می‌باشند، سال گذشته نسبت شدت گرمی رخصتی‌ها به تعداد 10 روز دیگر اضافه گردید، مطلوب است: کثرت نسبی رخصتی‌های ماه اسد سال گذشته و مقایسه آن با رخصتی‌های سال آینده تابستانی.

چانس برابر و نا برابر در یک فضای نمونه



از هر خریطه یک گلوله می‌گیریم.
از کدام خریطه گلوله را بگیریم تا
چانس برآمدن گلوله به رنگ سبز
بیشتر باشد؟

فعالیت

- دو شاگرد با هم قرار می‌گذارند تا در یک بازی رمل شماره‌های 1 الی 6 را انتخاب کنند.
- آیا چانس آمدن شماره 1 الی 6 با هم برابر است؟
- هر گاه روی 2 سطح مکعبی دانه رمل شماره 6 حک شده باشد، در این صورت چانس انتخاب را در کدام حالت زیر به نفع خود می‌دانید؟
 - انتخاب شماره 6 باشد.
 - انتخاب نفر مقابل شماره 1 باشد.
- آیا احتمال شماره‌های 6 و 1 با هم برابر است؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:
تا به حال با حوادثی رو به رو بودیم که احتمال عناصر اولیه فضای نمونه با هم یکسان بودند، که بر اساس آن تعریف احتمال صورت گرفته است.
احتمال را به طور معمول به P نمایش داده و $P(A)$ احتمال حادثه اتفاقی A می‌باشد.
هر گاه یک فضای نمونه، n عنصر داشته باشد، در این صورت احتمال هر حادثه اولیه E (غیر قابل تجزیه) مساوی به $P(E) = \frac{1}{n}$ می‌باشد.

مثال 1: پرتاب یک سکه را که هر دو طرف آن شیر است در نظر می‌گیریم، مطلوب است احتمال آنکه سکه:
(a) شیر بیاید.
(b) خط بیاید.

(c) آیا احتمال حوادث اتفاقی شیر و خط در مثال فوق باهم برابر هستند؟
حل: می‌دانیم که هر دو طرف سکه شیر بوده و فضای نمونه {شیر} = S می‌باشد:

$$(a): P(\text{شیر}) = \frac{1}{1} = 1$$

$$(b): P(\text{خط}) = \frac{0}{1} = 0$$

(c): هر دو طرف با هم، چانس برابر ندارند؛ زیرا در بالا دیده می‌شود که $0 \neq 1$
مثال 2: انداختن یک دانه رمل نورمال را در نظر می‌گیریم، چون فضای نمونه آن $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بوده؛ بنا براین:

$$P(E) = P(\{6\}) = P(\{5\}) = P(\{4\}) = P(\{3\}) = P(\{2\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \approx 0.17 = 17\%$$

تمرین

1- از بین یک خریطه که در آن 3 گلوله به رنگ سرخ، 4 عدد آبی، یک عدد زرد قرار دارند، یک گلوله را به صورت اتفاقی می‌برداریم. مطلوب است احتمال آن که:

(a) گلوله سرخ باشد.

(b) گلوله زرد باشد.

(c) گلوله آبی باشد.

(d) اگر گلوله‌های سرخ رنگ از نگاه جسم، دو چند گلوله‌های زرد رنگ باشند، آیا احتمال برآمدن گلوله‌های سرخ و زرد با هم برابر است؟

2- حرف اول نام شاگردان یک صنف را جمع آوری نموده، نتیجه را در جدول شکل زیر درج نمودیم.

حرف اول نام شاگرد	کثرت مطلق تعداد شاگردان
م	9
ع	8
ف	5
ک	3
تعداد کل شاگردان	25

(a) کثرت نسبی گروه شاگردان را به اساس حروف م، ع، ف و ک اسم شاگردان به دست آورید.

(b) هر گاه یک تن از شاگردان را به حیث نماینده، به اساس قرعه انتخاب نماییم مطلوب است!

- احتمال این که اسم نماینده صنف با حرف م آغاز شده باشد.

- احتمال این که نام نماینده صنف با حرف ک شروع شده باشد.

حادثهٔ اتفاقی یک فضای نمونه

آسمان ابری است!
چه حادثه‌یی اتفاق خواهد افتاد؟



فعالیت

بکس جیبی احمد بین ساعات 10 الی 12 قبل از ظهر در یک نقطهٔ پر ازدحام شهر سرقت شده است. بعد از اطلاع به پولیس، مشاهدات اولی نشان می‌دهد که در عین وقت در محل سه نفر از کیسه برها به اسم‌های X, Y, Z که نزد پولیس سابقهٔ جرمی دارند، دیده شده‌اند. به خاطر شناسایی دزد، با پولیس همکاری نموده فعالیت زیر را انجام دهید.

احتمال این که بکس جیبی احمد را یک یا چند نفر از متهمان مشکوک به گونهٔ مشترک با هم دزدیده باشند، کدام ترکیب باید مورد تحقیق قرار گیرد؟

- اگر ست متهمان مشکوک را به $S = \{X, Y, Z\}$ نشان دهیم، کدام ست‌ها و یا ست‌های فرعی افراد مشکوک را می‌توانیم تشکیل نماییم.

- آیا احتمال این وجود دارد که متهمان مشکوک افراد بیگناه باشند؟ در این صورت ست حاصله را از نگاه ریاضی با کدام ست نشان دهیم؟

از فعالیت فوق به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

- در فعالیت فوق مشاهده نمودیم که ممکن است هر کدام از حالات فوق اتفاق افتد، بدین سبب آن را به نام حادثهٔ اتفاقی یاد می‌نماییم.
- هر ست فرعی یک فضای نمونه S ، یک حادثهٔ اتفاقی بوده که به E نشان داده می‌شود.
- هرگاه تعداد عناصر یک فضای نمونه مساوی به n عنصر باشند، تعداد مجموع حوادث اتفاقی آن مساوی به 2^n می‌باشند.

مثال: برای فعالیت فوق حوادث اتفاقی فضای نمونه $S = \{x, y, z\}$ را دریافت کنید.
حل: حوادث اتفاقی فضای نمونه فوق یا به عبارت دیگر فهرست ست‌های فرعی فضای نمونه S عبارت اند از:

حادثه‌یی که تنها x دزد باشد.	$E_1 = \{x\}$
حادثه‌یی که تنها y دزد باشد.	$E_2 = \{y\}$
حادثه‌یی که تنها z دزد باشد.	$E_3 = \{z\}$
حادثه‌یی که x و y دزد باشند.	$E_4 = \{x, y\}$
حادثه‌یی که x و z دزد باشند.	$E_5 = \{x, z\}$
حادثه‌یی که y و z دزد باشند.	$E_6 = \{y, z\}$
حادثه‌یی که x, y و z دزد باشند.	$E_7 = \{x, y, z\}$
حادثه‌یی که هیچ کدام از x, y و z دزد نباشند.	$E_8 = \{ \quad \} = \emptyset$

از مثال فوق نتیجه‌یی برای حوادث اتفاقی که مساوی به $2^3 = 8$ می‌باشد به دست می‌آید که برای تعداد حوادث اتفاقی یک فضای نمونه 3 عنصره، از قانون طاقست استفاده گردیده است.

تمرین

- 1- در پرتاب یک سکه، تعداد حوادث اتفاقی را فهرست کنید.
- 2- چهار حزب A, B, C, D که در انتخابات پارلمانی اشتراک دارند می‌خواهند تا باهم اتحاد ممکن را به خاطر پیروزی به وجود آورند.
 - تمام حالت‌های ممکن اتحاد و یا اشتراک مستقل آن‌ها را فهرست کنید.
 - اشتراک مستقلاً هر حزب و حادثه اتفاقی ناممکن یا \emptyset به نظر تان از نگاه اتحاد چگونه قابل توضیح اند؟
- 3- با یک مثال برای فضای نمونه $S = \{A, B, C, D\}$ حادثه اتفاقی ناممکن (\emptyset) و حادثه اتفاقی مطمئن S را توضیح دهید.

قواعد احتمال



- آیا در میدان کرکت هر چه دل بازیگر خواست می تواند با توپ انجام دهد؟
- آیا قواعدی در مورد وجود دارد یا نه؟

فعالیت

- مانند بازی کرکت برای پیشبرد تیوری علم احتمال از طرف دانشمندان مربوط با در نظر داشت مسائل تجربی، نیز قواعدی وضع گردیده است، سعی کنید آن‌ها را دریابید.
- آیا می توانید بگویید که احتمال یک حادثه اتفاقی هر عدد مثبت باشد؟
 - چرا احتمال یک عدد کوچکتر از یک است؟ توضیح دهید.
 - آیا احتمال یک حادثه اتفاقی می تواند یک عدد منفی باشد؟
 - آیا احتمال دو حادثه اولیه یک فضای نمونه مساوی به مجموع احتمال‌های حوادث اولیه می باشد یا خیر؟
 - آیا احتمال حوادث ناممکن و مطمئن را می دانید؟ به زبان ریاضی بنویسید.

از فعالیت فوق نتایج زیر را به دست می آوریم:

- 1- احتمال حادثه اتفاقی E همیشه بین 0 و 1 است؛ یعنی: $0 \leq P(E) \leq 1$
- 2- هر گاه S یک فضای نمونه باشد، $P(S) = 1$
- 3- برای حادثه ناممکن داریم: $P(\emptyset) = 0$

مثال: فضای نمونه چهار بار پرتاب دوسکه؛ یعنی $S = \{TT, TH, HT, HH\}$ را در نظر می گیریم. (خط = T ، شیر = H) احتمال حوادث زیر مطلوب است:
(a) هر دو سکه شیر باشند.

- (b) یک سکه شیر باشد.
 (c) هر دو سکه یکسان باشند.
 (d) هر دو سکه یکسان نباشند.
 (e) هیچ کدام از سکه‌ها خط نباشند.
حل: داریم که:

(a) برای هر دو سکه شیر باشند، حادثهٔ اتفاقی عبارت است از: $E_1 = \{HH\}$ است؛ بنابراین:
 $P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

(b) یک سکه شیر باشد $E_2 = \{TH, HT\}$ ؛ بنابراین:
 $P(E_2) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$

(c) برای هر دو سکه یکسان حادثه اتفاقی عبارت است از: $E_3 = \{TT, HH\}$ ؛ بنابراین:
 $P(E_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

(d) برای هر دو سکه یکسان نباشد عبارت است از: $E_4 = \{TH, HT\}$ ؛ بنابراین:
 $P(E_4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$

(e) برای هیچ کدام از سکه‌ها خط نباشد عبارت است از: $E_5 = \{HH\}$ ؛ بنابراین:
 $P(E_5) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$

تمرین

جواب سؤال‌های زیر را در خانه خالی با علامت ✓ نشانی کنید.
 ۱- هر گاه S فضای نمونهٔ یک تجربهٔ تصادفی و E یک حادثهٔ اتفاقی باشد، در این صورت احتمال E مساوی است به:

a) $P(E) = \frac{E}{S}$

b) $P(E) = \frac{\text{تعداد عناصر } E}{\text{تعداد عناصر } S}$

۲- اگر A یک حادثه اتفاقی باشد؛ پس:

a) $P(A) \geq 1$

b) $0 \leq P(A) \leq 1$

۳- اگر S یک فضای نمونه باشد، کدام جزء زیر درست است؟

a) $P(S) = 0$

b) $P(S) = 1$

۴- احتمال یک پیشامد ناممکن برابر است با:

a) $P(\emptyset) = 0$

b) $P(\emptyset) = 1$

دیاگرام درختی

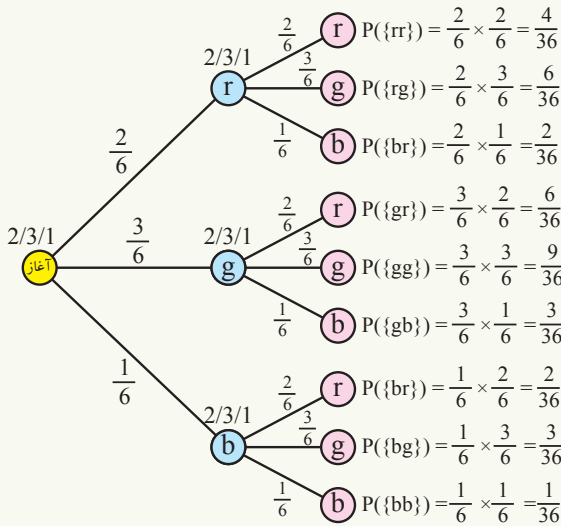
چگونه می توان به نقطه A رسید؟



فعالیت

- گراف شجره نسب فامیلی خود را از بابه کلان پدرتان شروع نموده، تا خودتان ترسیم کنید.
 - از یک دریا یک کانال جدا می شود. کانال از نقطه O گذشته، به 3 مسیر مختلف که با هم زاویه نزدیک به 30 درجه را تشکیل می دهند و هر کدام از 3 مسیر، به 3 نقطه جداگانه A, B, و C می رود از آن جا به ترتیب از هر نقطه به سه منطقه (1, 2, 3)، (4, 5, 6)، (7, 8, 9) می رسند. گراف پلان فوق را ترسیم کنید.
 - هر گاه یک سکه را سه مرتبه پرتاب نماییم، می دانیم که در برابر هر حالت ممکن شیر و یا خط در پرتاب اول، به تعداد 2 حالت ممکن شیر و خط در پرتاب دوم وجود دارند، بعد در پرتاب سوم برای هر نتیجه ممکن که به وجود آمده است، دو حالت شیر و خط وجود دارد. موضوع را توسط یک گراف ترسیم کنید.
 - در هر مبدأ مجموع احتمالات شاخچه ها چند است؟
 - نتیجه احتمال های حوادث اولیه را با حاصل ضرب احتمالات شاخچه هایی که در مسیر قرار دارند، مقایسه کنید.
- از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

- هر تجربه تصادفی را می توان توسط یک دیاگرام که از نقطه شروع یک تجربه آغاز می گردد، به تعداد نتایج ممکن شاخچه ها را ترسیم نماییم، برای انجام مرتبه دوم، تجربه را بار دیگر مانند قدم اول، به هر نتیجه ممکنه شاخچه ها ترسیم می گردد. گراف مذکور را که مانند درخت، شاخ و پنجه می کند، به نام دیاگرام درختی یاد می کنند.
- حاصل جمع احتمالات در هر نقطه انتشار شاخچه ها به طور حتمی مساوی به 1 است.
- حاصل جمع احتمالات تمام حوادث اولیه نیز مساوی به 1 می باشد.



مثال: در یک خریطه 6 مهره قرار دارد. 2 مهره به رنگ سرخ (r)، 3 مهره به رنگ سبز (g) و 1 مهره به رنگ سیاه (b). دو مهره از بین خریطه یکی پی دیگری گرفته می‌شود و بعد از مشاهده دو باره به خریطه گذاشته می‌شود. احتمال تمام حوادث اولیهٔ تجربه را تعیین کنید.

توجه داشته باشید اعداد روی هر نقطهٔ انتشار نشان دهندهٔ تعداد مهره‌ها در هر مرحله و اعداد روی هر شاخه، احتمال هر حادثهٔ اتفاقی را در هر مرحله نشان می‌دهد. احتمالات به دست آمده را برای حوادث مربوطه، در جدول زیر می‌نویسیم، به خاطر این که سهولت در مقایسهٔ احتمالات حوادث، داشته باشیم تمام احتمال‌ها را با معخرج واحد بدون اختصار می‌آوریم.

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
$P(\{w\})$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

تمرین

- هر گاه یک سکه سه بار پی هم پرتاب شود، احتمال و نتایج ممکنهٔ حوادث زیر را توسط دیاگرام درختی حساب کنید.
احتمال این که:
 - یک بار آن خط باشد.
 - دو بار آن خط باشد.
 - حداقل یک بار آن خط باشد.
 - یک شیر باشد.
 - حد اکثر یک شیر باشد.

قاعده اول مسیر (حاصل ضرب)

گودی از کدام مسیر می تواند از بین حصارها خارج شود؟



فعالیت

گراف درختی شجره نسب تان را از پدر کلان پدر، شروع تا خوردترین عضوی که به خانواده پدر کلان پدرتان تعلق دارد، رسم کنید.

- مسیر ارتباط خودتان را با پدر کلان تان به رنگ سرخ مشخص کنید.
- مسیر ارتباط پسر کاکای تان را با پدر کلان تان مشخص کنید.

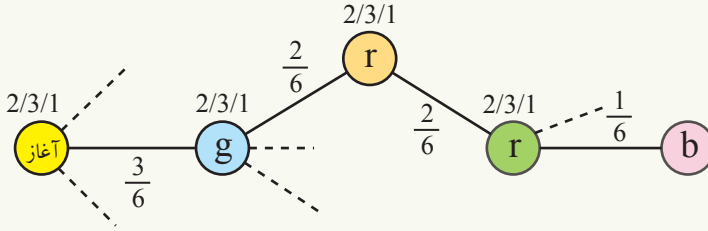
از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

- هر مسیر ما را به یک نتیجه جدا گانه می رساند.
- هر مسیر گراف درختی در انجام یک تجربه به یک حادثه اتفاقی اولیه می انجامد.
- رسیدن به هر حادثه اتفاقی اولیه، از مسیرهای مختلف و نقاط انتشار مختلف عبور می کند.
- احتمال یک حادثه اولیه عبارت از حاصل ضرب احتمالها از آغاز مسیر تا حادثه می باشد.

مثال: دیاگرام درختی را که برای کشیدن یک مهره از بین یک خریطه که در آن 2 مهره به رنگ سرخ (r)، 3 مهره به رنگ سبز (g) و یک مهره به رنگ سیاه (b) قرار دارند، در نظر می گیریم. حال اگر تجربه را 4 مرتبه تکرار نماییم طوری که مهره بعد از گرفتن، دوباره به خریطه گذاشته می شود و مطلوب احتمال حادثه، $w = \{grrb\}$ (سبز سرخ سرخ سیاه) باشد.

حل: در این صورت ضرور نیست تمام دیاگرام را در چهار مرحله شکل به صورت مکمل ترسیم نماییم؛ بلکه همان مسیری را در نظر می گیریم که ما را به حادثه اتفاقی مطلوب می رساند و احتمال حادثه از طریق مسیر مذکور عبارت از حاصل ضرب احتمالهایی که در

مسیر تا حادثه قرار دارند، می‌باشند.



بنا بر این به کمک اولین قاعدهٔ مسیر قیمت احتمال حادثهٔ مذکور عبارت است از:

$$P(\{w\}) = P(\{grrb\}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$\Rightarrow P(\{w\}) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنی احتمال برآمدن مهرهٔ (سبز، سرخ، سرخ، سیاه) 0.92% می‌باشد.

تمرین

۱- در مثال برداشتن مهره از خریطه، که در بالا کار شد، احتمال حوادث اتفاقی زیر را با استفاده از قاعدهٔ اول مسیر دریافت کنید.

$$w_1 = \{gbbr\} \bullet$$

$$w_2 = \{rggb\} \bullet$$

$$w_3 = \{brrg\} \bullet$$

• **کثرت نسبی و احتمال:** کثرت نسبی یک تجربه عبارت از نسبت کثرت مطلق نظر به تعداد کل دفعات انجام یک تجربه می‌باشد؛ اما احتمال یک حادثه قبل از وقوع آن پیش‌بینی می‌گردد.

کثرت نسبی حادثه A را به $h(A)$ نشان داده و $0 \leq h(A) \leq 1$ می‌باشد.

مانند احتمال $h_n(\phi) = 0$ و $h_n(S) = 1$ می‌باشد.

• **چانس برابر:** حوادثی که در انجام یک تجربه تصادفی یکی بر دیگری هیچ‌گونه برتری و یا هم‌شرایطی برای وقوع چانس بیشتر آن در یک فضای نمونه نداشته باشند، به نام حوادث با چانس برابر یاد می‌گردند.

مثال: آمدن شماره‌های رمل حوادث اتفاقی اولیه دارای چانس برابر مساوی به $\frac{1}{6}$ می‌باشد.

• **حادثه اتفاقی:** هرست فرعی یک فضای نمونه به حیث حادثه اتفاقی، همان تجربه می‌باشد. ست خالی یک حادثه اتفاقی ناممکن و S یک حادثه اتفاقی مطمئن می‌باشد.

• **قواعد احتمال:** هر گاه E یک حادثه اتفاقی یک فضای نمونه S باشد:

$$1) 0 \leq P(E) \leq 1$$

$$3) P(\phi) = 0, \quad P(S) = 1$$

• **دیاگرام‌های درختی:** هر تجربه تصادفی از نقطه شروع به شاخچه‌های حوادث ممکن اتفاقی جدا تقسیم می‌شوند. با انجام مرتبه دوم آن، مانند قدم اول به هر نتیجه ممکنه به حیث نقطه آغاز بار دیگر شاخچه‌های حوادث اتفاقی گراف رسم می‌گردد. به همین ترتیب روش ادامه می‌یابد. احتمال هر حادثه اولیه به دست آمده، عبارت از حاصل ضرب احتمالات هر بند شاخچه‌هایی که از نقطه آغاز روی مسیر مطلوب ما را به انجام آن می‌رساند می‌باشد.

• حاصل جمع احتمالات در هر نقطه انتشار شاخچه‌ها، مساوی به 1 است.

• حاصل جمع احتمالات تمام حوادث اولیه یک تجربه اتفاقی نیز مساوی به 1 می‌باشند.

• قاعده اول مسیر احتمالات

احتمال هر حادثه اتفاقی اولیه در پایان هر مسیر معین در گراف درختی مساوی به حاصل ضرب احتمالات هر شاخچه از طریق مسیر مطلوب می‌باشد.

تمرین عمومی

- 1- هرگاه 200 مرتبه یک سکه پرتاب شود و از جمله به تعداد 92 بار شیر بیاید در این صورت کثرت نسبی حوادث زیر را به دست آورید:
 - سکه شیر بیاید.
 - سکه خط بیاید.
 - مجموع کثرت نسبی شیر آمدن و خط آمدن چند است، بدون محاسبه جواب دهید.
- 2- هرگاه کثرت مطلق روزهای بارانی در سال 62 روز باشد مطلوب است:
 - کثرت نسبی روزهای بارانی در سال. (هرگاه سال 365 روز در نظر گرفته شود).
 - کثرت نسبی روز این که بارانی باشد.
 - احتمال این که یک روز بارانی باشد.
 - کثرت نسبی و احتمال برای یک روز بارانی را توضیح دهید.
- 3- در انداختن یک دانه رمل فضای نمونه را تشکیل نموده حوادث اتفاقی که دارای چانس برابر می‌باشند فهرست کنید.
- 4- یک دانه رمل و سکه را پرتاب نموده مطلوب است دیاگرام درختی و فضای نمونه تجربه دریافت کنید احتمال این که سکه شیر و دانه رمل 6 آمده باشد؟
- 5- از بین دو پیراهن {سیاه و سفید} که در یک الماری اتاق تاریک قرار دارند 3 مرتبه پیراهن انتخاب می‌نماییم (با واپس گذاشتن) دریافت کنید احتمال آن که:
 - (E_1): دومین پیراهن سیاه باشد.
 - (E_2): فقط دومین پیراهن سیاه باشد
 - (E_3): حداقل یک پیراهن سیاه باشد
 - (E_4): حداکثری یک پیراهن سیاه باشد
 - (E_5): اولین و یا آخرین پیراهن سیاه باشد
 - (E_6): اولین پیراهن سیاه و یا آخرین پیراهن سیاه باشد.
- 1- در یک الماری 5 کتاب ریاضی و 6 کتاب فزیک قرار دارند. به صورت تصادفی از بین آن‌ها 6 کتاب انتخاب می‌کنیم؛ دریافت کنید احتمال این که دو کتاب ریاضی باشد؟